[三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題1]

i は虚数単位とする。

(1) 方程式 $z^3=8i$ の解で，実部が正である解は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，実部が負である解は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ とする。z^n が実数となる最小の自然数 n は $n={}^{ウ}\boxed{}$ であり，このとき，$z^n={}^{エ}\boxed{}$ である。

(1) $\boxed{\text{解法1}}$

$z=a+bi$ とおくと

$z^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3$

$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

$z^3=8i$ より

$(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i=8i$

$a, b\in\mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} a(a^2-3b^2)=0 & \text{——①} \\ b(3a^2-b^2)=8 & \text{——②} \end{cases}$$

① より

$a=0,\ \pm\sqrt{3}b$

$a\neq 0$ のとき $a=\pm\sqrt{3}b$

(i) $a=\sqrt{3}b$ のとき

② は $b(9b^2-b^2)=8$

$8b^3=8$

$b^3=1$

$b\in\mathbb{R}$ より $b=1$

このとき $a=\sqrt{3}$

よって

$z=\sqrt{3}+i$

(ii) $a=-\sqrt{3}b$ のとき

② は $b(9b^2-b^2)=8$

$8b^3=8$

$b^3=1$

$b\in\mathbb{R}$ より $b=1$

このとき $a=-\sqrt{3}$

よって

$z=-\sqrt{3}+i$

(i), (ii) より

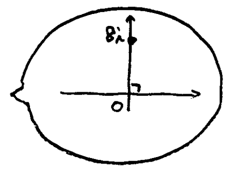
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z)>0 \text{ のとき } z=\sqrt{3}+i \\ \mathrm{Re}(z)<0 \text{ のとき } z=-\sqrt{3}+i \end{cases}$$

$\boxed{\text{解法2}}$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと

$$\begin{cases} z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) \\ 8i=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



$z^3=8i$ より

$$\begin{cases} r^3=8 \\ 3\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad (n=0,1,2) \end{cases}$$

$r>0$ より $r=2$

$\theta=\dfrac{(4n+1)\pi}{6}$ $(n=0,1,2)$

$=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(i) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\sqrt{3}+i$

(ii) $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$z=2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=-\sqrt{3}+i$

(iii) $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$z=2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$=2(-i)$

$=-2i$

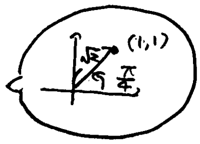
(i)〜(iii) より

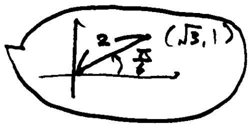
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z)>0 \text{ のとき } z=\sqrt{3}+i \\ \mathrm{Re}(z)<0 \text{ のとき } z=-\sqrt{3}+i \end{cases}$$

(裏に続く)

(2)

$$\begin{cases} 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$





より

$$z = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{n}{12}\pi + i\sin\frac{n}{12}\pi\right)$$

$z^n \in \mathbb{R}$ となるためには

$$\sin\frac{n}{12}\pi = 0$$

となるとよい.

これを満たす $n \in \mathbb{N}$ は

$$\underline{\min n = 12}$$

このとき

$$z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

$$= \frac{1}{64} \times (-1)$$

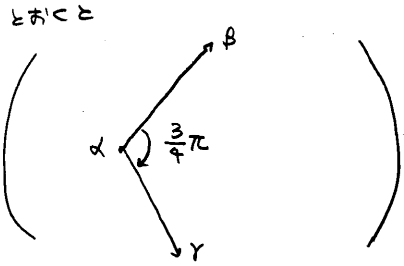
$$= \underline{\underline{-\frac{1}{64}}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題2]

点 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を中心として，点 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を時計回りに $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転させたときの点を表す複素数 γ を求めよ。

$\alpha=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \beta=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

とおくと



$$-\alpha+\gamma=(-\alpha+\beta)\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right).$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$\gamma=\sqrt{3}i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}i^2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=\underline{\underline{\frac{-1+\sqrt{6}}{2}+\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}i}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A1]

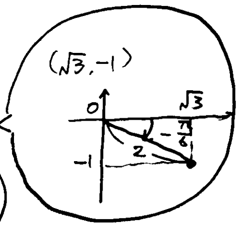
(1) iを虚数単位とする。$z=\sqrt{3}-i$ のとき，$z^9+\dfrac{1}{z^6}=-\dfrac{\boxed{}^{ア}}{\boxed{}_{イ}}+{}^{ウ}\boxed{}\,i$ である。

(2) iを虚数単位とする。$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^8=a+bi$ を満たす実数 a，b を求めよ。

((1) 2017 法政大　(2) 2017 東京都市大)

(1)

$$z=\sqrt{3}-i$$
$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$



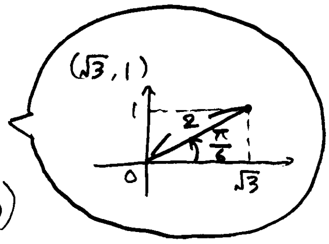
$$z^9=2^9\left(\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$
$$=512\,(i)$$
$$=512i$$
$$z^6=2^6\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)\quad より$$
$$\frac{1}{z^6}=\frac{1}{2^6}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$
$$=\frac{1}{64}(-1)$$
$$=-\frac{1}{64}$$

よって

$$z^9+\frac{1}{z^6}=-\frac{1}{64}+512i$$

(2)

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\quad より$$



$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^8=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\left(\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i$$

$a,\ b\in\mathbb{R}$ より

$$a=-\frac{1}{32},\quad b=\frac{\sqrt{3}}{32}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A2]

0でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1) $-\overline{z}$ (2) $\dfrac{1}{z^2}$ (3) $z-|z|$

(2016 佐賀大)

(1)

$$-\overline{z}=-r(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(-\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\underline{\underline{r\left(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right)}}$$

(2)

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)}$$
$$=\underline{\underline{\frac{1}{r^2}\left(\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\right)}}$$

(3)

$$z-|z|=r(\cos\theta+i\sin\theta)-r$$
$$=r\left\{(\cos\theta-1)+i\sin\theta\right\}$$
$$=r\left\{-2\times\frac{1-\cos\theta}{2}+i\sin\theta\right\}$$
$$=r\left\{-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right\}$$
$$=2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right\}$$
$$=\underline{\underline{2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A3]

複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，$\left|z^3-\dfrac{1}{z^3}\right|$ の最大値は $^{ア}\boxed{}$ である。また，最大値をとるときの z のうち，$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものの偏角は，$\arg z={}^{イ}\boxed{}$ である。

(2017 立教大)

$|z|=1$ より

$z=\cos\theta+i\sin\theta$

とでき

$$z^3-\frac{1}{z^3}=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)-\frac{1}{\cos 3\theta+i\sin 3\theta}$$
$$=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)-(\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta))$$
$$=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)-(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)$$
$$=2i\sin 3\theta$$

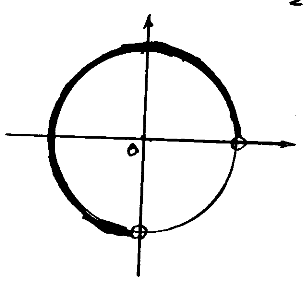
より

$$\left|z^3-\frac{1}{z^3}\right|=|2i\sin 3\theta|$$
$$=2|\sin 3\theta|$$

$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ より

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり

3θ の図!! $\left(0<3\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$



$\sin 3\theta=1$ のとき

$3\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

Max $=2$ $\left(\arg z=\dfrac{\pi}{6}\right)$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A4]

$r>0$ とし，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく。任意の角 θ に対し，複素数平面上で点 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は2以下である。r のとりうる値の範囲を求めよ。 (2002 一橋大)

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

実軸との距離が2以下なので

$$\left|\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\right|\leqq 2$$

$$\left|r-\frac{1}{r}\right||\sin\theta|\leqq 2$$

これが任意の角 θ で成り立つとよい。

$|\sin\theta|\leqq 1$ より

$$\left|r-\frac{1}{r}\right|\leqq 2$$

両辺ともに0以上なので，2乗してよく，

$$r^2-2+\frac{1}{r^2}\leqq 4$$

$$r^4-6r^2+1\leqq 0$$

$$3-2\sqrt{2}\leqq r^2\leqq 3+2\sqrt{2}$$

$r>0$ より

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}\leqq r\leqq\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}\leqq r\leqq\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{2}-1\leqq r\leqq\sqrt{2}+1}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 例題1]

整数 n ($n \geqq 0$) に対して，$\alpha_n = (1+i)^n$ とおく。また，$n \geqq 1$ に対して，$\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ とおく。

(1) β_n の絶対値 $|\beta_n|$ を求めよ。

(2) $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots\cdots + |\beta_n| > 1000$ となる最小の n の値を求めよ。 (2002 日本女子大)

(1)

$$\beta_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$$
$$= (1+i)^n - (1+i)^{n-1}$$
$$= (1+i-1)(1+i)^{n-1}$$
$$= i(1+i)^{n-1}$$

より

$$|\beta_n| = |i|\,|1+i|^{n-1}$$
$$= 1 \times (\sqrt{2})^{n-1}$$
$$= \underline{\underline{(\sqrt{2})^{n-1}}}$$

(2)

$$|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots\cdots + |\beta_n|$$
$$= 1 + \sqrt{2} + \cdots\cdots + (\sqrt{2})^{n-1}$$
$$= \frac{1 \times ((\sqrt{2})^n - 1)}{\sqrt{2} - 1}$$
$$= \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1} > 1000$$
$$(\sqrt{2})^n - 1 > 1000(\sqrt{2} - 1)$$
$$(\sqrt{2})^n > 1000(\sqrt{2} - 1) + 1$$

(ここで
$1.41^2 < 2 < 1.42^2$ より
$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$
$0.41 < \sqrt{2} - 1 < 0.42$
$411 < 1000(\sqrt{2} - 1) + 1 < 421$)

$(\sqrt{2})^n$ は増加関数であり

$n = 16$ のとき $(\sqrt{2})^{16} = 2^8 = 256$

$n = 17$ のとき $(\sqrt{2})^{17} = 256\sqrt{2}$ であり

$360.96 < 256\sqrt{2} < 363.52$

$n = 18$ のとき $(\sqrt{2})^{18} = 512$

よって $\underline{\underline{\min n = 18}}$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B5]

複素数 α，β が $|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{2}$，$|\alpha-\beta|=1$ を満たし，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正であるとする。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8$ を求めよ。

(2) $|\alpha+\beta|$ を求めよ。

(3) n が8で割ると1余る整数のとき，$|\alpha^n+\beta^n|$ を n を用いて表せ。　(2017　佐賀大)

(1) 解法1

$|\alpha-\beta|=1$

の両辺を2乗して

$|\alpha-\beta|^2=1$

$(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=1$

$\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=1$

$|\alpha|^2-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+|\beta|^2=1$

$\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=2$

(ここで

$|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{2}$　より

$|\alpha|^2=1$，$|\beta|^2=2$

$\alpha\bar{\alpha}=1$，$\beta\bar{\beta}=2$

$\bar{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$，$\bar{\beta}=\dfrac{2}{\beta}$)

$\dfrac{2\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=z$　とおくと

$\dfrac{2}{z}+z=2$

$z^2-2z+2=0$

$z=1\pm\sqrt{1-2}$

$z=1\pm i$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=1\pm i$

$\mathrm{Im}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)>0$　より

$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+i$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8=(\sqrt{2})^8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

$=16$

よって　$\underline{\underline{\dfrac{\beta}{\alpha}=1+i\ ,\ \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8=16}}$

(2) 解法1

$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

$=\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}$

$=|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+|\beta|^2$

$=1+2+2$

$=5$

$|\alpha+\beta|\geqq 0$　より

$\underline{\underline{|\alpha+\beta|=\sqrt{5}}}$

(3) 解法1

$|\alpha^n+\beta^n|=\dfrac{|\alpha^n+\beta^n|}{|\alpha|^n}$

$=\left|1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|$

ここで

$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+i$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$n=8k+1$　$(k\in\mathbb{Z})$　のとき

$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{8k+1}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{8k}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2})^{8k}(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$

$=(\sqrt{2})^{8k+1}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=(\sqrt{2})^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=(\sqrt{2})^{n-1}(1+i)$

よって

$|\alpha^n+\beta^n|=\left|1+(\sqrt{2})^{n-1}+(\sqrt{2})^{n-1}i\right|$

$=\sqrt{(1+(\sqrt{2})^{n-1})^2+((\sqrt{2})^{n-1})^2}$

$=\underline{\underline{\sqrt{2^n+2(\sqrt{2})^{n-1}+1}}}$

(裏に続く)

(1) $\boxed{解法2}$ （$\frac{\beta}{\alpha}$の求め方）

$$\frac{\beta}{\alpha}=x+yi \quad (x, y\in\mathbb{R})$$

とおくと

$$|\alpha-\beta|=1$$

の両辺を$|\alpha|$で割って

$$\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$$

$$|1-(x+yi)|=1$$

$$|(1-x)-yi|=1$$

よって $(1-x)^2+y^2=1$ ——①

また

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{2} \quad より$$

$$x^2+y^2=2. \text{ ——②}$$

①,②を $y>0$ のもとで解くと

$$x=1, \quad y=1$$

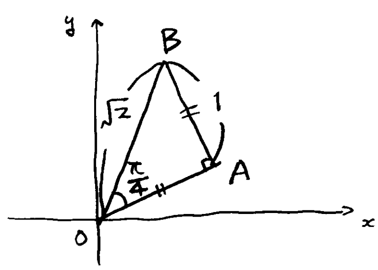
よって $\frac{\beta}{\alpha}=1+i$

$\boxed{解法3}$

$A(\alpha)$, $B(\beta)$ とすると

$|\alpha|=1$, $|\beta|=\sqrt{2}$, $|\alpha-\beta|=1$ より

$OA=1$, $OB=\sqrt{2}$, $BA=1$



つまり $\triangle OAB$ は $\angle OAB=\frac{\pi}{2}$ なる

直角二等辺三角形であり

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta-0}{\alpha-0}$ の虚部が正より

点Bは点Aを原点まわりに$\frac{\pi}{4}$だけ回転し，原点からの距離を$\sqrt{2}$倍した点である.

よって

$$\beta=\alpha\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

つまり

$$\frac{\beta}{\alpha}=1+i$$

(2) $\boxed{解法2}$

$\frac{\beta}{\alpha}=1+i$ より $\beta=(1+i)\alpha$

$$|\alpha+\beta|=|\alpha+(1+i)\alpha|$$
$$=|(2+i)\alpha|$$
$$=|2+i||\alpha|$$
$$=\sqrt{5}$$

(3) $\boxed{解法2}$

$$|\alpha^n+\beta^n|=|\alpha^n+(1+i)^n\alpha^n|$$
$$=|(1+(1+i)^n)\alpha^n|$$
$$=|1+(1+i)^n||\alpha|^n$$
$$=\left|1+\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n\right|$$
$$=\left|1+(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right)\right|$$

ここで $n=8k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$ とでき

$$\begin{cases}\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\frac{n}{4}\pi=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

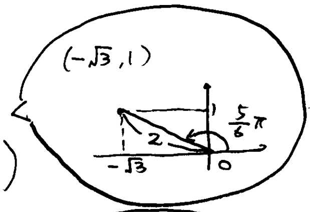
より

$$|\alpha^n+\beta^n|=\left|1+(\sqrt{2})^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right|$$
$$=\left|1+(\sqrt{2})^{n-1}+(\sqrt{2})^{n-1}i\right|$$
$$=\sqrt{\left(1+(\sqrt{2})^{n-1}\right)^2+\left((\sqrt{2})^{n-1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2^n+2(\sqrt{2})^{n-1}+1}$$

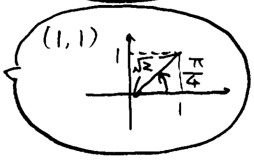
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B6]

等式 $(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ を満たす自然数 m, n のうち, m が最小となるときの m, n の値を求めよ。ただし, i は虚数単位である。 (2016 九州大)

$$i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+i$$
$$=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$



$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$



$(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ より

$$2^m\left(\cos\frac{5m}{6}\pi+i\sin\frac{5m}{6}\pi\right)=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

よって

$$\begin{cases} 2^m=(\sqrt{2})^n & \text{——①} \\ \frac{5m}{6}\pi=\frac{n\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) & \text{——②} \end{cases}$$

① より

$$2^m=2^{\frac{n}{2}}$$
$$m=\frac{n}{2}$$
$$n=2m \quad \text{——①'}$$

② より

$$\frac{5m}{6}=\frac{n}{4}+2k.$$
$$10m=3n+24k. \quad \text{——②'}$$

①' かつ ②' より

$$10m=6m+24k$$
$$4m=24k$$
$$m=6k$$

m が最小となるのは

$k=1$ のときであり

このとき

$\underline{\underline{m=6,\ n=12}}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B7]

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (iは虚数単位) とおく。

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。 (2016 千葉大)

(1)

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

$=\dfrac{z(1-z^6)}{1-z}$

$=\dfrac{z-z^7}{1-z}$

$=\dfrac{z-1}{1-z}$ $\quad(\because\ z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1)$

$=\underline{\underline{-1}}$

(2) $\boxed{解法1}$

$\alpha=z+z^2+z^4$

$=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}\right)$

$\overline{\alpha}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{7}-i\sin\frac{4\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{7}-i\sin\frac{8\pi}{7}\right)$

$=\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)+\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right)\right)$

$+\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$

$=\left(\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$

$=z^6+z^5+z^3$

$=z^3+z^5+z^6$

より

$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

$=\underline{\underline{-1}}$

$\alpha\overline{\alpha}=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$

$=z^4(1+z+z^3)(1+z^2+z^3)$

$=z^4(1+z^2+z^3+z+z^3+z^4+z^3+z^5+z^6)$

$=z^4(1+z+z^2+3z^3+z^4+z^5+z^6)$

$=z^4+z^5+z^6+3z^7+z^8+z^9+z^{10}$

$=z^4+z^5+z^6+3+z+z^2+z^3$ $\quad(\because\ z^7=1)$

$\alpha\overline{\alpha}=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

$=3-1$

$=\underline{\underline{2}}$

α と $\overline{\alpha}$ を解にもつ2次方程式は

$t^2+t+2=0$

$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(ここで

$\mathrm{Im}\,\alpha=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$

より)

$\underline{\underline{\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}}}$

(3) $\boxed{解法1}$

$(z^k)^7=(z^7)^k=1$ $\quad(k=0,1,2,\cdots,6)$

より

$x^7=1 \iff x^7-1=0$

の7つの解は

$1,z,z^2,z^3,z^4,z^5,z^6$

である。

よって

$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$

つまり

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

$=(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$

は x についての恒等式であり

$x=1$ として

$7=(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^6)$

よって

$\underline{\underline{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^6)=7}}$

(裏に続く)

(2) $\boxed{解法2}$ （$\overline{\alpha}$ の求め方）

$|z|^2 = z\overline{z} = 1$ より $\overline{z} = \frac{1}{z}$

よって

$$\overline{z^k} = (\overline{z})^k = \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{z^7}{z^k} = z^{7-k}$$

が成り立つ．

このとき

$$\overline{\alpha} = \overline{z+z^2+z^4}$$
$$= \overline{z} + \overline{z^2} + \overline{z^4}$$
$$= z^6 + z^5 + z^3$$

(3) $\boxed{解法2}$

(2) より $\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$，$\overline{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

$$\beta = (1-z)(1-z^2)(1-z^4)$$

とおくと

$$\overline{\beta} = (1-\overline{z})(1-\overline{z^2})(1-\overline{z^4})$$
$$= (1-z^6)(1-z^5)(1-z^3)$$

より

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$$
$$= \beta\overline{\beta}$$

ここで

$$\beta = (1-z)(1-z^2)(1-z^4)$$
$$= 1-(z+z^2+z^4)+(z^3+z^6+z^5)-z^7$$
$$= -\alpha+\overline{\alpha}$$
$$= \frac{1-\sqrt{7}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$$
$$= -\sqrt{7}i$$
$$\overline{\beta} = \sqrt{7}i$$

よって

$$\beta\overline{\beta} = -7i^2 = \underline{\underline{7}}$$