

生徒のための復習・自学教材

【整数編】

ユークリッドの互除法とその活用①

助問 ①

- (1) 18 と 12 の最大公約数を求めよ。
 (2) 731 と 301 の最大公約数を求めよ。

ボス問 ① の練習

m, n は $m > n > 0$ を満たす整数で, m を n で割った余りは 1 とする。このとき, $5^m - 1$ と $5^n - 1$ の最大公約数を求めよ。

助問 ②

- (1) $5n+6$ と $3n+1$ の最大公約数が 13 となるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。
 (2) $28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ。

ボス問 ② の練習

- (1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a = pb + c$ を満たしている。
 a と b の最大公約数を M , b と c の最大公約数を N とするとき, M と N は等しいことを示せ。
 (2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を, $a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ で定める。
 (i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。
 (ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。
 (iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。

[神戸大学・改'16]

助問 ③

- (1) $n \geq 2$ のとき, $x^n - 1$ を因数分解せよ。
 (2) n が自然数のとき, $2^{4n} - 1$ は 15 で割り切れることを示せ。
 [富山大学・改'09]

助問 ④

- α, β は $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = -1$ を満たし, $a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。
 ただし, n は自然数とする。
 (1) a_2 を求めよ。
 (2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n で表せ。
 (3) a_3, a_4 を求めよ。

ボス問 ①

- (1) a, b, q, r が正の整数で, $a = bq + r$ であるとき, a, b の最大公約数と b, r の最大公約数は一致することを証明せよ。
 (2) n, k が自然数のとき, $7^{n(k+1)} - 1$ と $7^n - 1$ の最大公約数を求めよ。

ボス問 ②

- $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,
 $a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$ と定める。
 (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
 (2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を, a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。
 (3) a_n は自然数であることを示せ。
 (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。
 [東京大学'17]

助問 ② の練習

$3n+16$ と $4n+18$ の最大公約数が 5 となるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

助問 ③ の練習

n が自然数のとき, $2^{10n} - 1$ は 31 の倍数であることを証明せよ。
 [滋賀大学'81]

助問 1

- (1) 18 と 12 の最大公約数を求めよ。
 (2) 731 と 301 の最大公約数を求めよ。

(1) 解法 1

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18} \quad 12 \\ 3 \overline{) 9} \quad 6 \\ \hline 3 \quad 2 \end{array}$$

$\therefore$ 最大公約数 6

神経質な小学生!
動画にて説明!!

解法 2

$$18 = 12 \times 1 + 6$$

$$(18, 12)$$

$$12 = 6 \times 2 + 0$$

$$= (12, 6)$$

$$= 6$$

$\therefore$ 最大公約数 6

シャイア>!!
(大抵は小学生!)
動画にて説明!!

(2) $731 = 301 \times 2 + 129 \quad (731, 301)$

$$301 = 129 \times 2 + 43 \quad = (301, 129)$$

$$129 = 43 \times 3 + 0 \quad = (129, 43)$$

$$= 43$$

$\therefore$ 最大公約数 43

助問②

- (1) $5n+6$ と $3n+1$ の最大公約数が 13 となるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。
 (2) $28n+5$ と $21n+4$ は互いに素であることを証明せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad 5n+6 &= (3n+1) \times 1 + 2n+5 & (5n+6, 3n+1) \\ 3n+1 &= (2n+5) \times 1 + n-4 & = (3n+1, 2n+5) \\ 2n+5 &= (n-4) \times 2 + 13 & = (2n+5, n-4) \\ & & = (n-4, 13) \end{aligned}$$

したがって、 $5n+6$ と $3n+1$ の最大公約数は
 $n-4$ と 13 の最大公約数に等しい。
 よって、 $n-4$ が 13 の倍数になればよいので
 $-3 \leq n-4 \leq 46$ に注意して
 $n-4 = 0, 13, 26, 39$
 $\therefore n = 4, 17, 30, 43 //$

$$\begin{aligned} (2) \quad 28n+5 &= (21n+4) \times 1 + 7n+1 & (28n+5, 21n+4) \\ 21n+4 &= (7n+1) \times 3 + 1 & = (21n+4, 7n+1) \\ & & = (7n+1, 1) \\ & & = 1 \end{aligned}$$

したがって、 $28n+5$ と $21n+4$ の最大公約数が 1 なので
 $28n+5$ と $21n+4$ は互いに素である。

(2) の別解

最大公約数を g とおくと

$$\begin{cases} 28n+5 = ga \\ 21n+4 = gb \end{cases} \quad (a, b \text{ は互いに素な整数})$$

とあわせ

2式から n を消去して

$$48b - 3ga = 1$$

$$g(48b - 3a) = 1$$

g は 1 をわり切るから $g=1$

したがって、 $28n+5$ と $21n+4$ の最大公約数が 1 なので
 $28n+5$ と $21n+4$ は互いに素である。

Point

最大公約数は「神経質小学生」or「ジヤイアン!」

(2) の「互いに素」は「最大公約数が 1」ということ!!

(2) の別解の考え方は大切なのでぜひ身につけて欲しい。

参考問題 参照

《参考問題》

「 $m^2 = 2^n + 1$ をみたす自然数 m, n の組をすべて求めよ。」

$$m^2 - 1 = 2^n$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-1) = 2^n$$

$$\begin{aligned} 2^\alpha \cdot 2^\beta &= 2^n \text{ より} \\ \alpha + \beta &= n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m+1 = 2^\alpha \\ m-1 = 2^\beta \end{cases} \quad (\alpha > \beta, \alpha + \beta = n) \text{ とおける}$$

m を消去すると

$$2^\alpha - 2^\beta = 2$$

$$2^\beta (2^{\alpha-\beta} - 1) = 2$$

両辺 2^β をわけて

$$2^{\beta-1} (2^{\alpha-\beta} - 1) = 1$$

$2^{\beta-1} > 0$ より $2^{\alpha-\beta} - 1$ は整数だから

$$\begin{cases} 2^{\beta-1} = 1 & \Leftrightarrow \beta-1=0 \\ 2^{\alpha-\beta} - 1 = 1 & \Leftrightarrow 2^{\alpha-\beta} = 2 \Leftrightarrow \alpha-\beta=1 \end{cases}$$

$\therefore \alpha = 2, \beta = 1$

$$m+1 = 2^\alpha \text{ より } m = 3$$

$$\alpha + \beta = n \text{ より } n = 3 \quad \therefore (m, n) = (3, 3) //$$

似てない?

助問 ③

(1) $n \geq 2$ のとき, $x^n - 1$ を因数分解せよ。

(2) n が自然数のとき, $2^{4n} - 1$ は 15 で割り切れることを示せ。

[富山大学・改'09]

$$(1) x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$$

$$(2) 2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1$$

$$= 16^n - 1$$

$$= (16-1)(16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 1) \quad (\textcircled{1} \text{ (1)より})$$

$$= 15(16^{n-1} + 16^{n-2} + \dots + 1)$$

したがって, $2^{4n} - 1$ は 15 で割り切れる。

別解1 合同式

$$16 \equiv 1 \pmod{15} \quad \text{だから}$$

$$16^n \equiv 1 \pmod{15}$$

$$2^{4n} \equiv 1 \pmod{15}$$

$$2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{15}$$

$\therefore 2^{4n} - 1$ は 15 で割り切れる。

別解2

$$a_n = 2^{4n} - 1 \quad \text{とおく。}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2^{4(n+1)} - 1 - (2^{4n} - 1)$$

$$= 2^{4n+4} - 2^{4n}$$

$$= 2^4 \cdot 2^{4n} - 2^{4n}$$

$$= (2^4 - 1) \cdot 2^{4n}$$

$$= 15 \cdot 2^{4n}$$

$\therefore a_{n+1}$ は 15 でわった余りと a_n は 15 でわった余りは等しい。

よって、帰納的に a_n ($n=1, 2, \dots$) は 15 でわった余りは

すべて等しい。

$$a_1 = 2^4 - 1 = 15 \quad \text{は 15 で割り切れるから}$$

$$a_n = 2^{4n} - 1 \quad \text{は 15 で割り切れる。}$$

Point

・数学的帰納法 別解4

① $P_{n+1} = f(P_n)$ 型

(I) $n=1$ が正しいことを示す

(II) $n=k$ が正しいと仮定して $n=k+1$ が正しいことを示す。

② $P_{n+2} = f(P_n, P_{n+1})$ 型

(I) $n=1, 2$ が正しいことを示す

(II) $n=k, k+1$ が正しいと仮定して $n=k+2$ が正しいことを示す。

その他、いろいろな形がある!

別解3 二項定理

$$2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1$$

$$= 16^n - 1$$

$$= (1+15)^n - 1$$

$$= nC_1 1^n \cdot 15^0 + nC_2 1^{n-1} \cdot 15^1 + \dots + nC_n 1^0 \cdot 15^n - 1$$

15 の倍数

$$= 1 + 15K - 1 \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$= 15K$$

$\therefore 2^{4n} - 1$ は 15 の倍数。

別解4 数学的帰納法

すべての自然数 n に対して

(*) $2^{4n} - 1$ は 15 で割り切れる。

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(I) $n=1$ のとき

$$2^4 - 1 = 15$$

$\therefore (*)$ は成り立つ。

(II) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

つまり $2^{4k} - 1 = 15K$ ($K \in \mathbb{Z}$) とおける。①

$n=k+1$ のとき

$$2^{4(k+1)} - 1 = 2^4 \cdot 2^{4k} - 1$$

$$= 2^4(15K+1) - 1 \quad (\textcircled{1} \text{ ①より})$$

$$= 16 \cdot 15K + 16 - 1$$

$$= 15(16K+1)$$

$\therefore n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ。

(I)(II) より

すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つ。

Point

・二項定理 別解3

$$(1+x)^n = 1 + nC_1 x^1 + nC_2 x^2 + \dots + nC_n x^n$$

はよく使うので 使えるように!!

助問 4

α, β は $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -1$ を満たし, $a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。
ただし, n は自然数とする。

- (1) a_2 を求めよ。
(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n で表せ。
(3) a_3, a_4 を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad a_2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4^2 - 2 \times (-1) \\ &= 18 \end{aligned}$$

対称式

$$\begin{aligned} (2) \quad a_{n+2} &= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} \\ &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha^{n+1}\beta - \alpha\beta^{n+1} \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n) \\ &= 4a_{n+1} + a_n \quad (\because \alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -1) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n \quad \text{漸化式といひます!}$$

$$(3) \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 18$$

$n=1$ を代入すると

$$a_3 = 4a_2 + a_1 = 4 \times 18 + 4 = 76$$

$n=2$ を代入すると

$$a_4 = 4a_3 + a_2 = 4 \times 76 + 18 = 322$$

Point

(2) は 対称式の漸化式の作り方で可!
1回経験してあつていつでも作れるようになります!

(3) は 対称式を使いたくなると思います

$$a_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \dots$$

$$a_4 = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = \dots$$

しかし、この方法だと $a_5, a_6, \dots, a_{10}, \dots$

となつていくと大変です!

しかし、(2) の漸化式を作つておく順序同じように
求む可!

すなわち、 a_1, a_2 が自然数だから漸化式の形から

a_3 も自然数、すなわち a_2, a_3 が自然数だから a_4 も...

というように帰納的に示して a_n が自然数

ということも言えます! (これを数学的帰納法という)

ボス問 ②

$p=2+\sqrt{5}$ とおき、自然数 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して、

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n \text{ と定める。}$$

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を、 a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。
- (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

[東京大学'17]

$$(1) -\frac{1}{p} = -\frac{1}{2+\sqrt{5}} = -\frac{2-\sqrt{5}}{4-5} = 2-\sqrt{5} \quad (=q \text{ とおく})$$

$$p+q=4, \quad pq=-1, \quad a_n = p^n + q^n$$

$$\therefore a_1 = p+q=4$$

$$a_2 = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 4^2 - 2(-1) = 18$$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_1 a_n = (p+q)(p^n + q^n)$$

$$= p^{n+1} + q^{n+1} + pq p^n + pq q^n$$

$$= p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1})$$

$$= a_{n+1} - a_{n-1} \quad (\because pq = -1)$$

$$\therefore a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

(3) (2)より

$$4a_n = a_{n+1} - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \text{--- ①}$$

a_n が自然数であることを数学的帰納法で示す

(I) $n=1, 2$ のとき

(1)より $a_1=4, a_2=18$ だから自然数である。

(II) $n=k-1, k \ (k \geq 2)$ のとき、成り立つと仮定する。

つまり a_{k-1}, a_k ともに自然数であると仮定する

$$(1)より \quad a_{k+1} = 4a_k + a_{k-1} \text{ となるので}$$

a_{k+1} も自然数である。

(I)(II)より すべての a_n は自然数である。

(4) $(x=y)$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots$$

(4) (3) ①より

$$\frac{a_{n+1}}{a} = \frac{4}{1} \frac{a_n}{b} + \frac{a_{n-1}}{1}$$

$(n \geq 2)$

ボク内田!!

$$(a_{n+1} \text{ と } a_n \text{ の最大公約数}) = (a_n \text{ と } a_{n-1} \text{ の最大公約数})$$

$$= (a_{n-1} \text{ と } a_{n-2} \text{ の最大公約数})$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= (a_2 \text{ と } a_1 \text{ の最大公約数})$$

$$= 2$$

Point

(4) の形をみて ユークリッドの互除法に気づくこと!!

$a = bq + r$ を $a \leq b$ であった余り r だと
思い込まずに!!

助問 2 の練習

$3n+16$ と $4n+18$ の最大公約数が 5 となるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

$$4n+18 = (3n+16) \times 1 + n+2 \quad (4n+18, 3n+16)$$

$$3n+16 = (n+2) \times 3 + 10 \quad = (3n+16, n+2)$$

$$= (n+2, 10)$$

したがって、 $3n+16$ と $4n+18$ の最大公約数は

$n+2$ と 10 の最大公約数に等しい。

最大公約数が 5 だから

$n+2$ は 2 の倍数でない 5 の倍数になればよい。

$3 \leq n+2 \leq 52$ に注意して

$$n+2 = 5, 15, 25, 35, 45$$

$$\therefore \underline{n = 3, 13, 23, 33, 43}$$

助問③の練習

n が自然数のとき、 $2^{10n}-1$ は 31 の倍数であることを証明せよ。

[滋賀大学'81]

$$\begin{aligned} 2^{10n}-1 &= (2^5)^{2n}-1 \\ &= 32^{2n}-1 \\ &= (32-1)(32^{2n-1}+32^{2n-2}+\cdots+32^1+1) \\ &= 31 \cdot (32^{2n-1}+32^{2n-2}+\cdots+32^1+1) \end{aligned}$$

よって、31 の倍数となる。

別解1 合同式

$$32 \equiv 1 \pmod{31} \text{ から}$$

$$32^{2n} \equiv 1 \pmod{31}$$

$$2^{10n} \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\therefore 2^{10n}-1 \equiv 0 \pmod{31}$$

したがって、 $2^{10n}-1$ は 31 の倍数である。

別解2

$$a_n = 2^{10n}-1 \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= 2^{10(n+1)}-1-(2^{10n}-1) \\ &= 2^{10n+10}-2^{10n} \\ &= (2^{10}-1) \cdot 2^{10n} \\ &= 1023 \cdot 2^{10n} \\ &= 31 \times 33 \cdot 2^{10n} \end{aligned}$$

$\therefore a_{n+1}$ を 31 でわった余りと a_n を 31 でわった余りは等しい。

よって、 a_n ($n=1, 2, \dots$) を 31 でわった余りはすべて等しい。

$a_1 = 2^{10}-1 = 1023 = 31 \times 33$ は 31 でわり切れるから

$2^{10n}-1$ は 31 の倍数である。

別解3 二項定理

$$\begin{aligned} 2^{10n}-1 &= (2^5)^{2n}-1 \\ &= 32^{2n}-1 \\ &= (1+31)^{2n}-1 \\ &= 2nC_0 1^{2n} 31^0 + \underbrace{2nC_1 1^{2n-1} 31^1 + \cdots + 2nC_{2n} 1^0 31^{2n}}_{31 \text{ の倍数}} - 1 \end{aligned}$$

$$= 1 + 31K - 1 \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$= 31K$$

$\therefore 2^{10n}-1$ は 31 の倍数である。

別解4 数学的帰納法

すべての自然数 n に対して

(*) $2^{10n}-1$ は 31 の倍数である

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(I) $n=1$ のとき。

$$2^{10}-1 = 1023 = 31 \times 33$$

$\therefore (*)$ は成り立つ

(II) $n=k$ のとき (*) が成り立つと仮定する。

つまり $2^{10k}-1 = 31K$ ($K \in \mathbb{Z}$) とおける①

$n=k+1$ のとき。

$$\begin{aligned} 2^{10(k+1)}-1 &= 2^{10} \cdot 2^{10k}-1 \\ &= 2^{10}(31K+1)-1 \\ &= 2^{10} \cdot 31K + 1024 - 1 \\ &= 31(2^{10}K+33) \end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$ のときも (*) が成り立つ

(I)(II)より

すべての自然数 n に対して (*) が成り立つ

ボス問 1 の練習

m, n は $m > n > 0$ を満たす整数で, m を n で割った余りは 1 とする。このとき, $5^m - 1$ と $5^n - 1$ の最大公約数を求めよ。

条件より $m = nk + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) とおける。

$$\begin{aligned} 5^m - 1 &= 5^{nk+1} - 1 = 5(5^n)^k - 1 \\ &= 5\{(5^n)^k - 1\} + 4 \\ &= 5(5^n - 1)\{(5^n)^{k-1} + (5^n)^{k-2} + \dots + (5^n)^1 + 1\} + 4 \end{aligned}$$

$$\frac{5^{nk+1} - 1}{a} = \frac{(5^n - 1)}{b} \cdot \frac{5\{(5^n)^{k-1} + (5^n)^{k-2} + \dots + (5^n)^1 + 1\}}{c} + \frac{4}{d}$$

ユークリッドの互除法より

$5^{nk+1} - 1$ と $5^n - 1$ の最大公約数は

$5^n - 1$ と 4 の最大公約数と一致する。

$$\begin{aligned} \therefore 5^n - 1 &= (5-1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5^1 + 1) \\ &= 4(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5^1 + 1) \end{aligned}$$

だから 4 は $5^n - 1$ の約数である

したがって, 求める最大公約数は 4

別解 1 二項定理

$$5^n - 1 = A \text{ とおくと } 5^n = 1 + A$$

$$\begin{aligned} 5^m - 1 &= 5^{nk+1} - 1 = 5(5^n)^k - 1 \\ &= 5(1+A)^k - 1 \\ &= 5\{ {}^k C_0 1^k A^0 + {}^k C_1 1^{k-1} A^1 + \dots + {}^k C_k 1^0 A^k \} - 1 \\ &\quad \text{A の倍数} \\ &= 5(1+AM) - 1 \quad (M \in \mathbb{Z}) \\ &= 5AM + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{5^m - 1}{a} = \frac{(5^n - 1)}{b} \cdot \frac{5M + 4}{c} + \frac{4}{d}$$

ユークリッドの互除法より

$5^m - 1$ と $5^n - 1$ の最大公約数は

$5^n - 1$ と 4 の最大公約数と一致する。

したがって

$$\begin{aligned} 5^n - 1 &= (1+4)^n - 1 \\ &= {}^n C_0 1^n 4^0 + \underbrace{{}^n C_1 1^{n-1} 4^1 + \dots + {}^n C_n 1^0 4^n}_{4 \text{ の倍数}} - 1 \\ &= 4N \quad (N \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

だから 4 は $5^n - 1$ の約数であるので, 求める最大公約数は 4

別解 2 合同式

$$5^n \equiv 1 \pmod{5^n - 1}$$

$$(5^n)^k \equiv 1 \pmod{5^n - 1}$$

$$5 \cdot (5^n)^{k-1} \equiv 4 \pmod{5^n - 1}$$

$$5^{nk+1} - 1 \equiv 4 \pmod{5^n - 1}$$

$$\therefore 5^m - 1 \equiv 4 \pmod{5^n - 1}$$

したがって ユークリッドの互除法より

$5^m - 1$ と $5^n - 1$ の最大公約数は

$5^n - 1$ と 4 の最大公約数と一致する

以下は同じ (省略)

ボス問②の練習

- (1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a = pb + c$ を満たしている。
 a と b の最大公約数を M , b と c の最大公約数を N とするとき, M と N は等しいことを示せ。
- (2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を, $a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), $a_1=3$, $a_2=4$ で定める。
- (i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。
 (ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。
 (iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。

[神戸大学・改'16]

(1) $a = pb + c$ ①

(i) a と b の最大公約数が M より

$a = AM, b = BM$ (A と B は互いに素な整数)
 とおける。

①より $c = a - pb = AM - pBM = M(A - pB)$

よって M は c の約数である。

また M は b の約数でもあるから

M は b と c の公約数である

b と c の最大公約数が N なので $M \leq N$

(ii) b と c の最大公約数が N より

$b = B'N, c = CN$ (B' と C は互いに素な整数)

とおける

①より $a = pb + c = pB'N + CN = N(pB' + C)$

よって N は a の約数である。

また N は b の約数でもあるから

N は a と b の公約数である。

a と b の最大公約数が M なので $N \leq M$

(i) ①より $M = N$

(2) (i) $a_1=3, a_2=4, a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ ($n=1, 2, \dots$) より

帰納的にすべての a_n は自然数であるので $a_n \neq 0$, 整数

(1)より $(a_{n+2} \text{ と } a_{n+1} \text{ の最大公約数}) = (a_{n+1} \text{ と } a_n \text{ の最大公約数})$

$\therefore (a_{n+1} \text{ と } a_n \text{ の最大公約数}) = (a_n \text{ と } a_{n-1} \text{ の最大公約数})$

$= (a_{n-1} \text{ と } a_{n-2} \text{ の最大公約数})$

$= \dots$

$= \dots$

$= (a_2 \text{ と } a_1 \text{ の最大公約数})$

$= (4 \text{ と } 3 \text{ の最大公約数})$

$= 1$
 $\rightarrow$

Point

★の説明

例えば 6 の約数は $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

4 の約数は $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

したがって 6 と 4 の公約数は $\{\pm 1, \pm 2\}$ から

最大公約数は 2

-4 の約数も $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ から

6 と 4 の公約数と最大公約数に変化がなし!!

(ii) $a_{n+4} = 6a_{n+3} + a_{n+2}$

$= 6(6a_{n+2} + a_{n+1}) + a_{n+2}$

$= 37a_{n+2} + 6a_{n+1}$

$= 37a_{n+2} + (a_{n+2} - a_n)$

$= 38a_{n+2} - a_n$

$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ より

$a_{n+3} = 6a_{n+2} + a_{n+1}$

$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n$ より

$6a_{n+1} = a_{n+2} - a_n$

$\therefore a_{n+4} = 38a_{n+2} - a_n$ ②

(iii) (1) ②より

$(a_{n+4} \text{ と } a_{n+2} \text{ の最大公約数}) = (a_{n+2} \text{ と } -a_n \text{ の最大公約数})$

$= (a_{n+2} \text{ と } a_n \text{ の最大公約数})$ (★)

$\therefore a_3 = 6a_2 + a_1 = 27, a_4 = 6a_3 + a_2 = 166$ となるので

(ア) n が奇数のとき,

$(a_{n+2} \text{ と } a_n \text{ の最大公約数}) = (a_n \text{ と } a_{n-2} \text{ の最大公約数})$

$= (a_{n-2} \text{ と } a_{n-4} \text{ の最大公約数})$

$= \dots$

$= \dots$

$= (a_3 \text{ と } a_1 \text{ の最大公約数})$

$= (27 \text{ と } 3 \text{ の最大公約数})$

$= 3$

(イ) n が偶数のとき,

$(a_{n+2} \text{ と } a_n \text{ の最大公約数}) = (a_n \text{ と } a_{n-2} \text{ の最大公約数})$

$= (a_{n-2} \text{ と } a_{n-4} \text{ の最大公約数})$

$= \dots$

$= \dots$

$= (a_4 \text{ と } a_2 \text{ の最大公約数})$

$= (166 \text{ と } 4 \text{ の最大公約数})$

$= 2$

(エ) (1)より

最大公約数は $\begin{cases} 3 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$