

生徒のための復習・自学教材

【場合の数編】

区別をつける・つけない①

助問 1

- (1) 4 個の文字 a, b, c, d から、異なる 3 個を取って 1 列に並べるとき、並べ方は何通りあるか。
- (2) 4 個の文字 a, b, c, d から、異なる 3 個を取って文字の組を作るとき、何通りできるか。

助問 2

- (1) 4 人を 2 人ずつ A 組と B 組に分ける分け方は何通りあるか。
- (2) 4 人を 2 人ずつ 2 組に分ける分け方は何通りあるか。
- (3) 4 人を 3 人、1 人に分ける組合せは何通りあるか。
- (4) 6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける組合せは何通りあるか。

助問 3

- (1) 3 個の文字 a, b, c をすべて使って文字列を作るとき、文字列は何個作れるか。
- (2) 3 個の文字 a, a, c をすべて使って文字列を作るとき、文字列は何個作れるか。

助問 4

- (1) $x+y+z=4$ の負でない整数解 (x, y, z) は、何通りあるか。
- (2) $x+y+z=4$ の自然数解 (x, y, z) は、何通りあるか。
- (3) $x+y \leq 4$ の負でない整数解 (x, y) は、何通りあるか。

助問 5

4 個のボールを 2 個の箱に分配する。1 個のボールも入らない箱があってもよいものとするとき、何通りあるか。

- (1) ボールも箱も区別する。
- (2) ボールは区別するが、箱は区別しない。

助問 6

4 個のボールを 2 個の箱に分配する。1 個のボールも入らない箱があってもよいものとするとき、何通りあるか。

- (1) ボールは区別しないが、箱は区別する。
- (2) ボールも箱も区別しない。

助問 7

6 個のボールを 3 個の箱に分配する。ただし、1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。それぞれ何通りあるか。

- (1) ボールも箱も区別する。
- (2) ボールは区別しないが、箱は区別する。
- (3) ボールは区別するが、箱は区別しない。
- (4) ボールも箱も区別しない。

ボス問 1

n を正の整数とし、 n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

- (1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき、 n 個の互いに区別のつかないボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

[東京大学'96]

練習 1

- (1) 5 人を A, B の 2 組に分ける。各組には少なくとも 1 人は含まれる組合せは何通りあるか。
- (2) 5 人を 2 組に分ける。各組には少なくとも 1 人は含まれる組合せは何通りあるか。
- (3) 3 人に異なる 5 個の球を 1 人 1 個以上配る方法は何通りあるか。

練習 2

12 人の生徒を次のような 3 組に分ける方法は何通りあるか。

- (1) 6 人、4 人、2 人の 3 組
- (2) 4 人ずつの 3 組
- (3) 5 人、5 人、2 人の 3 組
- (4) どの組にも 1 人以上いる 3 組

[頻出問題]

ボス問 1 の練習

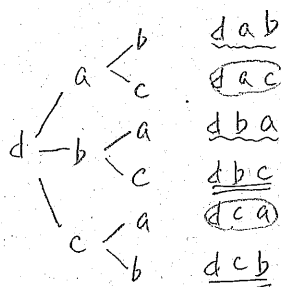
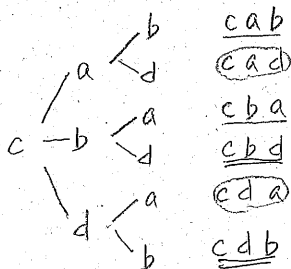
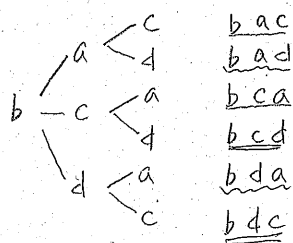
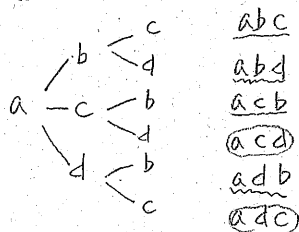
n を正の整数とし、 n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、どの箱も少なくとも 1 個のボールは入るものとする。以下に述べる 4 つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

- (1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき、 n 個の互いに区別のつかないボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

助問 1

- (1) 4 個の文字 a, b, c, d から、異なる 3 個を取って 1 列に並べるとき、並べ方は何通りあるか。
 (2) 4 個の文字 a, b, c, d から、異なる 3 個を取って文字の組を作るとき、何通りできるか。

(1) 左 中 右

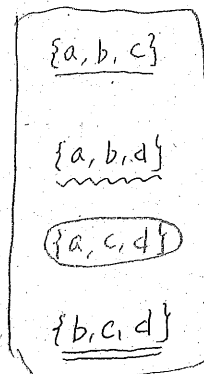


$4P_3$

$$4 \times 3 \times 2 = 24_T$$

↑ ↑
 左 中
 と の 右
 区 区
 別 別

(2)



${}_4C_3$

$\leftarrow \times 3!$

$${}_4C_3 \times 3! = 4 \times 3 \times 2$$

$$\therefore {}_4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4_T$$

${}_4C_3$

$$({}_4C_3 = \frac{4P_3}{3!})$$

Point

(組に区別なく分ける) $\times$ (組に区別をつける)
 $=$ (区別のある組に分ける)

助問②

- (1) 4人を2人ずつA組とB組に分ける分け方は何通りあるか。
 (2) 4人を2人ずつ2組に分ける分け方は何通りあるか。
 (3) 4人を3人, 1人に分ける組合せは何通りあるか。
 (4) 6人を2人ずつ3組に分ける組合せは何通りあるか。

(1) ①②③④

A B
②① ③④

A B
①② ③④

A B
①② ③④

A B
①② ③④

A B
②③ ①④

A B
④③ ①②

A B
③④ ①②

$$4C_2 \times 2C_2 = 6_T$$

↑
左
と
右
(A
と
B)
の
区
別

(2) ①②③④

②① ③④

①② ③④
①③ ②④
①④ ②③

$\times_T$

$$3 \times 2! = 4C_2 \times 2C_2$$

$$\therefore \mathcal{X} = \frac{4C_2 \times 2C_2}{2!}$$

$$= 3_T$$

(4) 組に区別をつける

①②③④⑤⑥

A B C
②① ③④ ⑤⑥

$$6C_2 \times 4C_2 \times 2C_2$$

$\leftarrow \times 3!$

組の区別をなくす

①②③④⑤⑥

②① ③④ ⑤⑥

$$\mathcal{X}_T$$

(3) ①②③④

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ①④ ⑤⑥

A B C
③④ ①② ⑤⑥

A B C
④⑤ ①② ③⑥

A B C
⑤⑥ ①② ③④

A B C
⑥⑤ ①② ③④

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ④⑤ ①⑥

A B C
③④ ⑤⑥ ①②

A B C
④⑤ ⑥① ②③

A B C
⑤⑥ ①② ③④

A B C
⑥① ②③ ④⑤

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ④⑤ ①⑥

A B C
③④ ⑤⑥ ①②

A B C
④⑤ ⑥① ②③

A B C
⑤⑥ ①② ③④

A B C
⑥① ②③ ④⑤

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ④⑤ ①⑥

A B C
③④ ⑤⑥ ①②

A B C
④⑤ ⑥① ②③

A B C
⑤⑥ ①② ③④

A B C
⑥① ②③ ④⑤

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ④⑤ ①⑥

A B C
③④ ⑤⑥ ①②

A B C
④⑤ ⑥① ②③

A B C
⑤⑥ ①② ③④

A B C
⑥① ②③ ④⑤

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ④⑤ ①⑥

A B C
③④ ⑤⑥ ①②

A B C
④⑤ ⑥① ②③

A B C
⑤⑥ ①② ③④

A B C
⑥① ②③ ④⑤

A B C
①② ③④ ⑤⑥

A B C
②③ ④⑤ ①⑥

A B C
③④ ⑤⑥ ①②

A B C
④⑤ ⑥① ②③

A B C
⑤⑥ ①② ③④

$$\therefore \mathcal{X} \times 3! = 6C_2 \times 4C_2 \times 2C_2$$

$$\mathcal{X} = \frac{6C_2 \times 4C_2 \times 2C_2}{3!}$$

$$= \frac{15 \times 8 \times 1}{6}$$

$$= 15_T$$

(3) まず"組に区別をつけて考える"

①②③④

A B
③① ④②

A B
①②③ ④

A B
①②④ ③

A B
①③④ ②

A B
②③④ ①

$$4C_3 \times 1C_1 = 4_T$$

↑
区
別
!!

組の区別をなくす

①②③④

③① ④②

①②③ ④
①②④ ③
①③④ ②
②③④ ①

$\mathcal{X}_T$

$$\mathcal{X} \times 1! = 4C_3 \times 1C_1$$

$$\therefore \mathcal{X} = 4C_3 \times 1C_1$$

$$= 4_T$$

Point

(1) $4C_2 \times 2C_2$ というのは 2人1組としたときの

2組の順列である!

それは 選んだ 2人の順列は考えないが、

選んだ 2組の順列は考えている!

つまり $4C_2$ で 選んだのが A組, $2C_2$ で

選んだのが B組と区別をつけて数えている!

(3), (4) も同様。

(2) は 助問①の Point と同様に

(組に区別をなく分ける) $\times$ (組に区別をつける)

$=$ (区別のある組に分ける)

とつながっている!

助問 ③

- (1) 3 個の文字 a, b, c をすべて使って文字列を作るとき、文字列は何個作れるか。
 (2) 3 個の文字 a, a, c をすべて使って文字列を作るとき、文字列は何個作れるか。

(1) 左 中 右

a $\begin{cases} b-c \\ c-b \end{cases}$

b $\begin{cases} a-c \\ c-a \end{cases}$

c $\begin{cases} a-b \\ b-a \end{cases}$

abc

acb

bac

bca

cab

cba

(2)

区別をつけて考える

$\underline{a} \underline{a} \underline{c}$

$\underline{a} \underline{c} \underline{a}$

$\underline{a} \underline{a} \underline{c}$

$\underline{a} \underline{c} \underline{a}$

$\underline{c} \underline{a} \underline{a}$

$\underline{c} \underline{a} \underline{a}$

$\times 2!$

区別をなくすと

$\begin{matrix} a a c \\ a c a \\ c a a \end{matrix}$

$\times_T$

$$\times \times 2! = 3!$$

$$\therefore \times = \frac{3!}{2!} = \underline{\underline{3_T}}$$

${}_3P_3 (=3!)$

$$3 \times 2 \times 1 = 6_T$$

Point

同じものを含む順列

区別をつけて並べて、区別をなくす!!

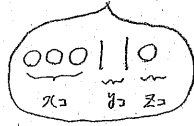
助問 4

- (1) $x+y+z=4$ の負でない整数解 (x, y, z) は、何通りあるか。
 (2) $x+y+z=4$ の自然数解 (x, y, z) は、何通りあるか。
 (3) $x+y \leq 4$ の負でない整数解 (x, y) は、何通りあるか。

(1) ○ 4個と 2本の仕切棒を並べる同じものを含み順列と考える。

○○○○||

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ 通り}$$



(2) ○ は 9×6 から、○ を x, y, z に 1つずつわかし

残り ○ 1個と 2本の仕切棒を並べる順列と考える。

○○○○||
 $\swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad y \quad z$

○ ||

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{ 通り}$$

Point

重複組合せといわれる問題

助問 3 の考えにもちこめ!!

ジヤパンとスネ夫のいたで 4個のみかんをわけると
 考えよう!

(3) と考える前に (1) を全部書き上げてみると

(x, y, z)	$x+y+z$
(4, 0, 0)	$x+y+z=4$
(3, 1, 0)	$x+y+z=4$
(2, 0, 1)	$x+y+z=3$
(2, 2, 0)	$x+y+z=4$
(2, 1, 1)	$x+y+z=3$
(2, 0, 2)	$x+y+z=2$
(1, 3, 0)	$x+y+z=4$
(1, 2, 1)	$x+y+z=3$
(1, 1, 2)	$x+y+z=2$
(1, 0, 3)	$x+y+z=1$
(0, 4, 0)	$x+y+z=4$
(0, 3, 1)	$x+y+z=3$
(0, 2, 2)	$x+y+z=2$
(0, 1, 3)	$x+y+z=1$
(0, 0, 4)	$x+y+z=0$

$x+y \leq 4$

つまり 「 x と y が 4個のみかんをわけようとしたとき、腐っているものは「ゴミ箱」にすてた」と考えればよい。

(3) として、 $x+y \leq 4$ に $z \geq 0$ を加えて

$x+y+z=4$ になると考えればよい。

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ だから

(1) と同様 15通り

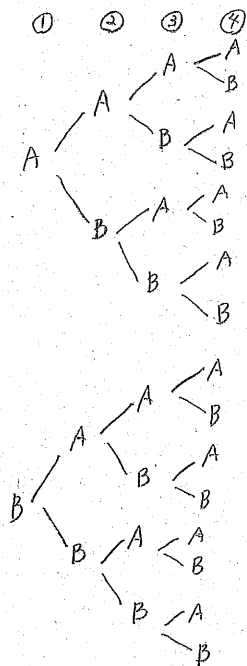
助問 5

4 個のボールを 2 個の箱に分配する。1 個のボールも入らない箱があってもよいものとするとき、何通りあるか。

(1) ボールも箱も区別する。

(2) ボールは区別するが、箱は区別しない。

(1) ボール ① ② ③ ④ 箱 A, B



A	B
①②③④	
①②③	④
①②④	③
①②	③④
①③④	②
①③	②④
①④	②③
①	②③④
②③④	①
②③	①④
②④	①③
②	①③④
③④	①②
③	①②④
④	①②③
	①②③④

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$= 16_T$$

(2) ボール ① ② ③ ④ 箱の区別をなくす

$\times 2!$

①②③④	
①②③	④
①②④	③
①②	③④
①③④	②
①③	②④
①④	②③
①	②③④
②③④	①
②③	①④
②④	①③
②	①③④
③④	①②
③	①②④
④	①②③
	①②③④

$\times 2!$

$$2 \times 2! = 2^4$$

$$2 = \frac{2^4}{2!} = \frac{2^4}{2} = 2^3$$

助問 6

4個のボールを2個の箱に分配する。1個のボールも入らない箱があってもよいものとするとき、何通りあるか。

(1) ボールは区別しないが、箱は区別する。

(2) ボールも箱も区別しない。

(1) ボール 0000 箱 A, B

箱 A に x 個, 箱 B に y 個 入るとすると

$$x + y = 4 \quad x \geq 0, y \geq 0$$

○ 4個と1本の仕切棒を並べる同じものを含む順列

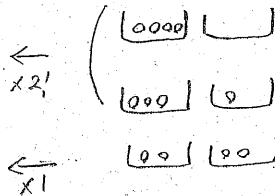
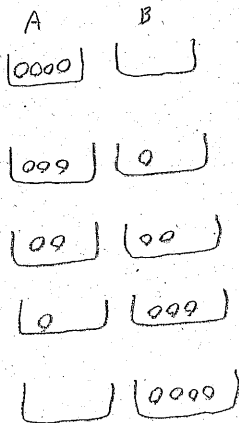
と考える

0000 |

$$\frac{5!}{4!} = 5_T$$

(2) 箱に区別をつけて考える (1) の問題!!
書き上げてみると。

区別をはずすと



	(1)	(2)
タイプ I (0, 4)	4	$\xleftarrow{\times 2!} 2$

タイプ II (0, 0)	1	$\xleftarrow{\times 1} 1$
---------------	---	---------------------------

計 5

$$\therefore 2 + 1 = 3_T$$

助問 7

6個のボールを3個の箱に分配する。ただし、1個のボールも入らない箱があってもよいものとする。それぞれ何通りあるか。

- (1) ボールも箱も区別する。
- (2) ボールは区別しないが、箱は区別する。
- (3) ボールは区別するが、箱は区別しない。
- (4) ボールも箱も区別しない。

(1) ボール ①②③④⑤⑥, 箱 A, B, C

6個のボールそれぞれについて 箱 A, B, C への

3通りの入れ方があるから、求める入れ方の総数は

$$3^6 = 729_T$$

(2) ボール 000000, 箱 A, B, C

6個のボールと、2個の仕切り棒の並べ方だから

$$000000||$$

$$\frac{8!}{6!2!} = 28_T$$

(3) ボール ①②③④⑤⑥, 箱 □□□

$$\begin{array}{l} 917^\circ \text{I} (1, 2, 3 \sim 6) \\ 917^\circ \text{II} (\text{空}, 1, 2 \sim 6) \\ 917^\circ \text{III} (\text{空}, \text{空}, 1 \sim 6) \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{u)} \\ \text{v)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3^6 - 3_T \leftarrow \frac{3^6 - 3}{3!} \\ 3_T \leftarrow 1_T \end{array}$$

計 3^6_T

空の箱が1つもない 917°I と 917°II , 1つある 917°III とする

917°III の場合 (3) の条件で 1通り

(1) の条件のもとでは 3通り

917°I と 917°II の場合 (1) の条件のもとでは $3^6 - 3$ 通り

(3) の条件のもとでは $\frac{3^6 - 3}{3!}$ 通り

$$\therefore \frac{3^6 - 3}{3!} + 1 = 122_T$$

(4) ボール 000000, 箱 □□□

(2) から箱の区別を取ればよい!!
助問 6 (2)

$$\begin{array}{l} 917^\circ \text{I} (1, 2, 3) \\ 917^\circ \text{II} (1, 1, 4) \\ 917^\circ \text{III} (2, 2, 2) \end{array} \begin{array}{l} \text{u)} \\ \text{v)} \end{array} \left. \begin{array}{l} 18_T \leftarrow \frac{18}{3!} = 3_T \\ 9_T \leftarrow \frac{9}{3!} = 3_T \\ 1_T \leftarrow \frac{1}{3!} = 1_T \end{array} \right\}$$

計 28_T

個数が同じ箱がないものを 917°I

2つの箱が同じ個数のものを 917°II

すべて同じ個数のものを 917°III

とする。

917°III は (4) のもとでは 1_T , (2) のもとでは 1_T

917°II は (4) のもとでは

$$(0, 0, 6), (1, 1, 4), (2, 2, 2), (3, 3, 0) \text{ の } 3_T, (2) \text{ のもとでは } 3 \times 3 = 9_T$$

917°I は (2) のもとでは $28 - (1 + 9) = 18_T$,

$$(4) \text{ のもとでは } \frac{18}{3!} = 3_T$$

$$\therefore 1 + 3 + 3 = 7_T$$

Point

(4) はもちろん書き上げた方がかんたん!!

$$(6, 0, 0), (5, 1, 0), (4, 2, 0), (4, 1, 1), (3, 3, 0), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$$

の 9_T

しかしこれでは 6個になったときに困るので区別をつけるついでに考えて見た!!

ボス問①

n を正の整数とし、 n 個のボールを3つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、1個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる4つの場合について、それぞれ異なる入れ方の総数を求めたい。

- (1) 1から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A、B、Cと区別された3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、A、B、Cと区別された3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (3) 1から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (4) n が6の倍数 $6m$ であるとき、 n 個の互いに区別のつかないボールを、区別のつかない3つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

[東京大学'96]

- (1) ボール①②...⑥, 箱A, B, C
 n 個のボールそれぞれについて、箱A, B, Cへの3通りの入れ方があるから、求める入れ方の総数は

$$3^n$$

- (2) ボール○○...○, 箱A, B, C
 n 個のボールと、2個の仕切り棒の並べ方から

$$○○ \cdots ○ ||$$

$$\frac{(n+2)!}{n!2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad \text{通り}$$

- (3) ボール①②...⑥, 箱□, □, □ (1)から箱の区別をとりましょう!!
- | | | | |
|------------------|-----|-----|---|
| タイプⅠ (1, 2, 3~n) | (1) | (2) | $3^n - 3 \leftarrow \frac{3^n - 3}{3!} \quad \text{通り}$ |
| タイプⅡ (空, 1, 2~n) | | | |
| タイプⅢ (空, 空, 1~n) | | | |
- タイプⅢ: $3 \leftarrow \frac{3}{3!} \quad 1 \text{通り}$
- 計: 3^n

空の箱が1つもないタイプⅠ, 1つあるタイプⅡ, 2つあるタイプⅢとする

タイプⅢの場合 (3)の条件では1通り

(1)の条件のもとでは3通り

タイプⅠⅡの場合 (1)の条件のもとでは $3^n - 3$ 通り

(3)の条件のもとでは $\frac{3^n - 3}{3!}$ 通り

$$\therefore \frac{3^n - 3}{3!} + 1 = \frac{3^n + 3}{6} \quad (\text{通り})$$

- (4) ボール○○...○, 箱A, B, C (2)から箱の区別をとりましょう!!

タイプⅠ (1, 2, 6m-3)	(2)	(4)
タイプⅡ (1, 1, 6m-2)	$18m^2 \leftarrow \frac{18m^2}{3!} \quad \text{通り}$	$\frac{18m^2}{3!} \quad \text{通り}$
タイプⅢ (2m, 2m, 2m)	$1 \leftarrow \frac{1}{3!} \quad 1 \text{通り}$	1通り

計: $18m^2 + 9m + 1$

(2)の n に $6m$ を代入して

$$\frac{(6m+2)(6m+1)}{2} = 18m^2 + 9m + 1$$

個数が同じ箱がないものをタイプⅠ

2つの箱が同じ個数のものをタイプⅡ

すべて同じ個数のものをタイプⅢ

とする。

タイプⅢは (4)の条件のもとでは $(2m, 2m, 2m)$ の1通り

(2)の条件のもとでは 1通り

タイプⅡは (4)の条件のもとでは

$(0, 0, 6m), (1, 1, 6m-2), \dots, (2m, 2m, 2m), \dots, (3m, 3m, 0)$
 の $3m$ 通り

(2)の条件のもとでは $3 \times 3m = 9m$ 通り

タイプⅠは (2)の条件のもとでは

$$18m^2 + 9m + 1 - (9m + 1) = 18m^2 \text{ 通り}$$

(4)の条件のもとでは $\frac{18m^2}{3!} = 3m^2$ 通り

よって求める場合の数は $\frac{3m^2 + 3m + 1}{1}$ (通り)

Point

・ (組に区別なく分ける) $\times$ (組に区別をつける)

$$= (\text{区別のある組に分ける})$$

をしっかりと覚えよう!!

・ (3)は漸化式をつかった別解

(4)も領域に含まれる格子点の数を上げ"の別解があるが、ここでは割愛する。

練習1

- (1) 5人をA, Bの2組に分ける。各組には少なくとも1人は含まれる組合せは何通りあるか。
 (2) 5人を2組に分ける。各組には少なくとも1人は含まれる組合せは何通りあるか。
 (3) 3人に異なる5個の球を1人1個以上配る方法は何通りあるか。

- (1) 5人をもれもれ2通りに分ける分けるがあり、
 AまたはBだけに集まるのを除く

$$2^5 - 2 = 30 \text{ (通り)}$$

Point

全員がAまたはBに集まる場合の2通りを
 除くこと!!

- (2) 区別をつける 区別をなくす
 (1)より

$$30 \times \leftarrow \times 2!$$

$$\therefore 30 \times 2! = 60$$

$$30 = \frac{30}{2!}$$

$$= 15 \text{ (通り)}$$

- (3) 球をもらえない人がいてもよいとする 3^5

このうち1人に集中するものが 3

$$2人に集中するものが $3C_2 \times (2^2 - 2)$$$

どっち

5を2人に分けて

5を1人に配る2つをひく!

$$\text{よって } 3^5 - 3 - 3C_2(2^2 - 2)$$

$$= 150 \text{ (通り)}$$

練習2

12人の生徒を次のような3組に分ける方法は何通りあるか。

- (1) 6人, 4人, 2人の3組
- (2) 4人ずつの3組
- (3) 5人, 5人, 2人の3組
- (4) どの組にも1人以上いる3組

[頻出問題]

- (1) 組に区別をつけて12人をA組6人, B組4人, C組2人に分ける方法は何通りあるか。

$${}_{12}C_6 \times {}_6C_4 \times {}_2C_2 = 13860 \text{ (通り)}$$

A組, B組, C組の組の区別をなくしても人数が3組とも異なるから, (6人組, 4人組, 2人組)の区別がつかないので, 13860 (通り)

- (2) 組に区別をつけて12人をA組4人, B組4人, C組4人に分ける方法は何通りあるか。

$${}_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 = 34650 \text{ (通り)}$$

A組, B組, C組の組の区別をなくすと, 人数が3組とも同数だから, 人数では3組の区別がつかなくなるので

$$2! \times 3! = 34650$$

$$\therefore 2! = \frac{34650}{3!}$$

$$= 5775 \text{ (通り)}$$

- (3) 組に区別をつけて12人をA組5人, B組5人, C組2人に分ける方法は何通りあるか。

$${}_{12}C_5 \times {}_7C_5 \times {}_2C_2 = 16632 \text{ (通り)}$$

A組, B組, C組の組の区別をなくすと, 人数は2組は5人で同数だからこの2つの組の区別はつかないから, 残りの1組は2人でこの組は他の2組と区別がつかうから

$$2! \times 2! = 16632$$

$$\therefore 2! = \frac{16632}{2!}$$

$$= 8316 \text{ (通り)}$$

- (4) A, B, Cの3組に12人を分ける方法は何通りあるか。

$$\begin{array}{l} \text{区別なし} \\ (1, 2, 3 \sim 12) \quad 3^{12} - 3 - 3C_2(2^{12}-2) \leftarrow \frac{3^{12}-3-3C_2(2^{12}-2)}{3!} \\ \text{区別なし} \\ (\text{空}, 1, 2 \sim 12) \quad 3C_2(2^{12}-2) \\ (\text{空}, \text{空}, 1 \sim 12) \quad 3! \\ \hline 3^{12} \end{array}$$

0人の組があってもよい分け方は 3^{12} (通り)

1組だけ0人になる分け方は $3C_2(2^{12}-2)$ (通り)

0人になる2組

12人を2組に分けて全員が片方に入った2つの組

2組だけ0人になる分け方は 3 通り

よって, 1人以上いるA, B, Cの3組に12人を分ける方法は

$$3^{12} - 3 - 3C_2(2^{12}-2) = 519156 \text{ (通り)}$$

であるから, 12人を単に1人以上いる3組に分ける方法は

$$2! \times 3! = 519156$$

$$\therefore 2! = \frac{519156}{3!}$$

$$= 86526 \text{ (通り)}$$

ボス問 1 の練習

n を正の整数とし、 n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、どの箱も少なくとも 1 個のボールは入るものとする。以下に述べる 4 つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

- (1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、A, B, C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
- (4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき、 n 個の互いに区別のつかないボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

(1) ボール ①, ②, ..., ⑤, 箱 A, B, C

$$\begin{array}{ll} (1, 2, 3 \sim n) & 3^n - 3C_2(2^n - 2) - 3 \\ (\text{空}, 1, 2 \sim n) & 3C_2(2^n - 2) \\ (\text{空}, \text{空}, 1 \sim n) & 3 \\ \hline \text{計 } & 3^n \end{array}$$

0 の組があってもよい分け方は 3^n (通り)

1 組だけ 0 になる分け方は $3C_2(2^n - 2)$ (通り)

2 組だけ 0 になる分け方は 3 (通り)

よって、求める場合の数は

$$3^n - 3C_2(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad (\text{通り}) //$$

(2) ボール $\underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ 個}}$ 箱 A, B, C

0 は 7 文字から 0 を 10 文字 A, B, C の 3 つの箱に入れて、

残り 0 $n-3$ と 2 本の仕切り棒を並べる順列と考えると

$n \geq 3$ のとき

$$\underbrace{00 \dots 0}_{n-3} \parallel \parallel \quad \frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \quad (n=1, 2 \text{ のときは } 0)$$

(3) ボール ①, ②, ..., ⑤, 箱 $\underbrace{\square \square \square}_{(1) \text{ から箱の区別も不要!!}}$

$$(1, 2, 3 \sim n) \quad 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad \leftarrow \times 3!$$

$$x \times 3! = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

$$\therefore x = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{6}$$

$$= \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} //$$

(4) ボール $\underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ 個}}$ 箱 $\square, \square, \square$

(2) から箱の区別も不要!!

$$\begin{array}{ll} \text{タイプ I } (1, 2, 3, 6m-3) & \frac{18m^2 - 18m + 6}{3!} \leftarrow \frac{18m^2 - 18m + 6}{3!} \\ \text{タイプ II } (1, 1, 6m-2) & \frac{3(3m-2)}{3!} \leftarrow 3m-2 \\ \text{タイプ III } (2m, 2m, 2m) & \frac{1}{1!} \leftarrow 1 \end{array}$$

$$\text{計 } 18m^2 - 9m + 1 //$$

(2) の m に $6m$ を代入して

$$\frac{1}{2}(6m-1)(6m-2) = 18m^2 - 9m + 1 //$$

個数が同じ箱がないものをタイプ I

2 つの箱が同じ個数のものをタイプ II

すべて同じ個数のものをタイプ III

とする。

タイプ III は (4) の条件のもとでは $(2m, 2m, 2m)$ のみ通り

(2) の条件のもとでも 1 通り

タイプ II は (4) の条件のもとでは

$$(1, 1, 6m-2), (2, 2, 6m-4), \dots, (2m, 2m, 2m), \dots, (3m-1, 3m-1, 2)$$

の $3m-2$ 通り

(2) の条件のもとでは

$$3 \times (3m-2) = 3(3m-2) \text{ 通り}$$

タイプ I は (2) の条件のもとでは

$$18m^2 - 9m + 1 - (3(3m-2) + 1) = 18m^2 - 18m + 6 \text{ 通り}$$

$$(4) \text{ の条件のもとでは } \frac{18m^2 - 18m + 6}{3!} = 3m^2 - 3m + 1 \text{ (通り)}$$

よって、求める場合の数は

$$(3m^2 - 3m + 1) + (3m-2) + 1 = 3m^2 \text{ (通り)} //$$