

生徒のための復習・自学教材

【場合の数編】

区別をつける・つけない②

助問 1

- (I) 正 9 角形の 3 つの頂点でできる ${}_9C_3 (=84)$ 個の三角形のうち
次のような三角形は何個あるか。
- (1) 正 9 角形と辺を共有しない三角形
 - (2) 鈍角三角形
- (II) n を自然数とする。正 $2n+1$ 角形の 3 つの頂点でできる鈍角三角形は何個あるか。

[慶応大学・改'07]

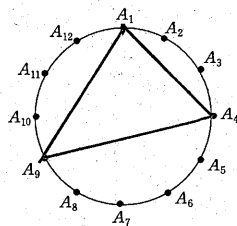
助問 2

右図のように円周を 12 等分する点

$A_1, A_2, \dots, A_{12}$ が与えられている。

これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。

たとえば, A_1, A_4, A_9 を選べば, 図のような三角形がえられる。



このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (4) 3 点を選んでえられる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

[九州大学'98]

ボス問 1

n を自然数とする。正 $6n$ 角形の異なる 3 頂点を結んで三角形を作る。このとき, 次の三角形は何個できるか。

- (1) 正三角形
- (2) 直角三角形
- (3) 二等辺三角形
- (4) 鈍角三角形

[会津大学'97]

ボス問 2

円周上に, 等間隔に $6n$ 個 (n は自然数) の点がある。これらの点から異なる点を選んで三角形をつくる。適当な回転や裏返しによって重なる合同な三角形を 1 つと数えるとき,

- (1) 二等辺三角形は何個できるか。
- (2) 三角形は全部で何個できるか。

練習 1

正 n 角形の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 5$) とする。

- (1) これらのうちの任意の 3 点を結んでできる三角形の総数を求めよ。
- (2) (1) の三角形のうちで, 元の正 n 角形と辺を共有しない三角形の総数を求めよ。
- (3) (1) の三角形のうちで, 鋭角三角形になるものの総数を求めよ。

[頻出問題]

助問 1

- (I) 正9角形の3つの頂点でできる ${}_9C_3 (=84)$ 個の三角形のうち
次のような三角形は何個あるか。
(1) 正9角形と辺を共有しない三角形
(2) 鈍角三角形
(II) n を自然数とする。正 $2n+1$ 角形の3つの頂点でできる鈍角三角形は何個あるか。

[慶応大学・改'07]

(I)

- (1) 正9角形の各頂点を右図の
ように、 $A_1, A_2, \dots, A_9$ とする。

元の正9角形と2辺を共有する
三角形は、その2辺の交点である
頂点の選べ方だけあるから9。

また、元の正9角形と1辺を共有
する三角形は、その共有する1辺の選べ方が9通りあり、
その各々の選べ方に対して残りの頂点の選べ方は5通りずつ
あるから $9 \times 5 = 45$ 。

よって、求める三角形の総数は

$$84 - (9 + 45) = 30 \quad //$$

- (2) $\angle A_1$ が鈍角となる残りの2頂点の
定め方は

$$\begin{aligned} (A_2, A_7 \sim A_9) & \quad 3\text{通り} \\ (A_3, A_8 \sim A_9) & \quad 2\text{通り} \\ (A_4, A_9) & \quad 1\text{通り} \end{aligned}$$

であり全部で

$$3 + 2 + 1 = 6 \text{通りある。}$$

鈍角となる頂点の定め方は9通りあるので

$$\text{求める個数は } 6 \times 9 = 54 \quad //$$

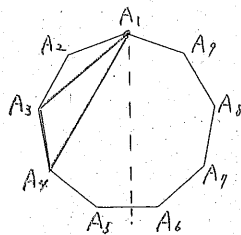
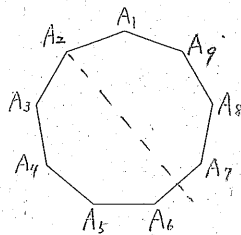
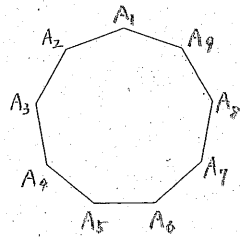
(別解)

最長辺が A_1A_i ($i=3, 4, 5$)
とする鈍角三角形は

$${}_4C_2 = 6 \text{通り}$$

最長辺は $A_2A_i, A_3A_i, \dots, A_{i-1}A_i$
もあるので9。

$$\therefore 6 \times 9 = 54 \quad //$$



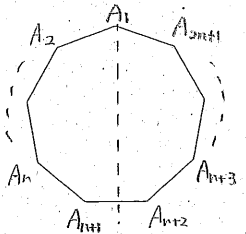
(II) 正 $2n+1$ 角形の各頂点を右図の

ように、 $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ とする
最長辺が A_1A_i ($i=3, 4, \dots, n+1$)
とする鈍角三角形は

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{通り}$$

最長辺は $A_2A_i, A_3A_i, \dots, A_{2n+1}A_i$
もあるので $2n+1$ 。

$$\therefore \frac{n(n-1)}{2} \times (2n+1) = \frac{n(n-1)(2n+1)}{2} \quad //$$



Point

(2)の別解にならぬように(II)のように $2n+1$ 角形、
なっても使いやすい!

ちなみに(II)を(I)の(2)の本解のように解いてみると

$\angle A_1$ が鈍角となる残りの2頂点の定め方は

$$\begin{aligned} (A_2, A_{n+3} \sim A_{2n+1}) & \quad n-1\text{通り} \\ (A_3, A_{n+4} \sim A_{2n+1}) & \quad n-2\text{通り} \\ \dots & \quad \dots \\ (A_n, A_{2n+1}) & \quad 1\text{通り} \end{aligned}$$

であり全部で

$$\begin{aligned} & (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ &= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \text{通りある。} \end{aligned}$$

鈍角となる頂点の定め方は $2n+1$ 通りあるので

$$\text{求める個数は } \frac{(n-1)n}{2} \times (2n+1) = \frac{n(n-1)(2n+1)}{2} \quad //$$

図は上の図を
数え方は左の本解を
参考に!!

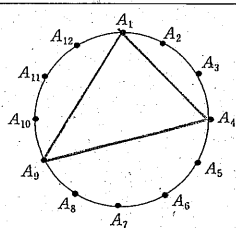
この求め方は
2年生バカッ
数B, 数列
等差数列の和
 $\frac{(\text{項数}) \times (\text{初項} + \text{末項})}{2}$

Point

もれなく、7"7"りなく!!

助問②

右図のように円周を12等分する点 $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ が与えられている。これらの中から相異なる3点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば、 A_1, A_4, A_9 を選べば、図のような三角形がえられる。



このとき、次の問に答えよ。

- (1) 正三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (4) 3点を選んでえられる三角形のうち、互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

[九州大学'98]

(1) $A_1 \sim A_{12}$ を右図のように順に

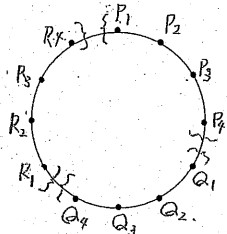
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}, \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ とおきなおす。

すると正三角形は

3点 $\{P_i, Q_i, R_i\}$ ($i=1, 2, 3, 4$)

12通りで作られる。

よって、4コ



(2) $A_1 \sim A_{12}$ を右図のように順に

$\{P_1, P_2, \dots, P_6\}, \{Q_1, Q_2, \dots, Q_6\}$ とおきなおす

P_i を頂角とすると、底辺をつくる

2点の定め方は

正三角形からできる場合を除くと

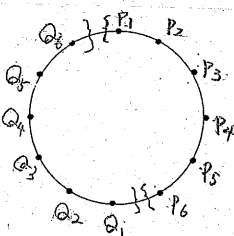
$\{P_2, Q_6\}, \{P_3, Q_5\}, \{P_4, Q_4\}$

$\{P_5, Q_3\}, \{P_6, Q_2\}$ の4通りあり、

頂角は $P_2, P_3, \dots, P_6, Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ もなり得るので12通り

(したがって (1) の結果と考慮して

$4 \times 12 + 4 = 52$ コ



(3) $A_1 \sim A_{12}$ を右図のように順に

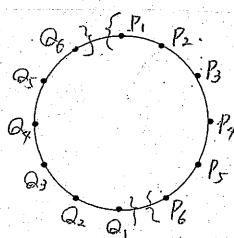
$\{P_1, P_2, \dots, P_6\}, \{Q_1, Q_2, \dots, Q_6\}$ とおきなおす

すると直径は $\{P_i, Q_i\}$ ($i=1, 2, \dots, 6$)

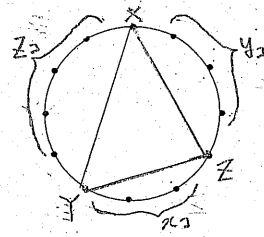
12通りで作られるから6通りあり、

各直径に対して直角三角形は

10コでできるから $6 \times 10 = 60$ コ



(4) 12個の $A_1 \sim A_{12}$ から3点 X, Y, Z を選んで三角形をつくる。このとき、各弧 $\widehat{YZ}, \widehat{ZX}, \widehat{XY}$ の中間の点の数をそれぞれ x, y, z とする。 x, y, z は負でない整数で、



$$x + y + z = 9$$

いま $x \leq y \leq z$ として数の組 (x, y, z) を考えよ

互いに合同でない三角形の個数は、この数の組の個数に等しい。

組の数は $(0, 0, 9), (0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5)$

$(1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4)$

$(2, 2, 5), (2, 3, 4)$

$(3, 3, 3)$

の以上 12コ

別解

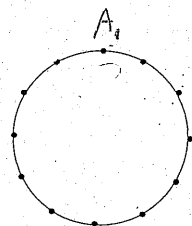
1つの点が A_1 と固定して

考えると、残りの2つの選り

方は ${}_{11}C_2 = 55$ 通りあり

この中で合同でないものを

数える。



9170 I (二等辺三角形でない三角形)

区別あり

42

区別なし

$\frac{42}{6}$

$\frac{42}{6} = 7$ コ

9170 II (二等辺三角形 (正三角形除く))

12コ

$\frac{12}{3}$

4コ

9170 III (正三角形)

1コ

$\frac{1}{1}$

1コ

計 55コ

9170 II の正三角形は区別なしの6コで1コ、区別ありで6コ

9170 II は区別なしでは2コあり4コ、区別ありでは $4 \times 3 = 12$ コ

9170 III は区別ありでは $55 - (12 + 1) = 42$ コだから

$$\text{区別なしでは } \frac{42}{6} = 7$$

したがって、互いに合同でないものは

$$7 + 4 + 1 = 12 \text{ コ}$$

Point

(4) 本解は三角形の形状を選んだ頂点間の弧の個数に着目して区別した。

別解は別冊子「区別をつける、つけない①」のボス間で

学んだこと (区別なく分ける) $\times$ (区別をつける)

$=$ (区別をつけて分ける)

を使った! これだと6角形になっても同様にやりやすい!!

ボス問 ①

n を自然数とする。正 $6n$ 角形の異なる 3 頂点を結んで三角形を作る。このとき、次の三角形は何個できるか。

- (1) 正三角形
- (2) 直角三角形
- (3) 二等辺三角形
- (4) 鈍角三角形

[会津大学'97]

(1) 正 $6n$ 角形の頂点を右図のように順に

$\{P_1, \dots, P_{3n}\}, \{Q_1, \dots, Q_{3n}\}, \{R_1, \dots, R_{3n}\}$

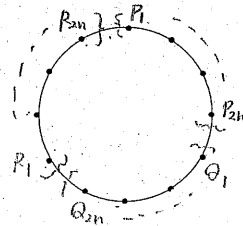
とかく。

すると正三角形は

3 点 $\{P_i, Q_i, R_i\} (i=1, 2, \dots, 3n)$

によって作られる。

よって、 $2n$ コ



(2) 正 $6n$ 角形の頂点を右図のように順に

$\{P_1, \dots, P_{3n}\}, \{Q_1, \dots, Q_{3n}\}$

とかく。

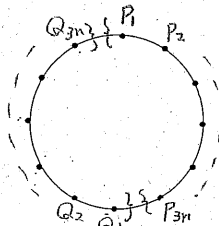
すると直径は $\{P_i, Q_i\} (i=1, 2, \dots, 3n)$

によって作られるから $3n$ 通りあり

各直径に対して直角三角形は

$6n-2$ コ できるので

$$3n \times (6n-2) = \underline{6n(3n-1)} \text{ コ}$$



(3) (2) の図で P_1 を頂角としたとき、

底辺をつくる 2 点の定め方は

正三角形が成り立つ場合を除くと

$\{P_2, Q_{3n}\}, \{P_3, Q_{3n-1}\}, \dots, \{P_{3n-1}, Q_{n+1}\}, \dots, \{P_{3n}, Q_2\}$

の $3n-2$ 通りあり。頂角は $P_2, P_3, \dots, P_{3n}, Q_1, \dots, Q_{3n}$

もなり得るので $6n$ 通り

したがって (1) の結果も考慮して

$$6n \times (3n-2) + 2n$$

$$= 18n^2 - 10n$$

$$= \underline{2n(9n-5)} \text{ コ}$$

Point

(1)(2)(3) は 助問 ② の (1)(2)(3) と同様であるように n が入ったときはまず「具体的な数値で考えてみる!」という実験が大切ですよ!

(4) 正 $6n$ 角形の各頂点を右図

のように、 $A_1, A_2, \dots, A_{6n}$ とする。

最長辺が $A_i A_{i+3n} (i=3, 4, \dots, 3n)$

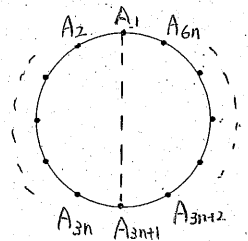
とする鈍角三角形は

$$3n-1 \text{ C } 2 = \frac{(3n-1)(3n-2)}{2} \text{ コ あり}$$

最長辺は $A_2 A_i, A_3 A_i, \dots, A_{6n} A_i$

もあつて $6n-1$

$$\therefore \frac{(3n-1)(3n-2)}{2} \times 6n = \underline{3n(3n-1)(3n-2)} \text{ コ}$$



Point

(4) は 助問 ② の (I) (2) の別解, (II) の解のように

考えた方がやりやすい!!

鈍角となる場合を考慮して面倒くない

ボス問②

円周上に、等間隔に $6n$ 個 (n は自然数) の点がある。これらの点から異なる点を選んで三角形をつくる。適当な回転や裏返しによって重なる合同な三角形を 1 つと数えるとき、

- (1) 二等辺三角形は何個できるか。
- (2) 三角形は全部で何個できるか。

(1) 右図のように $6n$ 個の点を

$\{P_1, P_2, \dots, P_{3n}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{3n}\}$

と表す。

お*回転しても同じなので

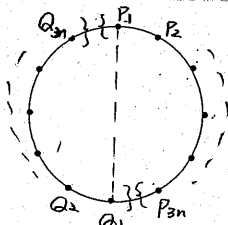
P_1 を固定して

P_1 を頂角とすると、底辺をつくる

2点の選び方は $\{P_2, Q_{3n}\}, \{P_3, Q_{3n-1}\}, \dots, \{P_{3n}, Q_2\}$

の $3n-1$ 通りで、これらは互いに合同ではない。

したがって求める二等辺三角形の個数は $\underline{3n-1}$ 。



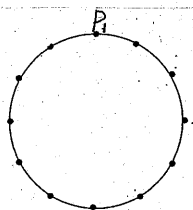
(2) 1つの点が P_1 と固定して

考えると、残りの2つの選び方は

$${}_{6n-1}C_2 = \frac{(6n-1)(6n-2)}{2} = (6n-1)(3n-1)$$

通りあり、この中で合同でないものを

数える。



タイプⅠ (二等辺三角形でない三角形) $\frac{18n^2-18n+6}{6} \leftarrow \frac{18n^2-18n+6}{6}$

タイプⅡ (二等辺三角形 (正三角形除く)) $9n-6 \leftarrow \frac{9n-6}{3} \quad 3n-2$

タイプⅢ (正三角形) $1 \leftarrow \frac{1}{1} \quad 1$

$$\text{計 } (6n-1)(3n-1) = (18n^2-9n+1)$$

タイプⅢの正三角形は区別なしのもので 1, 区別ありでも 1

タイプⅡは区別なしでは (3n-1)-1 = 3n-2

区別ありでは (3n-2) × 3 = 9n-6

タイプⅠは区別ありでは $(18n^2-9n+1) - (9n-6+1) = 18n^2-18n+6$

$$\text{だから区別なしでは } \frac{18n^2-18n+6}{6} = 3n^2-3n+1$$

したがって互いに合同でないものは

$$(3n^2-3n+1) + (3n-2) + 1 = \underline{3n^2}$$

Point

(1) は区別しないので円順列と同じように、1つ固定して考える!!

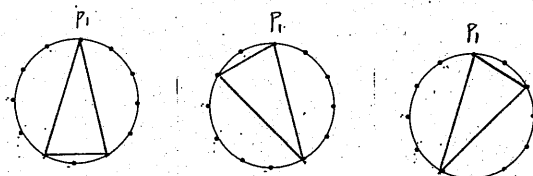
(2) は 助問② の (4) の別解で考えるとわかりやすい!!

考え方は別冊子「区別をつける・つけない①」のボス問で学んだことと同じ!!

《補足》

(2) タイプⅡの二等辺三角形 (正三角形を除く) のところ

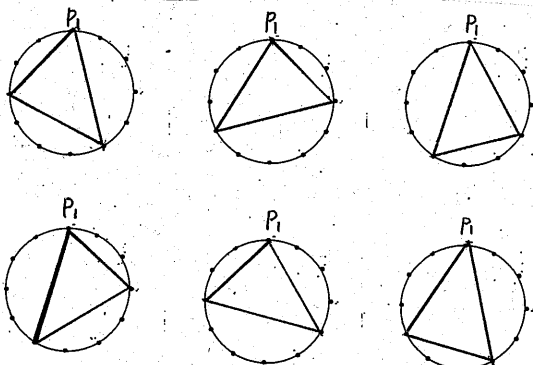
$\leftarrow \times 3$ の意味



図のように合同な二等辺三角形が 3つ重複して数えられている!!

(2) タイプⅠの二等辺三角形でない三角形のところ

$\leftarrow \times 6$ の意味



図のように合同な三角形が 6つ重複して数えられている!!

練習1

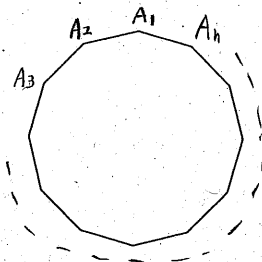
正 n 角形の頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 5$) とする。

- (1) これらのうちの任意の3点を結んでできる三角形の総数を求めよ。
- (2) (1)の三角形のうち、元の正 n 角形と辺を共有しない三角形の総数を求めよ。
- (3) (1)の三角形のうち、鋭角三角形になるものの総数を求めよ。

[頻出問題]

- (1) n 個の異なる頂点から、3個の異なる頂点を選ぶことには三角形が1個できるから

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad \text{コ}$$



- (2) (1)の三角形のうち

- (i) 2辺を共有する三角形

その2辺の交点である頂点の選び方だけがあるから n コ

- (ii) 1辺だけを共有する三角形

その共有する1辺の選び方が n 通りあり、

その各々の選び方に対して残りの頂点の選び方は $n-4$ 通りずつあるから $n(n-4)$ コ

- (i)(ii) より

辺を共有しない三角形の総数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - n - n(n-4) \\ &= \frac{1}{6}n\{(n-1)(n-2) - 6 - 6(n-4)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n^2 - 9n + 20) \\ &= \frac{1}{6}n(n-4)(n-5) \quad \text{コ} \end{aligned}$$

- (3) (i) $n=2m$ (m は3以上の整数) のとき

最長辺が A_1A_i ($i=3, 4, \dots, m+1$)

とする直角または鈍角三角形は

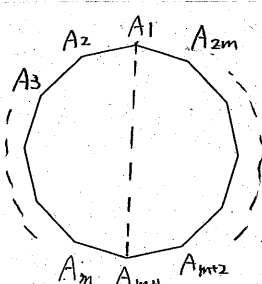
$$\begin{aligned} {}_mC_2 &= \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n}{2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{8}n(n-2) \quad \text{コ} \end{aligned}$$

最長辺は $A_2A_i, A_3A_i, \dots, A_{2m-1}A_i$ (A_nA_i)

とあるので $2m(n)$ 通り

$$\therefore n \times \frac{1}{8}n(n-2) = \frac{1}{8}n^2(n-2) \quad \text{コ}$$

$$\therefore \text{鋭角三角形は } \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{8}n^2(n-2) = \frac{1}{24}n(n-2)(n-4) \quad \text{コ}$$

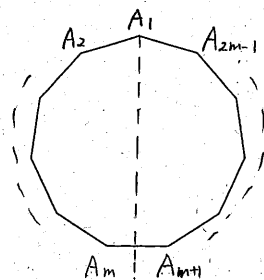


- (ii) $n=2m-1$ (m は3以上の整数) のとき

最長辺が A_1A_i ($i=3, 4, \dots, m$)

とする直角または鈍角三角形は

$$\begin{aligned} {}_{m-1}C_2 &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2} \\ &= \frac{1}{8}(n-1)(n-3) \quad \text{コ} \end{aligned}$$



最長辺は $A_2A_i, A_3A_i, \dots, A_{2m-1}A_i$ (A_nA_i)

とあるので $2m-1(n)$ 通り

$$\therefore n \times \frac{1}{8}(n-1)(n-3) = \frac{1}{8}n(n-1)(n-3) \quad \text{コ}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{鈍角三角形は } & \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{8}n(n-1)(n-3) \\ &= \frac{1}{24}n(n-1)(n+1) \quad \text{コ} \end{aligned}$$

- (i)(ii)より

$$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ が偶数のとき } \frac{1}{24}n(n-2)(n-4) \quad \text{コ} \\ n \text{ が奇数のとき } \frac{1}{24}n(n-1)(n+1) \quad \text{コ} \end{array} \right.$$

Point

「鋭角三角形」の余事象は 鈍角三角形 または

直角三角形 に注意!!

n が偶奇で異なることに注意!!