

生徒のための復習・自学教材

【確率編】

かつ&少なくとも①

助問①

1 個のさいころを繰り返し 3 回振るとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 回は 5 の目が出る確率。
- (2) 出る目の最大値が 5 である確率。

助問②

1 個のさいころを 3 回投げたとき、出る目を順に X_1, X_2, X_3 として、 $S = X_1 + X_2 + X_3, T = X_1 X_2 X_3$ とおく。

- (1) S が 6 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) T が 6 の倍数となる確率を求めよ。

助問③

1 個のさいころを 3 回投げたとき、出る目を順に X_1, X_2, X_3 として、 $S = X_1 + X_2 + X_3, T = X_1 X_2 X_3$ とおく。

- (1) S が 7 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) T が 4 の倍数となる確率を求めよ。

助問④

n 個のさいころを同時に振るとき、その中の最大の目の数を M 、最小の目の数を L とする。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。

- (1) $M=5$ となる確率を求めよ。
- (2) $M=5$ かつ $L=2$ となる確率を求めよ。

[頻出問題]

ボス問①

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り、出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

- (1) $X=1$ である確率を求めよ。
- (2) $X=5$ である確率を求めよ。

[京都大学'17]

ボス問②

さいころを n 回振り、第 1 回目から第 n 回目までに出了さいころの目の数の積を X_n とする。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。

- (1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- (3) X_n が 20 で割り切れる確率を求めよ。

[東京大学・改'03]

ボス問①の練習 1

n 個のサイコロを同時にふり、出た目の数の最大のものを M_n 、最小のものを m_n とするとき、 $M_n - m_n > 1$ となる確率を求めよ。

[京都大学'86]

ボス問②の練習 1

サイコロをくり返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする。

すなわち、 k 回目に出た目の数を Y_k とすると、 $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$

- (1) X が 3 で割り切れる確率 p_n を求めよ。
- (2) X が 6 で割り切れる確率 q_n を求めよ。
- (3) X が 4 で割り切れる確率 r_n を求めよ。

[京都大学'92]

ボス問②の練習 2

9 枚のカードに 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記入してある。このカードの中から任意に 1 枚を抜き出し、その数字を記録し、もとのカードの中に戻すという操作を n 回くり返す。

- (1) 記録された数の積が 5 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) 記録された数の積が 10 で割り切れる確率を求めよ。

[名古屋大学'98]

ボス問②の練習 3

1 個のサイコロを n 回投げる。

- (1) $n \geq 2$ のとき、1 の目が少なくとも 1 回出て、かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る確率を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、1 の目が少なくとも 2 回出て、かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

[一橋大学'00]

おまけ (4 の倍数関係)

20 個の整数 1, 2, ..., 20 から無作為に 3 つの異なる数を選び、その積をつくる。このとき、次の確率をそれぞれ求めよ。

- (1) 積が 4 の倍数である確率。
- (2) 積が 8 の倍数である確率。

助問 1

1 個のさいころを繰り返し 3 回振るとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 回は 5 の目が出る確率。
- (2) 出る目の最大値が 5 である確率。

(1) 「少なくとも 1 回は 5 の目が出る」

の余事象は

「3 回とも 5 以外の目が出る」

だから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

Point

全事象 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

717°I (5, 5, 5)
717°II (5, 5, X)
717°III (5, X, X)
717°IV (X, X, X)

求める事象

余事象

	少なくとも 1 回は 5	5 が 出ない
すべて 求めて 答え		$\left(\frac{5}{6}\right)^3$
		1

(2)

6 が出たらアウト!!

「すべて 5 以下の目」かつ「少なくとも 1 回は 5 の目が出る」

出る目が 5 以下となる確率から 4 以下となる確率を
差し引けばよいので

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216}$$

Point

6 が出ない事象 (1, 2, 3, 4, 5)

717°I (5, 5, 5)
717°II (5, 5, X)
717°III (5, X, X)
717°IV (X, X, X)

求める事象

余事象 (部分的)

	少なくとも 1 回は 5	5 が 出ない
6 が出ない	求める 答え	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$
6 が出る		$\left(\frac{5}{6}\right)^n$

※ (1) と (2) の違い

(1) の余事象は全事象で考える a に対し

(2) の余事象は部分事象で考える! (部分的余事象)

助問 2

1 個のさいころを 3 回投げたとき、出る目を順に X_1, X_2, X_3 とし
て、 $S = X_1 + X_2 + X_3, T = X_1 X_2 X_3$ とおく。

- (1) S が 6 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) T が 6 の倍数となる確率を求めよ。

(1) $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ が 6 の倍数になる確率を a_n とおく。

$X_1 + X_2$ が 6 の倍数 a_2 と $X_3 = 6$ の 1 通り

$X_1 + X_2$ が 6 の倍数でないとき X_3 は 1 通り

よって

$$a_3 = a_2 \times \frac{1}{6} + (1 - a_2) \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

X_3	
2	$\rightarrow 4$
3	$\rightarrow 3$
4	$\rightarrow 2$
5	$\rightarrow 1$

Point

$X_1 + X_2$ を 6 でわった余り

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	0	1
2	3	4	5	0	1	2
3	4	5	0	1	2	3
4	5	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	0

$$a_2 = \frac{6}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$1 - a_2 = \frac{30}{36} = \left(\frac{5}{6}\right)$$

X_1, X_2 については自由に決めて、最後の X_3 で解決させる
というイメージ!!

これは漸化式につながる考え方! (助問 3)

(2) A を目の積が偶数、B を目の積が 3 の倍数であるとする

$$\begin{cases} P(A) = (3 \text{ 回とも奇数}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ P(B) = (3 \text{ 回とも 3 の倍数以外}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ P(A \cap B) = (3 \text{ 回とも 1, 5 のみ}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{cases}$$

	A	$\bar{A}$
B	①	② $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$\bar{B}$		$\left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 1

$$\begin{cases} ② = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ ① = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - ② \end{cases}$$

$$\therefore P(A \cap B) = ① = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right\}$$

$$= \frac{133}{216}$$

Point

3 回中「少なくとも 1 回は 2 の倍数が出る」

かつ「少なくとも 1 回は 3 の倍数が出る」確率を求めるとなる。

このことは助問 1-(1) と同様、余事象の確率が求めやすい!

排反ではない事象が 2 つある「かつ」の確率は表を
書いて考える!!

助問③

1個のさいころを3回投げたとき、出る目を順に X_1, X_2, X_3 として、 $S = X_1 + X_2 + X_3, T = X_1 X_2 X_3$ とおく。

(1) S が7の倍数となる確率を求めよ。

(2) T が4の倍数となる確率を求めよ。

(1) $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ が7の倍数になる確率を a_n とおく。

$X_1 + X_2$ が7の倍数のとき、 X_3 は存在しない

$X_1 + X_2$ が7の倍数でないとき、 X_3 は1通り

$X_1 + X_2$ が7の倍数でない

のは下の表のとおり

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1						X
2					X	
3				X		
4			X			
5		X				
6	X					

7で割って1余るは $\rightarrow 6$

2 $\rightarrow 5$

3 $\rightarrow 4$

4 $\rightarrow 3$

5 $\rightarrow 2$

6 $\rightarrow 1$

7 $\rightarrow$ なし

よって求める確率は $\frac{30}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Point

サイコロ2個は表も書き!

$\Rightarrow$ 最後の1個がどうなるかはいいか考えて書き!

※しかし、これだと n 回だと困る...

別

$(n+1)$ 回目までの和が7の倍数となるのは

まず n 回目までの和が7の倍数のときは a_n で

n 回目までの和が7の倍数でないときは

$(n+1)$ 回目で和が7の倍数になる目(ただ1つ存在)

と出ると決まらう

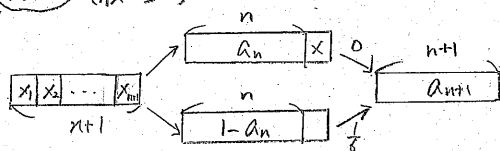
$$a_{n+1} = a_n \times 0 + (1 - a_n) \times \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{6} a_n + \frac{1}{6}, \quad a_1 = 0$$

$$\therefore a_2 = -\frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Point (1x=3!)



(2) 3回の目の組合せは (偶, 偶, 偶), (偶, 偶, 奇), (奇, 奇, 奇) であるから、この順列 (並びかえ) も考えて

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{6}\right)^3 + 3C_1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^1 + 3C_1 \left(\frac{3}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 \\ &= \frac{27}{216} + \frac{81}{216} + \frac{27}{216} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Point

含まれる偶数の個数 対し 奇数の個数で場合分けする。

(1) $\Rightarrow$ 連って最後で決まるのではなく、

途中に出れば"決まる"で 反復試行となる。

違いに注意!!

※しかし、これだと n 回だと困る...

別

余事象を考える!

4の倍数のときはオスス!

4の倍数とならない3回の目の組合せは、

(奇, 奇, 奇), (2or6, 奇, 奇) であるから

この順列 (並びかえ) も考えて

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 + 3C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

よって求める確率は

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Point

含まれる偶数は 7 以下にならない!!

したがって、回数が増えても有効!!

助問 4

n 個のさいころを同時に振るとき、その中の最大の目の数を M 、最小の目の数を L とする。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。

- $M=5$ となる確率を求めよ。
- $M=5$ かつ $L=2$ となる確率を求めよ。

[頻出問題]

(1) 助問 1(1) を思い出せ!

「すべて 5 以下の目」かつ「少なくとも 1 回は 5 の目が出る」

つまり

出る目が 5 以下となる確率から、4 以下となる確率

← 対象

を引けばよいので

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Point

6 が出ない事象 (1, 5, 1, 5, 1, 5)

917° I (5, 5, 5)

917° II (5, 5, x) 求めたい事象

917° III (5, x, x)

917° IV (x, x, x) 余事象 (部分的)

	少なくとも 1 回は 5	5 が 出ない	
6 が 出ない	求めたい 第 2	$\left(\frac{4}{6}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$

1. 6 が出たらアウト!!

(2)

2, 3, 4, 5 のいずれかが出る確率で考えればよい。

「すべて 2 以上 5 以下の目」かつ「少なくとも 1 回は 2 と 5 が出る」

A を最小値が 2、B が最大値が 5 であると定めると

A: 「すべて 2 以上の目」かつ「少なくとも 1 回は 2 の目が出る」

B: 「すべて 5 以下の目」かつ「少なくとも 1 回は 5 の目が出る」

$$\begin{cases} P(A) = (2 \text{ が 出ない}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ P(B) = (5 \text{ が 出ない}) = \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ P(A \cap B) = (2, 3, 4, 5 \text{ のいずれか}) = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

	A (少なくとも 1 回 2)	$\bar{A}$ (2 が 出ない)	
B (少なくとも 1 回 5)	求めたい答え	①	②
$\bar{B}$ (5 が 出ない)		$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
		$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2, 3, 4, 5 の
いずれかが出る確率
 $\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

部分的余事象!!

$$\begin{cases} ② = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ ① = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cap B) &= ② - ① \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Point

今までの同様、余事象の確率が求めやすい!

相反ではない事象が 2 つある「かつ」の確率は

表を書いて考える!!

ボス問①

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り、出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1) $X=1$ である確率を求めよ。

(2) $X=5$ である確率を求めよ。

[京都大学'17]

(1) $X=1$ かつ $M-L=1$ となるのは

$(M, L) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$ のいずれかである。

$(M, L) = (2, 1)$ のとき

1, 2 のいずれかが出る確率で考えればよい。

「すべて 1 か 2 の目」かつ「少なくとも 1 回は 1 と 2 が出る」

A を最小値が 1, B を最大値が 2 であると定めると

A : 「すべて 1 以上の目」かつ「少なくとも 1 回は 1 の目が出る」

B : 「すべて 2 以下の目」かつ「少なくとも 1 回は 2 の目が出る」

$$\begin{cases} P(\bar{A}) = (1 \text{ が出ない}) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ P(\bar{B}) = (2 \text{ が出ない}) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1, 2 \text{ とも出ない}) = 0 \end{cases}$$

	A (少なくとも 1 回 1)	$\bar{A}$ (1 が出ない)	
B (少なくとも 1 回 2)	$(M, L) = (2, 1)$ となる確率	①	②
$\bar{B}$ (2 が出ない)		0	$\left(\frac{1}{6}\right)^n$
		$\left(\frac{1}{6}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

1, 2 のいずれかが出る確率

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

部分的余事象!!

$$\begin{cases} ② = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ ① = \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}$$

$$\therefore P(A \cap B) = ② - ① = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$(M, L) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$ のときも同じだから

$X=1$ となる確率は

$$5 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \right\}$$

Point

助問④と同じように考えればよい

しかし、これは、1, 2 だけなので

n 回とも 1, 2 のいずれかが出る確率から、いずれか一方しか出ない確率を引いて $\left(\frac{2}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$

と考えると、求めた方が早い。

助問①と④を思い出せ!!

(2) $X=5$ かつ $M-L=5$ となるのは

$(M, L) = (6, 1)$ のときである。

つまり「少なくとも 1 回は 1 と 6 が出る」

A を最小値が 1, B を最大値が 6 であると定めると

A : 「少なくとも 1 回は 1 が出る」

B : 「少なくとも 1 回は 6 が出る」

$$\begin{cases} P(\bar{A}) = (1 \text{ が出ない}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ P(\bar{B}) = (6 \text{ が出ない}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (2, 3, 4, 5 \text{ のいずれか}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

	A (少なくとも 1 回 1)	$\bar{A}$ (1 が出ない)	
B (少なくとも 1 回 6)	求めたい 答え	①	②
$\bar{B}$ (6 が出ない)		$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$
		$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	1

1~6 の
いずれかが出る確率
1
全事象!!

$$\begin{cases} ② = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ ① = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

$$\therefore P(A \cap B) = ② - ①$$

$$= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n //$$

Point

助問④と同じように考えればよい!

助問④は部分的余事象だったのに、
本問は全事象だから、こっちの方が
考えやすい!!

ボス問 ②

さいころを n 回振り、第1回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数の積を X_n とする。ただし、 n は2以上の自然数とする。

- (1) X_n が5で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X_n が4で割り切れる確率を求めよ。
- (3) X_n が20で割り切れる確率を求めよ。

[東京大学・改'03]

(1) 「 X_n が5でわり切れる」

⇔ 「少なくとも1回5の目が出る」

助肉 ①(1) を思い出せ!

余事象は

「 n 回とも5以外の目が出る」

だから求める確率は $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2) 助肉 ③(2) を思い出せ!

余事象の「 X_n が4でわり切れない」ときを考える

4の倍数とならない n 回の目の組合せは

(奇, 奇, ..., 奇), (2 or 6, 奇, 奇, ..., 奇)

- ① n 回とも奇数
- ② 1回5 or 6, $n-1$ 回奇数

であるから、この順列(並びかえも考えて)

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n + nC_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \left(= 1 - \left(1 + \frac{2}{3}n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ も可} \right)$$

助肉 ④(2) を思い出せ!

(3) A を X_n が5の倍数、 B を X_n が4の倍数であると定める

$$\begin{cases} P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n & \text{(①(1)より)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \text{(②(2)より)} \end{cases}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (4 \text{ でも } 5 \text{ でもわり切れない}) = \left(\frac{2}{6}\right)^n + nC_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}$$

(1 or 3, 1 or 3, ..., 1 or 3),
(2 or 6, 1 or 3, ..., 1 or 3)

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n + n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= (1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

	A (5でわり切れる)	$\bar{A}$ (5でわり切れない)	
B (4でわり切れる)	求めたい 答え	①	$1 - \left(1 + \frac{2}{3}n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$\bar{B}$ (4でわり切れない)		$(1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(1 + \frac{2}{3}n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$
	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	1

$$\textcircled{1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n - (1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore P(A \cap B) = 1 - \left(1 + \frac{2}{3}n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n - \textcircled{1}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{2}{3}n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n + (1+n) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Point

n 回中「少なくとも1回5の倍数が出る」

かつ「少なくとも1回4が出る」または「4が1回も出ず、少なくとも2回2 or 6が出る」確率を求めることになる。

ということは助肉同様、余事象の確率が求めやすい!

排反ではない事象が2つある「かつ」の確率は表を書いて考える!!

$\bar{A} \cap \bar{B}$ の確率もやはり助肉④(2)の別解の方が考えやすい!

ボス問①の練習1

n 個のサイコロを同時にふり、出た目の数の最大のものを M_n 、最小のものを m_n とするとき、 $M_n - m_n > 1$ となる確率を求めよ。

[京都大学'86]

$n \geq 2$ とする。

余事象 $M_n - m_n \leq 1$ のときを考える。

$$M_n - m_n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$M_n - m_n = 0, 1$ のいずれかである。

(i) $M_n - m_n = 0$ となるのは

$$(M_n, m_n) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

のいずれかである。

$(M_n, m_n) = (1, 1)$ のとき、 n 個とも 1 の目が出るということから

$$\text{確率は } \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$(M_n, m_n) = (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ のときも同じだから

$$M_n - m_n = 0 \text{ となる確率は } 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(ii) $M_n - m_n = 1$ となるのは

$$(M_n, m_n) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5) \text{ のいずれかである}$$

ボス問 (i) と同じだから

$$M_n - m_n = 1 \text{ となる確率は } 5 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\}$$

(i)(ii) より

$M_n - m_n \leq 1$ となる確率は

$$\begin{aligned} & 6 \left(\frac{1}{6}\right)^n + 5 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} \\ &= 6 \left(\frac{1}{6}\right)^n + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 10 \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 4 \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

したがって、 $M_n - m_n > 1$ となる確率は

$$\begin{aligned} & 1 - \left\{ 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 4 \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} \\ &= \underline{1 - 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 4 \left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad (n=1 \text{ のときも成り立つ}) \end{aligned}$$

Point

ボス問①と同じです!!

頻出問題だということがわかると思います!

出来るようになるう!!

ボス問②の練習1

サイコロをくり返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする。

すなわち、 k 回目に出た目の数を Y_k とすると、 $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$

(1) X が 3 で割り切れる確率 p_n を求めよ。

(2) X が 6 で割り切れる確率 q_n を求めよ。

(3) X が 4 で割り切れる確率 r_n を求めよ。

[京都大学'92]

(1) 「 X が 3 で割り切れる」

$\Leftrightarrow$ 「少なくとも 1 回 3 or 6 が出る」

余事象は

「 n 回とも 3, 6 以外が出る」

だから求める確率 p_n は

$$p_n = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) $n \geq 2$ とする。

A を X が偶数、 B を X が 3 の倍数であると定めると

$$\begin{cases} P(\bar{A}) = (n \text{ 回とも奇数}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ P(\bar{B}) = (n \text{ 回とも 3, 6 以外}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (n \text{ 回とも 1, 5 のいずれか}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

	A (Xが偶数)	$\bar{A}$ (Xが奇数)	
B (Xが3の倍数)	求める 答え	①	$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
$\bar{B}$ (Xが3の倍数でない)		$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$
		$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	1

$$\textcircled{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore P(A \cap B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \textcircled{1} \quad \text{より}$$

$$\underline{q_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad (n=1 \text{ のときも成り立つ})$$

(3)

ボス問②(2) と全く同じ!!

$$\therefore \underline{r_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \quad (= 1 - (1 + \frac{n}{3}) \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ も可})$$

($n=1$ のときも成り立つ)

Point

$n \geq 2$ が無いので、一応場合分けした。

ボス問②の練習2

9枚のカードに1から9までの数字が1つずつ記入してある。このカードの中から任意に1枚を抜き出し、その数字を記録し、もとのカードの中に戻すという操作を n 回くり返す。

- (1) 記録された数の積が5で割り切れる確率を求めよ。
- (2) 記録された数の積が10で割り切れる確率を求めよ。

[名古屋大学'98]

(1) A を記録した数の積が5で割り切れると定めると

$$P(\bar{A}) = (n \text{ 回とも5以外が出る}) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

(2) $n \geq 2$ とする。

B を記録した数の積が2で割り切れると定めると

$$\begin{cases} P(\bar{A}) = \left(\frac{8}{9}\right)^n & (\text{①より}) \\ P(\bar{B}) = (n \text{ 回とも奇数}) = \left(\frac{5}{9}\right)^n \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (n \text{ 回とも } 3, 4, 5, 6, 8 \text{ 以外}) = \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{cases}$$

	A (5で割り切れる)	$\bar{A}$ (5で割り切れない)	
B (2で割り切れる)	求めたい 答え	①	$1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$
$\bar{B}$ (2で割り切れない)		$\left(\frac{5}{9}\right)^n$	$\left(\frac{5}{9}\right)^n$
		$\left(\frac{2}{9}\right)^n$	1

$$\textcircled{1} = \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

$$\therefore P(A \cap B) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \textcircled{1}$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

《注意》

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \{1 - P(\bar{A})\} \cdot \{1 - P(\bar{B})\} \\ &= \left\{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right\} \cdot \left\{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right\} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

とではいけない!!

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ を使っている!!

これは A と B が独立のとき!!

多分2回、10枚のカードでやると

答えが一致するか、大幅に減点されます!!

ボス問②の練習3

1個のサイコロを n 回投げる。

- (1) $n \geq 2$ のとき、1の目が少なくとも1回出て、かつ2の目も少なくとも1回出る確率を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、1の目が少なくとも2回出て、かつ2の目も少なくとも1回出る確率を求めよ。

[一橋大学'00]

(1) A を1の目が少なくとも1回出る事象、 B を2の目が少なくとも1回出る事象と定めると

$$\begin{cases} P(\bar{A}) = (n \text{ 回とも1の目が出ない}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ P(\bar{B}) = (n \text{ 回とも2の目が出ない}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (n \text{ 回とも1, 2以外が出る}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n \end{cases}$$

	A 少なくとも1回1の目 出た	$\bar{A}$ 1の目が出ない	
B 少なくとも1回2の目 出た	求めたい 答え	①	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
$\bar{B}$ 2の目が出ない		$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$
		$\left(\frac{4}{6}\right)^n$	1

$$\textcircled{1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

$$\therefore P(A \cap B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \textcircled{1} = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

(2) C を1の目が少なくとも2回出る事象とする。

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= (n \text{ 回とも2の目が出ない}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ P(\bar{C}) &= (n \text{ 回とも1の目が0回・1回}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_nC_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ P(\bar{B} \cap \bar{C}) &= (2回全く出ず、1の目が0回・1回) = \left(\frac{4}{6}\right)^n + {}_nC_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{n}{4}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^n \end{aligned}$$

	B 少なくとも1回2の目 出た	$\bar{B}$ 2の目が出ない	
C 少なくとも2回 1の目 出た	求めたい 答え	①	$1 - \left(1 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n$
$\bar{C}$ 1の目が0回・1回		$\left(1 + \frac{n}{4}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^n$	$\left(1 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n$
		$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	1

$$\textcircled{1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(1 + \frac{n}{4}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

$$\therefore P(A \cap B) = 1 - \left(1 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n - \textcircled{1}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(1 + \frac{n}{4}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

$$= 1 - \left(2 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(1 + \frac{n}{4}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

おまけ (4の倍数関係)

20個の整数 1, 2, ..., 20 から無作為に3つの異なる数を選び、その積をつくる。このとき、次の確率をそれぞれ求めよ。

- (1) 積が4の倍数である確率。
- (2) 積が8の倍数である確率。

$20C_3$ 順番を考慮しないので注意!!

余事象を数え!!

(1) $K = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
 $G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
 G の中でも特に $G_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$
 $G_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
 $G_8 = \{8, 16\}$
 とおく。

3個の数の組み合わせは

$(G, G, G), (G, G, K), (G_2, K, K)$

であるから

$$\frac{10C_3 + 10C_2 \times 10C_1 + 5C_1 \times 10C_2}{20C_3} = \frac{53}{76}$$

(2) 3個の数の組み合わせは

$(G, G, G), (G_2, G_4, K), (G_4, G_8, K), (G_8, K, K)$

であるから

$$\frac{10C_3 + 5C_1 \times 5C_1 \times 10C_1 + 5C_2 \times 10C_1 + 2C_1 \times 10C_2}{20C_3} = \frac{28}{57}$$

(1) K の倍数とならない3個の数の組み合わせは

$(K, K, K), (G_2, K, K)$ であるから

$$1 - \frac{10C_3 + 5C_1 \times 10C_2}{20C_3} = \frac{53}{76}$$

(2) 8 の倍数とならない3個の数の組み合わせは

$(K, K, K), (G_2, G_4, K), (G_2, G_8, K)$

であるから

$$1 - \frac{10C_3 + 8C_1 \times 10C_2 + 5C_2 \times 10C_1}{20C_3} = \frac{28}{57}$$

《注意》

②の部分には「2個の偶数のうち少なくとも一方は4の倍数である」という条件がある。だから先ほど使ったことを使うと (部分的余事象)

	少なくとも 1個は4の倍数	4の倍数が 出ない	
2個とも 偶数	$10C_2 - 5C_2$	$5C_2$	$10C_2$

したがって、 $\boxed{10C_2 - 5C_2} = (10C_2 - 5C_2) \times 10C_1$

でもよい!!

Point

含まれる偶数の個数 または 奇数の個数で
場合分けする!!