[三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題5]

次の式を満たす点 P(z) の軌跡を求めよ。

(1) $|z-1|=|z-i|$　　(2) $|z-3|=1$

(3) $|z+2-i|\leqq 2$　　(4) $|z+2|=2|z-1|$

(1)

$|z-1|=|z-i|$

A(1), B(i) とおくと

P(z) の軌跡は

線分ABの垂直二等分線

(2)

$|z-3|=1$

P(z) の軌跡は

点 (3) を中心とする,半径 1の円

(3)

$|z+2-i|\leqq 2$

P(z) の軌跡は

点 $(-2+i)$ を中心とする,半径 2の

円の内部 及び 周

(4) $\boxed{\text{解法1}}$

$|z+2|=2|z-1|$

両辺を 2乗して

$|z+2|^2=4|z-1|^2$

$(z+2)(\bar{z}+2)=4(z-1)(\bar{z}-1)$

$z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4=4(z\bar{z}-z-\bar{z}+1)$

$3z\bar{z}-6z-6\bar{z}=0$

$z\bar{z}-2z-2\bar{z}=0$

	$\bar{z}$	-2
z	$z\bar{z}$	$-2z$
-2	$-2\bar{z}$	4

+4　　+4

$(z-2)(\bar{z}-2)=4$

$|z-2|^2=4$

よって

$|z-2|=2$

つまり, P(z) の軌跡は

点 (2) を中心とする,半径 2の円

$\boxed{\text{解法2}}$

$|z+2|=2|z-1|$

$z=x+yi$ とおくと

$|x+yi+2|=2|x+yi-1|$

$|(x+2)+yi|=2|(x-1)+yi|$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$x^2+4x+4+y^2=4(x^2-2x+1+y^2)$

$3x^2-12x+3y^2=0$

$x^2-4x+y^2=0$

$(x-2)^2+y^2=4$

よって, xy平面上で

点 (2,0) を中心とする半径 2の円

複素平面上で

P(z) の軌跡は

点 (2) を中心とする半径 2の円

$\boxed{\text{解法3}}$ (アポロニウスの円)

$|z+2|=2|z-1|$

$z=1$ は解ではないので

$\dfrac{|z+2|}{|z-1|}=\dfrac{2}{1}$ より

$|z+2|:|z-1|=2:1$

よって

P(z) の軌跡は

2点 (-2), (1) を 2:1に内分,外分する点を直径の両端とする円

$\dfrac{-2\cdot1+1\cdot2}{2+1}=0$

$\dfrac{-2\cdot(-1)+1\cdot2}{2-1}=4$

つまり

点 (2) を中心とする半径 2の円

$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+1\leqq 0$ を満たす複素数 z が存在するような複素数 α の範囲を図示せよ。

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+1\leqq 0$$

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}\leqq -1$$

$$+\alpha\overline{\alpha}\quad \begin{array}{c|c|c} & \overline{z} & \overline{\alpha} \\ \hline z & z\overline{z} & \overline{\alpha}z \\ \hline \alpha & \alpha\overline{z} & \alpha\overline{\alpha} \end{array} \quad +\alpha\overline{\alpha}$$

$$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})\leqq \alpha\overline{\alpha}-1$$

$$|z+\alpha|^2\leqq |\alpha|^2-1$$

これを満たす z が存在するためには

$$|\alpha|^2-1\geqq 0$$

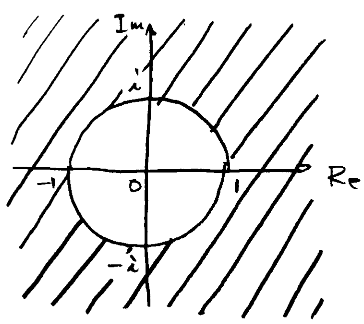
$$|\alpha|^2\geqq 1$$

$|\alpha|\geqq 0$ より

$$|\alpha|\geqq 1$$

よって

α の存在範囲は



図の斜線部

ただし，境界を含む。

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A15]

複素数平面上の点 P(z) が，原点を中心とする半径3の円の周上を動くとき，$w=\dfrac{z+3i}{z}$ で表される点 Q(w) はどのような図形を描くか。

(2017 長崎大)

$\boxed{\text{解法1}}$

z は $|z|=3$ —— ① を満たす.

$$w=\frac{z+3i}{z}$$ より

$$wz=z+3i$$

$$(w-1)z=3i$$

$w=1$ は解ではないので

$$z=\frac{3i}{w-1}$$

① に代入して

$$\left|\frac{3i}{w-1}\right|=3$$

$$\frac{3}{|w-1|}=3$$

$|w-1|=1$ (これは $w\neq 1$ を満たす.)

よって，Q(w) の軌跡は

<u>点 (1) を中心とする 半径 1 の円</u>

$\boxed{\text{解法2}}$

$z=a+bi$，$w=x+yi$ とおくと

P(z)は 原点を中心とする半径3の円の周上を動くので

$a^2+b^2=9$ —— ②

$$w=\frac{z+3i}{z}$$

$$=\frac{a+bi+3i}{a+bi}$$

$$=\frac{a+(b+3)i}{a+bi}$$

$$=\frac{a^2+(ab+3a)i-abi+(-b^2-3b)i^2}{a^2+b^2}$$

$$w=\frac{(a^2+b^2+3b)+3ai}{a^2+b^2}$$

$$x+yi=1+\frac{3b}{a^2+b^2}+\frac{3a}{a^2+b^2}i$$

$a, b\in\mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} x=1+\dfrac{3b}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{3a}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\underset{②}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=1+\dfrac{b}{3} \\ y=\dfrac{a}{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b=3x-3 \\ a=3y \end{cases}$$

② に代入して

$$(3y)^2+(3x-3)^2=9$$

$$(x-1)^2+y^2=1$$

よって

xy平面上で

点 (1, 0) を中心とする半径 1の円

つまり 複素平面上で

P(z) の軌跡は

<u>点 (1) を中心とする半径 1の円</u>

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A16]

(1) $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{2}|z+2-\sqrt{3}i|$ を満たす点 z の軌跡を求めよ。

(2) 点 z が，(1) で求めた図形上を動くとき，z の絶対値 $|z|$ の値の範囲と z の偏角 θ の範囲をそれぞれ求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(2001　島根大)

(1)

$$|z+3-\sqrt{3}i| = \sqrt{2}|z+2-\sqrt{3}i|$$

両辺2乗して

$$|z+3-\sqrt{3}i|^2 = 2|z+2-\sqrt{3}i|^2$$

$$(z+3-\sqrt{3}i)(\bar{z}+3+\sqrt{3}i) = 2(z+2-\sqrt{3}i)(\bar{z}+2+\sqrt{3}i)$$

$$z\bar{z}+(3+\sqrt{3}i)z+(3-\sqrt{3}i)\bar{z}+12$$
$$= 2\left(z\bar{z}+(2+\sqrt{3}i)z+(2-\sqrt{3}i)\bar{z}+7\right)$$

$$z\bar{z}+(1+\sqrt{3}i)z+(1-\sqrt{3}i)\bar{z} = -2$$

	$\bar{z}$	$1+\sqrt{3}i$
z	$z\bar{z}$	$(1+\sqrt{3}i)z$
$1-\sqrt{3}i$	$(1-\sqrt{3}i)\bar{z}$	4

+4　　+4

$$(z+1-\sqrt{3}i)(\bar{z}+1+\sqrt{3}i) = 2$$

$$|z+1-\sqrt{3}i|^2 = 2$$

よって

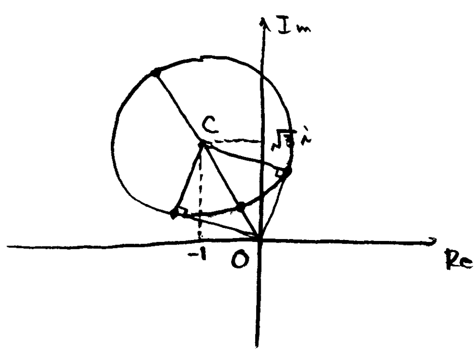
$$|z+1-\sqrt{3}i| = \sqrt{2}$$

つまり，

点 z の軌跡は

点 $(-1+\sqrt{3}i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

(2)



(1) で求めた円周上の点 P，

C $(-1+\sqrt{3}i)$ とおくと

$$OC = \sqrt{1+3} = 2$$

$|z|$ が最大となるのは，

3点 O, C, P がこの順に一直線上に並ぶときであり，

$$\text{Max}\ |z| = OC + CP$$
$$= 2+\sqrt{2}$$

$|z|$ が最小となるのは，

3点 O, P, C がこの順に一直線上に並ぶときであり，

$$\min\ |z| = OC - CP$$
$$= 2-\sqrt{2}$$

よって

$2-\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 2+\sqrt{2}$

θ が最大となるのは，

OP ⊥ CP となるときであり，

OC と実軸正の向きのなす角 $= \frac{2}{3}\pi$，

$\angle COP = \frac{\pi}{4}$ より

$$\text{Max}\ \theta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{11}{12}\pi$$

θ が最小となるのは，

OP ⊥ CP となるときであり，

$$\min\ \theta = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{5}{12}\pi$$

よって

$\frac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{12}\pi$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A17]

複素数平面上を動く点 z を考える。

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から1点を除いたものとなる。この図形をかけ。

(3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から1点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。 (2016 筑波大)

(1) (証明1)

$|z-1|=|z+1|$

両辺を2乗して

$|z-1|^2=|z+1|^2$

$(z-1)(\overline{z}-1)=(z+1)(\overline{z}+1)$

$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=z\overline{z}+z+\overline{z}+1$

$-2z=2\overline{z}$

$z=-\overline{z}$

よって.

点 z の全体は虚軸である. ■

(証明2)

$|z-1|=|z+1|$

で $z=x+yi$ とおくと

$|x+yi-1|=|x+yi+1|$

$|(x-1)+yi|=|(x+1)+yi|$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1+y^2$

$-4x=0$

$x=0$

よって.

点 z の全体は虚軸である. ■

(証明3)

A(1), B(−1) とおくと

点 z の軌跡は

線分ABの垂直二等分線

つまり.

点 z の全体は虚軸である. ■

(2) $\boxed{\text{解法1}}$

$w=\dfrac{z+1}{z}$ より

$w-1=\dfrac{1}{z}$

両辺の共役複素数をとると

$\overline{w}-1=\dfrac{1}{\overline{z}}$

ここで (1) より

$z=-\overline{z}$ $(z\neq 0)$

を満たすので

$\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{\overline{z}}$

$w-1=-\overline{w}+1$

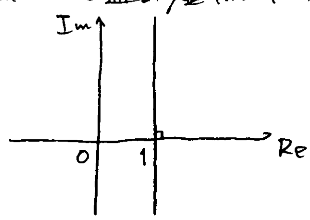
$w+\overline{w}=2$

$\dfrac{w+\overline{w}}{2}=1$

$\mathrm{Re}(w)=1$

よって. 点 w の軌跡は

点 (1) を通る虚軸に平行な直線である.



(裏に続く)

$\boxed{\text{解法2}}$

$w = X + Yi$, $z = yi$ $(y \neq 0)$

とおくと

$w = \dfrac{z+1}{z}$ より

$$X + Yi = \frac{yi+1}{yi}$$

$$X + Yi = 1 - \frac{1}{y}i$$

$X, Y, y \in \mathbb{R}$ より

$X = 1$, $Y = \dfrac{1}{y}$

よって

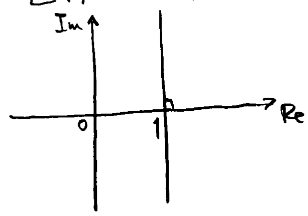
$w = 1 + Yi$ （ Yは任意 ）

となり

xy平面上では

点(X, Y)の軌跡は

直線 $x = 1$



(3)

$w = \dfrac{z+1}{z-a}$ より

$(z-a)w = z+1$

$(w-1)z = aw+1$

（ここで

$a > 0$ より

$w = \dfrac{z+1}{z-a} \neq 1$ ）

$$z = \frac{aw+1}{w-1}$$

両辺の共役複素数をとると

$$\bar{z} = \frac{a\bar{w}+1}{\bar{w}-1}$$

ここで (1) より

$z = -\bar{z}$

を満たすので

$$\frac{aw+1}{w-1} = -\frac{a\bar{w}+1}{\bar{w}-1}$$

$$(aw+1)(\bar{w}-1) = (w-1)(-a\bar{w}-1)$$

$$aw\bar{w} - aw + \bar{w} - 1 = -aw\bar{w} - w + a\bar{w} + 1$$

$$2aw\bar{w} + (1-a)w + (1-a)\bar{w} = 2.$$

	$\bar{w}$	$\frac{1-a}{2a}$
$2aw$	$2aw\bar{w}$	$(1-a)w$
$1-a$	$(1-a)\bar{w}$	$\frac{(1-a)^2}{2a}$

$+\dfrac{(1-a)^2}{2a}$ $+\dfrac{(1-a)^2}{2a}$

$a \neq 0$ より

$$(2aw+1-a)\left(\bar{w} + \frac{1-a}{2a}\right) = 2 + \frac{(1-a)^2}{2a}$$

$$\left(w + \frac{1-a}{2a}\right)\left(\bar{w} + \frac{1-a}{2a}\right) = \frac{4a+1-2a+a^2}{4a^2}$$

$$\left|w + \frac{1-a}{2a}\right|^2 = \frac{a^2+2a+1}{4a^2}$$

$$\left|w + \frac{1-a}{2a}\right|^2 = \left(\frac{a+1}{2a}\right)^2$$

よって

$$\left|w + \frac{1-a}{2a}\right| = \frac{1+a}{2a}$$

（ただし $w \neq 1$ ）.

この円は

中心. 点$\left(\dfrac{a-1}{2a}\right)$, 半径 $\dfrac{a+1}{2a}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 例題3]

$a>1$ のとき，2次方程式 $ax^2-2x+a=0$ の2つの解を表す複素数平面上の点をA，Bとし，2次方程式 $x^2-2ax+1=0$ の2つの解を表す複素数平面上の点をC，Dとする。このとき，4点A，B，C，Dは同一円周上にあることを証明せよ。（　大阪大）

（証明1）

$ax^2-2x+a=0$ より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{a^2-1}\,i}{a}\quad(\because a>1)$$

$x^2-2ax+1=0$ より

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-1}}{1}$$

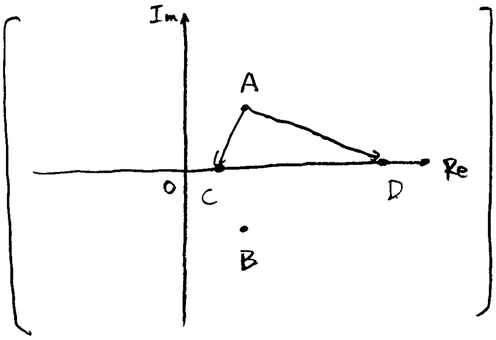
$$=a\pm\sqrt{a^2-1}$$

よって

$$A\left(\frac{1+\sqrt{a^2-1}\,i}{a}\right),\ B\left(\frac{1-\sqrt{a^2-1}\,i}{a}\right)$$

$$C\left(a+\sqrt{a^2-1}\right),\ D\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)$$

としても，一般性は失われない。



$$\frac{-\dfrac{1+\sqrt{a^2-1}\,i}{a}+a+\sqrt{a^2-1}}{-\dfrac{1+\sqrt{a^2-1}\,i}{a}+a-\sqrt{a^2-1}}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{a^2-1}\,i+a^2+a\sqrt{a^2-1}}{-1-\sqrt{a^2-1}\,i+a^2-a\sqrt{a^2-1}}$$

$$=\frac{(a^2-1+a\sqrt{a^2-1})-\sqrt{a^2-1}\,i}{(a^2-1-a\sqrt{a^2-1})-\sqrt{a^2-1}\,i}$$

$$=\frac{(\sqrt{a^2-1}+a)-i}{(\sqrt{a^2-1}-a)-i}$$

$$=\frac{(a^2-1-a^2)+(-\sqrt{a^2-1}+a)i+(\sqrt{a^2-1}+a)i-i^2}{(\sqrt{a^2-1}-a)^2-i^2}$$

$$=\frac{-1+2ai+1}{a^2-1-2a\sqrt{a^2-1}+a^2+1}$$

$$=\frac{2a}{2a^2-2a\sqrt{a^2-1}}\,i$$

よって

$$\angle DAC=\frac{\pi}{2}$$

図形の対等性から

$$\angle CBD=\frac{\pi}{2}$$

つまり

4点A，B，C，Dは
線分CDを直径の両端とする
同一円周上にある。■

（証明2）

$ax^2-2x+a=0$ ——①

の判別式 $D_1/4=1-a^2<0$

$x^2-2ax+1=0$ ——②

の判別式 $D_2/4=a^2-1>0$

より

①の共役複素数解 $z,\bar{z}$ として

$A(z)$，$B(\bar{z})$

②の実数解 α,β として

$C(\alpha)$，$D(\beta)$

とおくと

線分CDの中点 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$

また ①より

$$z+\bar{z}=\frac{2}{a},\quad z\bar{z}=1$$

このとき

$$|z-a|^2=(z-a)(\bar{z}-a)$$

$$=z\bar{z}-az-a\bar{z}+a^2$$

$$=z\bar{z}-a(z+\bar{z})+a^2$$

$$=1-2+a^2$$

$$=a^2-1$$

よって

$$|z-a|=\sqrt{a^2-1}$$

（裏に続く）

同様に

$$|\bar{z}-a| = \sqrt{a^2-1}$$

また

②の2解は

$$x = a \pm \sqrt{a^2-1} \quad より$$

$$|\beta-\alpha| = \left|\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)-\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\right|$$

$$= \left|2\sqrt{a^2-1}\right|$$

$$= 2\sqrt{a^2-1}$$

よって

4点 A, B, C, D は

点 (a) を中心とする半径 $\sqrt{a^2-1}$

の円周上にある。■

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B18]

α を絶対値が1の複素数とし，等式 $z=\alpha^2\overline{z}$ を満たす複素数 z の表す複素数平面上の図形を S とする。ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1) $z=\alpha^2\overline{z}$ が成り立つことと，$\dfrac{z}{\alpha}$ が実数であることは同値であることを証明せよ。また，このことを用いて，図形 S は原点を通る直線であることを示せ。

(2) 複素数平面上の点 P(w) を直線 S に関して対称移動した点を Q(w') とする。このとき，w' を w と α を用いて表せ。

(2016 静岡大)

(1) (証明)

$(\Rightarrow)$

$z=\alpha^2\overline{z}$ のとき

$\dfrac{z}{\alpha}=\alpha\overline{z}$ が成り立ち

このとき

$$\overline{\left(\frac{z}{\alpha}\right)}=\overline{\alpha}z$$
$$=\overline{\alpha}\alpha^2\overline{z}$$
$$=|\alpha|^2\alpha\overline{z}$$
$$=\alpha\overline{z}\qquad(\because |\alpha|=1)$$
$$=\frac{z}{\alpha}$$

$\overline{\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)}=\dfrac{z}{\alpha}$ が成り立つので

$\dfrac{z}{\alpha}$ は実数である。

$(\Leftarrow)$

$\dfrac{z}{\alpha}$ が実数のとき

$\overline{\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)}=\dfrac{z}{\alpha}$ が成り立ち

$\alpha\overline{z}=\overline{\alpha}z$

両辺に α をかけると

$$\alpha^2\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}z$$
$$|\alpha^2|z=\alpha^2\overline{z}$$
$$z=\alpha^2\overline{z}\qquad(\because |\alpha|=1)$$

よって

$z=\alpha^2\overline{z}\iff\dfrac{z}{\alpha}\in\mathbb{R}$ ■

(証明1)

$z=\alpha^2\overline{z}\iff\dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}}=\dfrac{z}{\alpha}$

$\iff\alpha\overline{z}=\overline{\alpha}z$

ここで

$\alpha=a+bi$, $z=x+yi$

とおくと

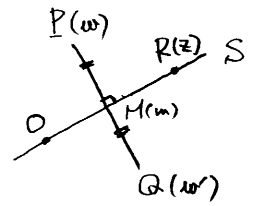
$$(a+bi)(x-yi)=(a-bi)(x+yi)$$
$$(ax+by)+(-ay+bx)i$$
$$=(ax+by)+(ay-bx)i$$
$$2(ay-bx)i=0$$

$a,b,x,y\in\mathbb{R}$ より

$ay-bx=0$

これは 原点 を通る直線 を表す。■

(2) (i) 点Pが 直線 S 上 にないとき



線分PQの中点 M(m)，

直線 S 上の点R(z) とおくと，

$$m=\frac{w+w'}{2}$$

点M は 直線 S 上 にあるので

$$m=\alpha^2\overline{m}$$
$$\frac{w+w'}{2}=\alpha^2\cdot\frac{\overline{w}+\overline{w'}}{2}$$
$$\overline{w}+\overline{w'}=\frac{w+w'}{\alpha^2}\quad\text{———}\ ①$$

(裏に続く)

OR⊥PQ より

$\dfrac{-w+w'}{-z}$ は純虚数

つまり

$$\frac{-\overline{w}+\overline{w'}}{-\overline{z}}=-\frac{-w+w'}{-z}$$

$$\frac{-\overline{w}+\overline{w'}}{-\overline{z}}=-\frac{-w+w'}{-\alpha^2\overline{z}}$$

$$\alpha^2(-\overline{w}+\overline{w'})=w-w'$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ここで ① より}\\ \overline{w'}=\dfrac{w+w'}{\alpha^2}-\overline{w}\end{array}\right)$$

$$-\alpha^2\overline{w}+w+w'-\alpha^2\overline{w}=w-w'$$

$$2w'=2\alpha^2\overline{w}$$

よって $w'=\alpha^2\overline{w}$

(ii) 点 P が直線 S 上のとき

$w=w'$ かつ $w=\alpha^2\overline{w}$

より $w'=\alpha^2\overline{w}$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{w'=\alpha^2\overline{w}}}$$

(1) (後半の証明2)

$\dfrac{z}{\alpha}\in\mathbb{R}$ より

$\dfrac{z}{\alpha}=t$ $(t\in\mathbb{R})$ とでき

$z=t\alpha$

A(α) とおくと

これは図形 S が原点と点 A を通る直線であることを示している。

■

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B19]

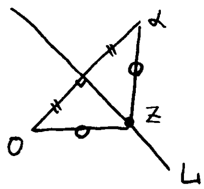
複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を0でない複素数とし，点 α と原点Oを結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から1点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1の3乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

(2017 東京大)

(1)



$$|z|=|-\alpha+z|$$

両辺を2乗して

$$|z|^2=|z-\alpha|^2$$

$$z\bar{z}=(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})$$

$$z\bar{z}=z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=\alpha\bar{\alpha}$$

(ここで

$w=\dfrac{1}{z}$ より

$z=\dfrac{1}{w}$ $(w\neq 0)$)

$$\frac{\bar{\alpha}}{w}+\frac{\alpha}{\bar{w}}=\alpha\bar{\alpha}$$

$$\bar{\alpha}\bar{w}+\alpha w=\alpha\bar{\alpha}w\bar{w}$$

$$\alpha\bar{\alpha}w\bar{w}-\alpha w-\bar{\alpha}\bar{w}=0$$

$$\begin{array}{c|cc} & \bar{\alpha}\bar{w} & -1 \\ \hline \alpha w & \alpha\bar{\alpha}w\bar{w} & -\alpha w \\ -1 & -\bar{\alpha}\bar{w} & 1 \end{array}$$

+1　+1

$$(\alpha w-1)(\bar{\alpha}\bar{w}-1)=1$$

$$|\alpha w-1|^2=1$$

よって

$$|\alpha w-1|=1$$

$$\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$$

(ただし $w\neq 0$)

よって，

中心 点 $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$

(2) $\boxed{\text{解法1}}$

$$\beta^3=1$$

$$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$$

$\beta\notin\mathbb{R}$ より

$$\beta^2+\beta+1=0$$

$$\beta=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

虚部が正なので

$$\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\beta^2=-\beta-1$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}-1$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z は動くので

$$z=\frac{-1+ki}{2}\quad(-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3})$$

とでき

$$w=\frac{1}{z}$$

$$=\frac{2}{-1+ki}$$

$$=\frac{2(-1-ki)}{1+k^2}$$

$$=\frac{-2-2ki}{1+k^2}$$

$w=x+yi$ とおくと

(裏に続く)

$x, y, k \in \mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2}{1+k^2} & \text{——①} \\ y = \dfrac{-2k}{1+k^2} & \text{——②} \end{cases}$$

② ÷ ① より

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{——③}$$

$-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$ より

$$-\sqrt{3} \leqq \frac{y}{x} \leqq \sqrt{3}.$$

① で $x < 0$ なので

$$-\sqrt{3}x \geqq y \geqq \sqrt{3}x.$$

① かつ ③ より

$$x = \frac{-2}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$x = \frac{-2x^2}{x^2+y^2}$$

$x \neq 0$ より

$$x^2+y^2 = -2x$$

$$(x+1)^2+y^2 = 1$$

（これと

$y = \pm\sqrt{3}x$ を連立すると

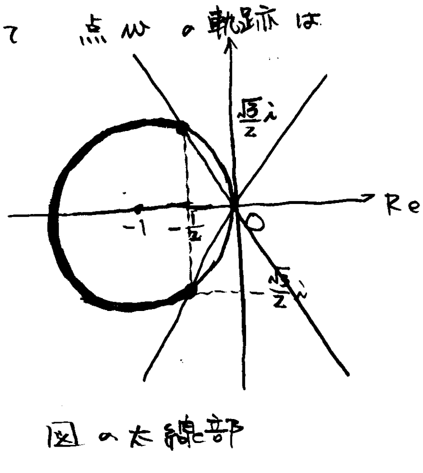
$x^2+3x^2 = -2x.$

$4x^2+2x = 0$

$2x(2x+1) = 0$

$x = 0,\ -\frac{1}{2}$ ）

よって 点 w の軌跡は



図の太線部

$\boxed{\text{解法2}}$ （β と β^2 の導出のあと）

点 β と点 β^2 を結ぶ線分は
2点 $0, -1$ を結ぶ線分の
垂直二等分線 と $|z| \leqq 1$ の
共通部分 であり

(1) で $\alpha = -1$ として

$$|w+1| = 1$$

は 点 (-1) を中心とする半径 1 の円

また，

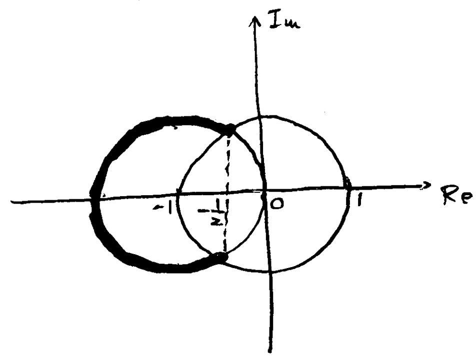
$|z| \leqq 1$ より

$$\left|\frac{1}{w}\right| \leqq 1$$

$$|w| \geqq 1$$

は 原点を中心とする半径 1 の円
の外部 及び 周

よって，点 w の軌跡は



図の太線部