[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題3]

複素数 z_1, z_2, z_3 について，$z_1+iz_2=(1+i)z_3$ が成り立っている。

(1) $\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$ の絶対値と偏角を求めよ。

(2) 3点 $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ を頂点とする △ABC はどのような三角形であるか。

(1)

$$z_1+iz_2=(1+i)z_3 \quad \text{——— ①}$$

$$iz_2=(1+i)z_3-z_1$$

$$z_2=\frac{1+i}{i}z_3-\frac{z_1}{i}$$

$$z_2=(-i+1)z_3+iz_1$$

$$z_2-z_3=-iz_3+iz_1$$

$$z_2-z_3=i(z_1-z_3)$$

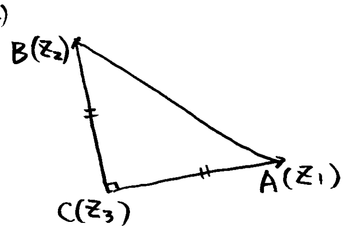
よって

$$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=i$$

つまり

$$\left|\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right|=1 \quad , \quad \arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right)=\frac{\pi}{2}$$

(2)

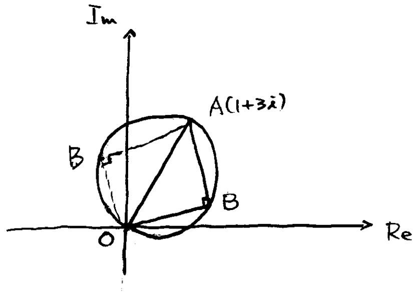


$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$ なる

直角二等辺三角形 である。

複素数平面上で複素数0が表す点をO，複素数$1+3i$が表す点をAとする。△OABの面積が2に等しく，$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$となる点Bを表す複素数をすべて求めよ。

$\boxed{\text{解法1}}$



$A(\alpha),\ B(\beta)$ とおくと

$S(\triangle OAB)=2$ より

$\frac{1}{2}\cdot OB\cdot AB=2$

$\frac{1}{2}|\beta||-\alpha+\beta|=2$

$|\beta||\beta-\alpha|=4$ ——— ①

$\angle OBA=\frac{\pi}{2}$ より　　$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}\times re^{\pm\frac{\pi}{2}}$

$\frac{\alpha-\beta}{-\beta}=r\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\frac{\beta-\alpha}{\beta}=r(\pm i)$

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm ri\beta$

(i) $\beta-\alpha=ri\beta$ のとき

$(1-ri)\beta=\alpha$

$\beta=\frac{\alpha}{1-ri}$

①に代入して

$\left|\frac{\alpha}{1-ri}\right|\left|\frac{\alpha}{1-ri}-\alpha\right|=4$

$|\alpha|^2\left|\frac{1}{1-ri}\right|\left|\frac{1}{1-ri}-1\right|=4$

(ここで $|\alpha|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$)

$10\left|\frac{1}{1-ri}\right|\left|\frac{ri}{1-ri}\right|=4$

$\frac{r}{1+r^2}=\frac{2}{5}$

$5r=2+2r^2$

$2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$r=\frac{1}{2},\ 2$

(ア) $r=\frac{1}{2}$ のとき

$\beta=\frac{1+3i}{1-\frac{1}{2}i}$

$=\frac{2+6i}{2-i}$

$=\frac{1}{5}(4+12i+2i-6)$

$=-\frac{2}{5}+\frac{14}{5}i$

(イ) $r=2$ のとき

$\beta=\frac{1+3i}{1-2i}$

$=\frac{1}{5}(1+3i+2i-6)$

$=-1+i$

(ii) $\beta-\alpha=-ri\beta$ のとき

$(1+ri)\beta=\alpha$

$\beta=\frac{\alpha}{1+ri}$

①に代入して

$\left|\frac{\alpha}{1+ri}\right|\left|\frac{\alpha}{1+ri}-\alpha\right|=4$

$|\alpha|^2\left|\frac{1}{1+ri}\right|\left|\frac{1}{1+ri}-1\right|=4$

$10\left|\frac{1}{1+ri}\right|\left|\frac{-ri}{1+ri}\right|=4$

$\frac{r}{1+r^2}=\frac{2}{5}$

$r=\frac{1}{2},\ 2$

(裏に続く)

(ウ) $r=\frac{1}{2}$ のとき

$$\beta=\frac{1+3i}{1+\frac{1}{2}i}$$

$$=\frac{2+6i}{2+i}$$

$$=\frac{1}{5}(4+12i-2i+6)$$

$$=2+2i$$

(エ) $r=2$ のとき

$$\beta=\frac{1+3i}{1+2i}$$

$$=\frac{1}{5}(1+3i-2i+6)$$

$$=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{\beta=-\frac{2}{5}+\frac{14}{5}i,\ -1+i,\ 2+2i,\ \frac{7}{5}+\frac{1}{5}i}}$$

$\boxed{\text{解法2}}$

xy平面上で $A(1,3)$ とでき．

$\angle OBA=\frac{\pi}{2}$ より

点Bは 線分OA の中点 $C\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

を中心とする半径 $\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{10}}{2}$ の円

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \quad \text{——②}$$

の周上にある．

OA: $y=3x$ と平行な直線 l は

l: $y=3x+k \iff 3x-y+k=0$

とでき．

$S(\triangle OAB)=\frac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot d=2$$

$$d=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

dは 点 $C\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ と $l: 3x-y+k=0$

との距離 であり

$$d=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+k\right|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

よって．

$$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$|k|=4$$

$$k=\pm 4$$

(i) $k=4$ のとき

$l: y=3x+4$ であり

② と連立して．

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+9x^2+15x+\frac{25}{4}=\frac{5}{2}$$

$$10x^2+14x+4=0$$

$$5x^2+7x+2=0$$

$$(5x+2)(x+1)=0$$

$$x=-\frac{2}{5},-1$$

よって

$$(x,y)=\left(-\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right),(-1,1)$$

(ii) $k=-4$ のとき．

$l: y=3x-4$ であり

② と連立して

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3x-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+9x^2-33x+\frac{121}{4}=\frac{5}{2}$$

$$10x^2-34x+28=0$$

$$5x^2-17x+14=0$$

$$(5x-7)(x-2)=0$$

$$x=\frac{7}{5},2$$

よって

$$(x,y)=\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right),(2,2)$$

(i), (ii) より

$$B\left(-\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right),(-1,1),\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right),(2,2)$$

つまり

$$\underline{\underline{\beta=-\frac{2}{5}+\frac{14}{5}i,\ -1+i,\ \frac{7}{5}+\frac{1}{5}i,\ 2+2i}}$$

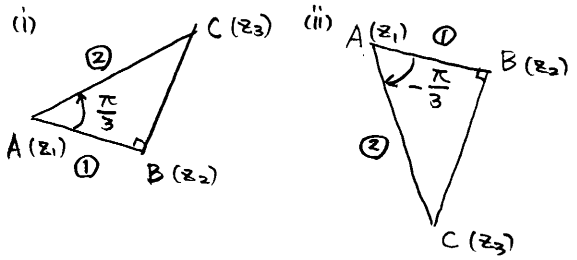
[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A8]

複素数 z_1, z_2, z_3 を表す複素数平面上の点を，それぞれA, B, Cとする。3点A, B, Cが

AB : BC : CA $=1:\sqrt{3}:2$ の三角形をつくるとき

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}={}^{ア}\boxed{}\pm\sqrt{{}^{イ}\boxed{}}\,i$$

である。 (2016 早稲田大)



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\times 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

(i) のとき

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=1+\sqrt{3}i$$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\times 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

(ii) のとき

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=1-\sqrt{3}i$$

(i), (ii) より

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=1\pm\sqrt{3}i$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A9]

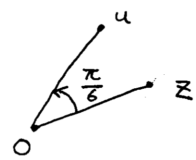
複素数 $z=a+bi$ (a, b は実数) とし，$p=2+3i$ とする。複素数平面上で，点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を u，点 z を点 p を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を w とするとき，次の問いに答えよ。

(1) u を a，b を用いて表せ。

(2) w を a，b を用いて表せ。

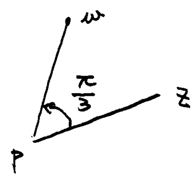
(3) $u=w$ となるとき，a，b の値を求めよ。 (2016 名城大)

(1)



$$u = z\times\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=(a+bi)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}ai+\frac{\sqrt{3}}{2}bi+\frac{1}{2}bi^2$$
$$=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}a-b}{2}+\frac{a+\sqrt{3}b}{2}i}}$$

(2)



$$-p+w=(-p+z)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$w=2+3i+(-2-3i+a+bi)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=2+3i+((a-2)+(b-3)i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=2+3i+\frac{a-2}{2}+\frac{\sqrt{3}a-2\sqrt{3}}{2}i+\frac{b-3}{2}i+\frac{\sqrt{3}b-3\sqrt{3}}{2}i^2$$
$$=\frac{4+a-2-\sqrt{3}b+3\sqrt{3}}{2}+\frac{6+\sqrt{3}a-2\sqrt{3}+b-3}{2}i$$
$$=\underline{\underline{\frac{a-\sqrt{3}b+2+3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}a+b+3-2\sqrt{3}}{2}i}}$$

(3) $\boxed{解法1}$

$u=w$ のとき

$a, b\in\mathbb{R}$ より

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}a-b}{2}=\dfrac{a-\sqrt{3}b+2+3\sqrt{3}}{2}\\[2mm] \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a+b+3-2\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{3}-1)a+(\sqrt{3}-1)b=2+3\sqrt{3}\\(1-\sqrt{3})a+(\sqrt{3}-1)b=3-2\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\\[2mm] -a+b=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\end{cases}$$

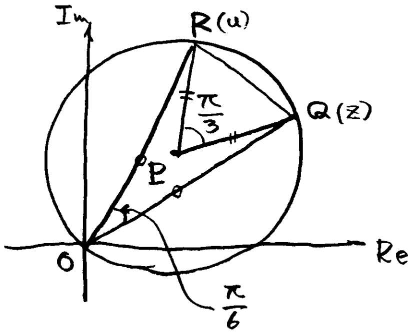
$$\Longleftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{11+5\sqrt{3}}{2}\\[2mm] -a+b=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\underline{\underline{\begin{cases}a=\dfrac{7+2\sqrt{3}}{2}\\[2mm] b=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\end{cases}}}$$

(裏に続く)

$\boxed{解法2}$

$P(2+3i)$, $Q(z)$, $R(u)$ とすると



$\triangle PQR$ は 正三角形

$\triangle OQR$ は $OQ=OR$ なる二等辺三角形

であるので

$$\angle OPQ = \pi - \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$

より

$$-2-3i+z = (-2-3i)\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$z = (-2-3i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+2+3i$$

$$= \sqrt{3} - i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}i^2 + 2 + 3i$$

$$= \frac{7+2\sqrt{3}}{2} + \frac{4+3\sqrt{3}}{2}i$$

よって

$$a = \frac{7+2\sqrt{3}}{2},\ b = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A10]

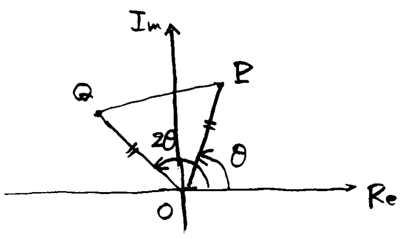
虚部が正の複素数 z が表す複素数平面上の点をPとし，$w=\dfrac{z^2}{|z|}$ で与えられる点をQとする。また，原点をOとする。

(1) z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とするとき，w の極形式を求めよ。さらに△OPQ の面積を r と θ を用いて表せ。

(2) z が $|z-4i|=2|z-i|$ を満たして動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。 (2017 三重大)

(1)

$$w=\frac{z^2}{|z|}$$
$$=\frac{r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)}{r}$$
$$=\underline{\underline{r(\cos2\theta+i\sin2\theta)}}$$



$$S(\triangle OPQ)=\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin(2\theta-\theta)$$
$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}r^2\sin\theta}}$$

(2) $\boxed{\text{解法1}}$

$$|z-4i|=2|z-i|$$

の両辺を2乗して

$$|z-4i|^2=4|z-i|^2$$
$$(z-4i)(\overline{z}+4i)=4(z-i)(\overline{z}+i)$$
$$z\overline{z}+4iz-4i\overline{z}+16=4(z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1)$$
$$3z\overline{z}=12$$
$$z\overline{z}=4$$
$$|z|^2=4$$

$|z|\geqq0$ より

$$|z|=2$$

よって $r=2,\ 0<\theta<\pi$

このとき

$S(\triangle OPQ)=2\sin\theta$ であり，

$\underline{\underline{\mathrm{Max}\,S(\triangle OPQ)=2\quad\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)}}$

$\boxed{\text{解法2}}$ （z の軌跡）

$z=x+yi$ として

$|z-4i|=2|z-i|$ は

$$|x+yi-4i|=2|x+yi-i|$$
$$|x+(y-4)i|=2|x+(y-1)i|$$
$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=2\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

両辺を2乗して

$$x^2+y^2-8y+16=4(x^2+y^2-2y+1)$$
$$3x^2+3y^2=12$$
$$x^2+y^2=4$$

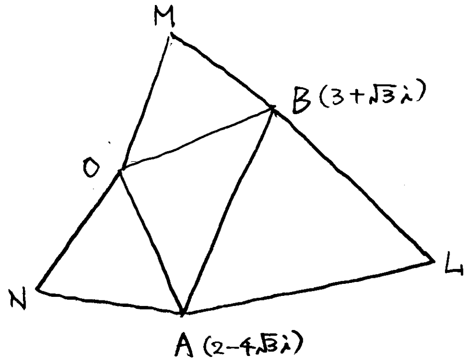
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A11]

複素数平面上の原点Oと2点$A(2-4\sqrt{3}i)$，$B(3+\sqrt{3}i)$を考える。ただし，iを虚数単位とする。三角形OABの外側に，3辺AB，BO，OAをそれぞれ1辺とする正三角形ALB，BMO，ONAを作る。

(1) 点L，M，Nを表す複素数をそれぞれ求めよ。

(2) 直線OLと直線AMの交点をPとする。点Pを表す複素数を求めよ。

(3) 3点B，P，Nが一直線上にあることを示せ。　　（2017　首都大学東京）



(1)

$A(\alpha), B(\beta), L(l), M(m), N(n)$

とおくと

$-\beta+l=(-\beta+\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$l=(-3-\sqrt{3}i+2-4\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3+\sqrt{3}i$

$=(-1-5\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3+\sqrt{3}i$

$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{5\sqrt{3}}{2}i-\frac{15}{2}i^2+3+\sqrt{3}i$

$=10-2\sqrt{3}i$

$m=\beta\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=(3+\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}i^2$

$=2\sqrt{3}i$

$n=\alpha\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=(2-4\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=1-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+6i^2$

$=-5-3\sqrt{3}i$

よって

$\underline{\underline{L(10-2\sqrt{3}i),\ M(2\sqrt{3}i),\ N(-5-3\sqrt{3}i)}}$

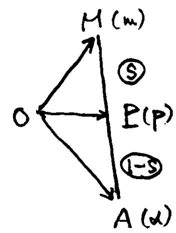
(2) $\boxed{\text{解法1}}$

$P(p)$ とおくと

$p=kl\quad(k\in\mathbb{R})$ とでき，

$p=k(10-2\sqrt{3}i)$

$=10k-2\sqrt{3}ki$ ——①



$p=\frac{s\alpha+(1-s)m}{s+(1-s)}\quad(s\in\mathbb{R})$

とでき

$p=s(2-4\sqrt{3}i)+(1-s)2\sqrt{3}i$

$=2s+(2\sqrt{3}-6\sqrt{3}s)i$ ——②

①=② より

$10k-2\sqrt{3}ki=2s+(2\sqrt{3}-6\sqrt{3}s)i$

$k, s\in\mathbb{R}$ より

$\begin{cases}10k=2s\\-2\sqrt{3}k=2\sqrt{3}-6\sqrt{3}s\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5k=s\\k=3s-1\end{cases}$

これを解いて

$k=\frac{1}{14},\ s=\frac{5}{14}$

よって

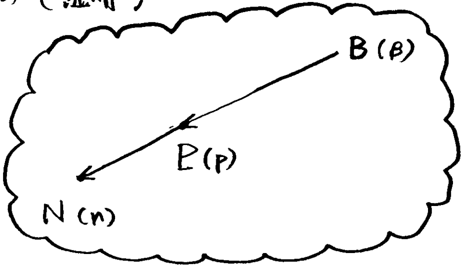
$p=\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i$

つまり

$\underline{\underline{P\left(\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i\right)}}$

(裏に続く)

(3)（証明）



$$\left(\begin{aligned} -\beta+p &= -3-\sqrt{3}i+\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i \\ &= \frac{-16-8\sqrt{3}i}{7} = \frac{2}{7}(-8-4\sqrt{3}i) \\ -\beta+n &= -3-\sqrt{3}i-5-3\sqrt{3}i \\ &= -8-4\sqrt{3}i \end{aligned}\right.$$

より

$$\frac{p-\beta}{n-\beta} = \frac{2}{7}$$

よって

$$\arg\frac{p-\beta}{n-\beta} = 0$$

となり

3点 B, P, N は一直線上にある。■

(2) $\boxed{\text{解法2}}$（①以降）

$$\frac{-2\sqrt{3}i+10k-2\sqrt{3}ki}{-2\sqrt{3}i+2-4\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{10k+(-2\sqrt{3}k-2\sqrt{3})i}{2-6\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{5k+(-\sqrt{3}k-\sqrt{3})i}{1-3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{5k+(-\sqrt{3}k-\sqrt{3})i+15\sqrt{3}ki+(-9k-9)i^2}{28}$$

$$= \frac{14k+9+(14\sqrt{3}k-\sqrt{3})i}{28}$$

が実数となるとよく

$$14\sqrt{3}k-\sqrt{3}=0$$

$$k=\frac{1}{14}$$

このとき

$$p=\frac{10}{14}-\frac{2\sqrt{3}}{14}i$$

$$=\underline{\underline{\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 例題2]

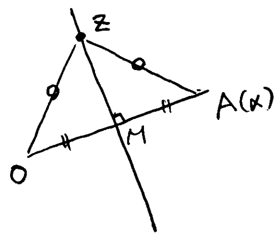
三角形の頂点O, A, Bを表す複素数をそれぞれ0, α, βとする。

(1) 線分OAの垂直二等分線上の点を表す複素数zは, $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$を満たすことを示せ。

(2) △OABの外心を表す複素数をα, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$を用いて表せ。

(2000 山形大)

(1)



(証明1)

$Oz=Az$ より

$|z|=|-\alpha+z|$

両辺を2乗して

$|z|^2=|-\alpha+z|^2$

$z\overline{z}=(-\alpha+z)(-\overline{\alpha}+\overline{z})$

$z\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+z\overline{z}$

よって

$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$ ■

(証明2)

線分OAの中点M(m)とおくと

$\angle OMz=\frac{\pi}{2}$ であり

$\arg\frac{-m+z}{-m}=\pm\frac{\pi}{2}$ より

$\frac{m-z}{m}$ は純虚数

つまり

$\frac{m-z}{m}=-\overline{\left(\frac{m-z}{m}\right)}$

$\frac{m-z}{m}=-\frac{\overline{m}-\overline{z}}{\overline{m}}$

$(m-z)\overline{m}=-(\overline{m}-\overline{z})m$

$\left(\frac{\alpha}{2}-z\right)\cdot\frac{\overline{\alpha}}{2}=\left(-\frac{\overline{\alpha}}{2}+\overline{z}\right)\frac{\alpha}{2}$

$(\alpha-2z)\overline{\alpha}=(-\overline{\alpha}+2\overline{z})\alpha$

$\alpha\overline{\alpha}-2\overline{\alpha}z=-\alpha\overline{\alpha}+2\alpha\overline{z}$

$2\overline{\alpha}z+2\alpha\overline{z}-2\alpha\overline{\alpha}=0$

よって $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$ ■

(証明3)

線分OAの中点M$\left(\frac{\alpha}{2}\right)$とおくと

$\angle OMz=\frac{\pi}{2}$ であり

$Mz=MO\cdot ki \quad (k\in\mathbb{R})$

とでき

$-\frac{\alpha}{2}+z=-\frac{\alpha}{2}\cdot ki$

$-\alpha+2z=-\alpha ki$

$\frac{-\alpha+2z}{-\alpha}=ki$ ——— ①

両辺の共役複素数をとると

$\frac{-\overline{\alpha}+2\overline{z}}{-\overline{\alpha}}=-ki$ ——— ②

①+② より

$\frac{-\alpha+2z}{-\alpha}+\frac{-\overline{\alpha}+2\overline{z}}{-\overline{\alpha}}=0$

$(-\alpha+2z)\overline{\alpha}+(-\overline{\alpha}+2\overline{z})\alpha=0$

$-\alpha\overline{\alpha}+2\overline{\alpha}z-\alpha\overline{\alpha}+2\alpha\overline{z}=0$

$2\overline{\alpha}z+2\alpha\overline{z}-2\alpha\overline{\alpha}=0$

よって

$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$ ■

(2)

線分OAの垂直二等分線上の点zは

$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\alpha\overline{\alpha}=0$ ——— ③

を満たす.

同様に,線分OBの垂直二等分線上の点zは

$\overline{\beta}z+\beta\overline{z}-\beta\overline{\beta}=0$ ——— ④

を満たす.

(裏に続く)

△OAB の外心は ③, ④ を同時に満たす.

③×β $\quad \bar{\alpha}\beta z+\alpha\beta\bar{z}-\alpha\bar{\alpha}\beta=0$

④×α $\quad \alpha\bar{\beta}z+\alpha\beta\bar{z}-\alpha\beta\bar{\beta}=0$ (−

$$(\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta})z-(\alpha\bar{\alpha}\beta-\alpha\beta\bar{\beta})=0$$

$$(\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta})z=\alpha\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$

よって

$$z=\frac{\alpha\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B12]

複素数平面上の点0を中心とする半径2の円 C 上に点 z がある。a を実数の定数とし,

$$w=z^2-2az+1$$

とおく。

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。

(2) 点 z が C 上を1周するとき, $|w|$ の最小値を a を用いて表せ。

(2016 北海道大)

(1)

C : $|z|=2$

であり,

$$|w|^2 = w\overline{w}$$
$$= (z^2-2az+1)(\overline{z}^2-2a\overline{z}+1)$$
$$= z^2\overline{z}^2-2az^2\overline{z}+z^2-2az\overline{z}^2+4a^2z\overline{z}-2az+\overline{z}^2-2a\overline{z}+1$$
$$= |z|^4-2a|z|^2z+z^2-2a|z|^2\overline{z}+4a^2|z|^2-2az+\overline{z}^2-2a\overline{z}+1$$
$$= 16-8az+z^2-8a\overline{z}+16a^2-2az+\overline{z}^2-2a\overline{z}+1$$
$$= z^2+\overline{z}^2-10a(z+\overline{z})+16a^2+17$$

(ここで

$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ より

$z+\overline{z}=2x$

$$z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}$$
$$=4x^2-2|z|^2$$
$$=4x^2-8$$
)

$$|w|^2=4x^2-8-20ax+16a^2+17$$
$$=\underline{\underline{4x^2-20ax+16a^2+9}}$$

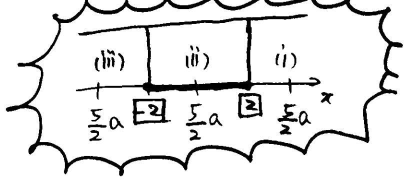
(2)

$|w|\geqq 0$ より

$|w|^2$ が最小のとき $|w|$ も最小となる.

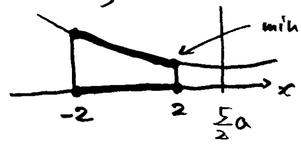
$-2\leqq x\leqq 2$ としてよく, このもとで

$$|w|^2=4x^2-20ax+16a^2+9$$
$$=4\{x^2-5ax\}+16a^2+9$$
$$=4\left\{\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2-\frac{25}{4}a^2\right\}+16a^2+9$$
$$=4\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2-9a^2+9$$



(i) $2\leqq\dfrac{5}{2}a$ のとき

(i.e. $\dfrac{4}{5}\leqq a$ のとき)



$$\min|w|^2=16a^2-40a+25 \quad (x=2)$$
$$=(4a-5)^2$$

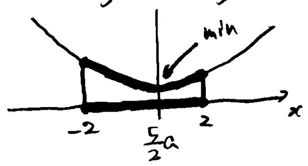
よって

$$\min|w|=|4a-5|$$
$$=\begin{cases}4a-5 & \left(\dfrac{5}{4}\leqq a \text{ のとき}\right)\\ -4a+5 & \left(\dfrac{4}{5}\leqq a\leqq\dfrac{5}{4} \text{ のとき}\right)\end{cases}$$

(裏に続く)

(ii) $-2 \leqq \frac{5}{2}a \leqq 2$ のとき

$\left(\text{i.e.}\ -\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5}\ \text{のとき}\right)$

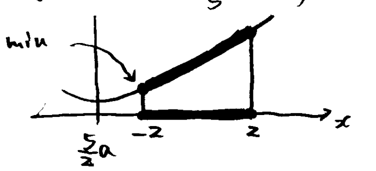


$$\min |w|^2 = -9a^2 + 9 \quad \left(x = \frac{5}{2}a\right)$$
$$= 9(1-a^2)$$

よって
$$\min |w| = 3\sqrt{1-a^2}$$

(iii) $\frac{5}{2}a \leqq -2$ のとき

$\left(\text{i.e.}\ a \leqq -\frac{4}{5}\ \text{のとき}\right)$



$$\min |w|^2 = 16a^2 + 40a + 25 \quad (x = -2)$$
$$= (4a+5)^2$$

よって
$$\min |w| = |4a+5|$$
$$= \begin{cases} 4a+5 & \left(-\frac{5}{4} \leqq a \leqq -\frac{4}{5}\ \text{のとき}\right) \\ -4a-5 & \left(a \leqq -\frac{5}{4}\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

(i) ～ (iii) より

$$\min |w| = \begin{cases} 4a-5 & \left(\frac{5}{4} \leqq a\ \text{のとき}\right) \\ -4a+5 & \left(\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{5}{4}\ \text{のとき}\right) \\ 3\sqrt{1-a^2} & \left(-\frac{4}{5} \leqq a \leqq \frac{4}{5}\ \text{のとき}\right) \\ 4a+5 & \left(-\frac{5}{4} \leqq a \leqq -\frac{4}{5}\ \text{のとき}\right) \\ -4a-5 & \left(a \leqq -\frac{5}{4}\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B13]

i は虚数単位とする。

(1) 方程式 $z^4=-1$ を解け。

(2) α を方程式 $z^4=-1$ の解の1つとする。複素数平面に点 β があって $|z-\beta|=\sqrt{2}|z-\alpha|$ を満たす点 z 全体が原点を中心とする円 C を描くとき，複素数 β を α で表せ。

(3) 点 z が(2)の円 C 上を動くとき，点 i と z を結ぶ線分の中点 w はどのような図形を描くか。 (2015 鹿児島大)

(1)

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと

$$\begin{cases} z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta) \\ -1=1(\cos\pi+i\sin\pi) \end{cases}$$

$z^4=-1$ より

$$\begin{cases} r^4=1 & \text{—— ①} \\ 4\theta=\pi+2k\pi\quad(k=0,1,2,3) & \text{—— ②} \end{cases}$$

① で $r>0$ より

$r=1$

② より

$\theta=\dfrac{2k+1}{4}\pi$

$=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$z=\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき

$z=\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$ のとき

$z=\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

よって

$z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ (複号任意)

(2)

$|z-\beta|=\sqrt{2}|z-\alpha|$

両辺を2乗して

$|z-\beta|^2=2|z-\alpha|^2$

$(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})=2(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$

$z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}=2(z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha})$

$z\overline{z}+(-2\overline{\alpha}+\overline{\beta})z+(-2\alpha+\beta)\overline{z}=-2\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$

点 z が原点を中心とする円 C を描くとき

$$\begin{cases} -2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=0 \\ -2\alpha+\beta=0 \end{cases}$$

より

$\beta=2\alpha$

(3)

$\beta=2\alpha$ のとき $\overline{\beta}=2\overline{\alpha}$ であり

このとき

$z\overline{z}=-2\alpha\overline{\alpha}+4\alpha\overline{\alpha}$

$z\overline{z}=2\alpha\overline{\alpha}$

$|z|^2=2|\alpha|^2$

$|z|^2=2\quad(\because|\alpha|=1)$

$|z|=\sqrt{2}$

ここで

点 w は点 i と z を結ぶ線分の中点を表すので

$w=\dfrac{i+z}{2}$

より

$z=2w-i$ —— ④

(裏に続く)

③かつ④より

$$|2w-i|=\sqrt{2}$$

$$\left|w-\frac{i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって

点 w が描く軌跡は

中心 点 $\frac{i}{2}$, 半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B14]

△ABC の頂点を表す複素数 α, β, γ が次の 3 条件を満たしている。

(a) △ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である。

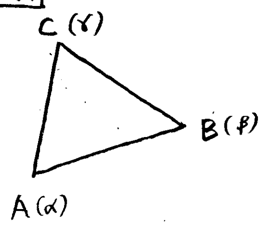
(b) $\alpha+\beta+\gamma=3$

(c) $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で，虚数部分は正である。

(1) $z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を用いて表せ。

(2) α, β, γ の偏角を求めよ。ただし，$0\leqq\arg\alpha\leqq\arg\beta\leqq\arg\gamma<2\pi$ とする。　(1999 京都大)

(1) $\boxed{\text{解法1}}$



$z=\alpha-1$ より

$\alpha=z+1$

上図のように △ABC で 3点 A,B,C が反時計回りに配置されているとき

$$\frac{-\alpha+\gamma}{-\alpha+\beta}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$-\alpha+\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-\alpha+\beta)$$

(ここで
$\alpha+\beta+\gamma=3$ より
$\beta=3-\alpha-\gamma$)

$$-\alpha+\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-2\alpha-\gamma)$$

$$-\alpha+\gamma=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i+(-1-\sqrt{3}i)\alpha+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\gamma$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\gamma=-\sqrt{3}\alpha i+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\gamma=-\sqrt{3}(z+1)i+\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\gamma=-\sqrt{3}iz+\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\gamma=\frac{-2i}{\sqrt{3}+i}z+1$$

$$=\frac{-\sqrt{3}i-1}{2}z+1$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}z+1$$

このとき

$$\beta=3-\alpha-\gamma$$

$$=3-(z+1)+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z-1$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z+1$$

β と γ の対等性から

$$\{\beta,\gamma\}=\left\{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z+1,\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}z+1\right\}$$

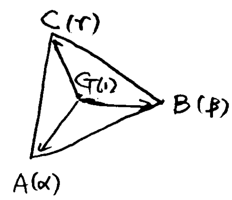
$\boxed{\text{解法2}}$

△ABC は正三角形であるので
重心 G と外心は一致する。

G(g) として

$$g=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=1$$ であり，

B, C は点 A を，点 G まわりに $\pm\frac{2}{3}\pi$ だけ
回転した点であり，



上図のように △ABC で，3点 A,B,C
が反時計回りに配置されているとき，

$$-1+\beta=(-1+\alpha)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\beta=z\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$

$$-1+\gamma=(-1+\alpha)\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

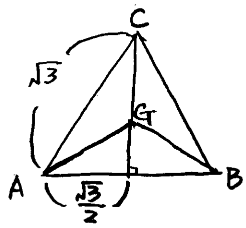
$$\gamma=z\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$

β と γ の対等性から

$$\{\beta,\gamma\}=\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+1,\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+1\right\}$$

(裏に続く)

(2)



(a) より　$GA=1$

$|-1+\alpha|=1$

$|z|=1$

(1) より

$\alpha\beta\gamma=(z+1)\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+1\right\}\left\{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+1\right\}$

$=(z+1)\left\{\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)z+1\right\}\left\{\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)z+1\right\}$

$=(z+1)\left\{(\cos 0+i\sin 0)z^2-z+1\right\}$

$=(z+1)(z^2-z+1)$

$=z^3+1$

(c) より

$\begin{cases}|z^3+1|=1 & \text{——①}\\ \mathrm{Im}(z^3+1)>0 & \text{——②}\end{cases}$

① で　$z=\cos\theta+i\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと

$|\cos 3\theta+i\sin 3\theta+1|=1$

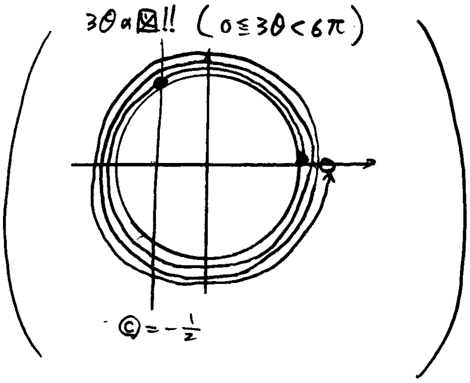
$|(\cos 3\theta+1)+i\sin 3\theta|=1$

$\sqrt{(\cos 3\theta+1)^2+\sin^2 3\theta}=1$

$\cos^2 3\theta+2\cos 3\theta+1+\sin^2 3\theta=1$

$\cos 3\theta=-\frac{1}{2}$

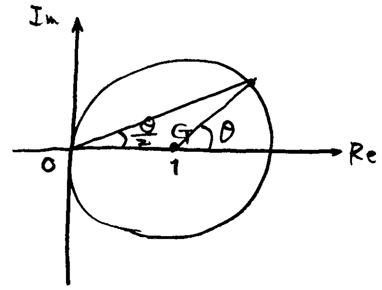
3θの図!!　$(0\leqq 3\theta<6\pi)$

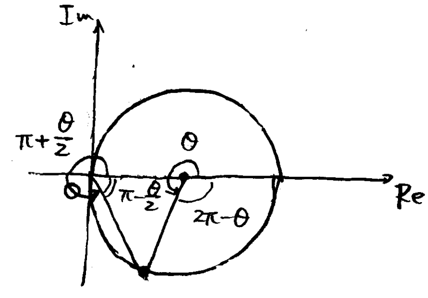


② に注意して

$3\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{14}{3}\pi$

$\theta=\frac{2}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{14}{9}\pi$





上図より

$\arg(z+1)=\frac{\pi}{9},\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{16}{9}\pi$

$0\leqq\arg\alpha\leqq\arg\beta\leqq\arg\gamma<2\pi$　より

$\arg\alpha=\frac{\pi}{9},\ \arg\beta=\frac{4}{9}\pi,\ \arg\gamma=\frac{16}{9}\pi$