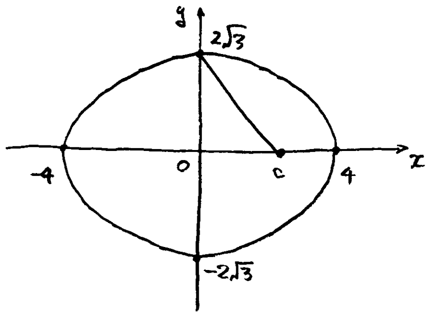
[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題7]

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ と焦点を共有し，点 $(\sqrt{15},\ 2)$ を通る楕円の方程式を求めよ。

(2) 漸近線の方程式が $py=x$，焦点の座標が $(5\sqrt{2},\ 0)$，$(-5\sqrt{2},\ 0)$ であり，かつ点 $(p,\ 0)$ を通る双曲線の方程式と，p の値を求めよ。

(1)



焦点 $(\pm c, 0)$ $(c>0)$

とおくと

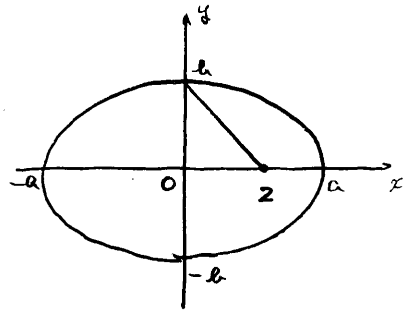
$c^2+(2\sqrt{3})^2=4^2$

$c^2+12=16$

$c^2=4$

よって $c=2$

つまり 焦点 $(\pm 2, 0)$



求める楕円の方程式

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおくと

$2^2+b^2=a^2$ より

$\dfrac{x^2}{b^2+4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

とでき，これが点 $(\sqrt{15}, 2)$ を通るので

$\dfrac{15}{b^2+4}+\dfrac{4}{b^2}=1$

$15b^2+4(b^2+4)=b^2(b^2+4)$

$b^4-15b^2-16=0$

$(b^2-16)(b^2+1)=0$

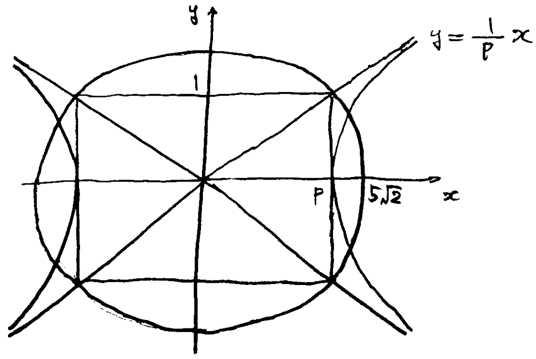
$b^2=16, -1$

$b^2>0$ より $b^2=16$

よって $\underline{\underline{\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1}}$

(2)

焦点 $(\pm 5\sqrt{2}, 0)$ より $p\neq 0$



$p^2+1=(5\sqrt{2})^2$

$p^2=49$

$p=\pm 7$

よって

$\underline{\underline{\dfrac{x^2}{49}-y^2=1}}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題8]

放物線 $x=y^2-y+1$ の頂点と焦点の座標，および，準線の方程式を求めよ。

$x = y^2 - y + 1$

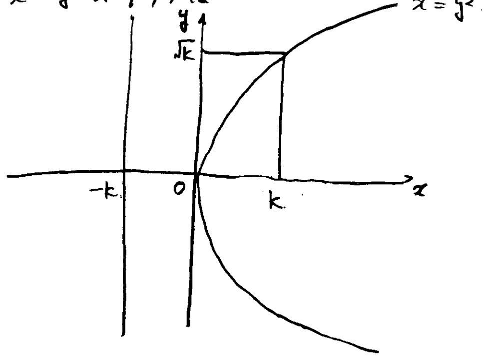
$x = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

これは 放物線 $x = y^2$ のグラフを

x軸方向に $\frac{3}{4}$，y軸方向に $\frac{1}{2}$

だけ平行移動したもの

$x = y^2$ のグラフは



焦点 $(k, 0)$ $(k>0)$ とおくと

$k : \sqrt{k} = 1 : 2$

$2k = \sqrt{k}$

両辺 2乗して

$4k^2 = k$

$k(4k-1) = 0$

$k > 0$ より

$k = \frac{1}{4}$

よって，

頂点 $(0, 0)$，焦点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$，準線 $x = -\frac{1}{4}$

$+\frac{3}{4}\downarrow \ \downarrow+\frac{1}{2}$ $\quad +\frac{3}{4}\downarrow \ \downarrow+\frac{1}{2}$ $\quad \downarrow+\frac{3}{4}$

$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad (1, \frac{1}{2})$ $\quad x = \frac{1}{2}$

つまり，放物線 $x = y^2 - y + 1$ の

頂点 $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$，焦点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$，準線 $x = \frac{1}{2}$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A28]

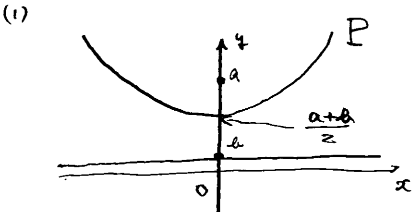
a，b を実数とし，$b<a$ とする。焦点が $(0,\ a)$，準線が $y=b$ である放物線を P で表す。

(1) 放物線 P の方程式を求めよ。

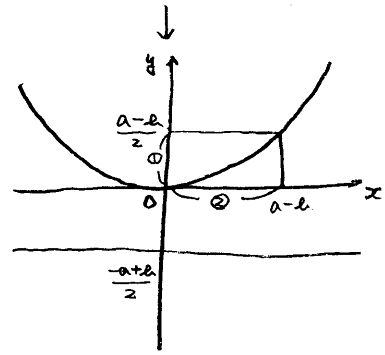
(2) 焦点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 $a-b$ の円を C とする。このとき，円 C と放物線 P の交点の座標を求めよ。

(3) 円 C と放物線 P で囲まれた図形のうち，放物線 P の上側にある部分の面積を求めよ。 (2015 愛知教育大)

(1)



↓



放物線 P を y軸方向に $-\frac{a+b}{2}$ だけ平行移動した放物線を $y=kx^2$ とおくと

焦点 $\left(0,\ \frac{a-b}{2}\right)$，準線 $y=\frac{-a+b}{2}$

であり

点 $\left(a-b,\ \frac{a-b}{2}\right)$ を通るので

$$\frac{a-b}{2}=k(a-b)^2$$

$a\neq b$ より

$$k=\frac{1}{2(a-b)}$$

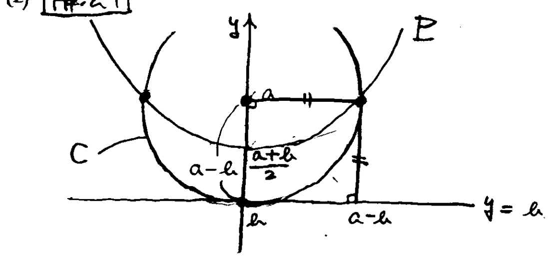
よって

$$y=\frac{1}{2(a-b)}x^2$$

よって

$$P:\ y=\frac{1}{2(a-b)}x^2+\frac{a+b}{2}$$

(2) 解法1



P上の点は，焦点 $(0,a)$ と準線 $y=b$ からの距離が等しく

上図より

交点 $(a-b,a)$，$(-a+b,a)$

解法2

$C:\ x^2+(y-a)^2=(a-b)^2$

$P:\ y=\frac{x^2}{2(a-b)}+\frac{a+b}{2}$ より

$$x^2=2(a-b)y-(a^2-b^2) \quad \text{——①}$$

C と P を連立して

$$2(a-b)y-a^2+b^2+y^2-2ay+a^2=a^2-2ab+b^2$$

$$y^2-2by-a^2+2ab=0$$

$$\begin{aligned} y&=b\pm\sqrt{b^2+a^2-2ab}\\ &=b\pm\sqrt{a^2-2ab+b^2}\\ &=b\pm|a-b|\\ &=a,\ -a+2b \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} &-a+2b-\frac{a+b}{2}\\ &=\frac{1}{2}(-3a+3b)\\ &=\frac{3}{2}(-a+b)<0 \quad \text{より}\\ &-a+2b<\frac{a+b}{2}\\ &\text{よって}\\ &y=-a+2b \quad \text{は不適} \end{aligned}\right)$$

よって $y=a$

(裏に続く)

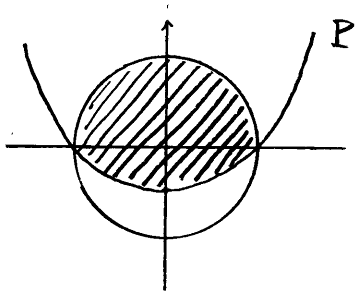
このとき ① より

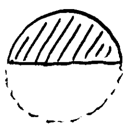
$$x^2 = 2(a-b)a-(a^2-b^2)$$
$$x^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$x^2 = (a-b)^2$$
$$x = \pm(a-b)$$

よって

$\underline{\underline{\text{交点 } (a-b,\ a),\ (-a+b,\ a)}}$

(3)



$=$  $+$ 

$$= \pi(a-b)^2 \times \frac{1}{2} + \int_{-a+b}^{a-b} \left\{ \frac{a+b}{2} - \left(\frac{1}{2(a-b)}x^2 + \frac{a+b}{2} \right) \right\} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2(a-b)} \int_{-a+b}^{a-b} (x-a+b)(x+a-b)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2(a-b)} \times \frac{1}{6}(2a-2b)^3$$

$$= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 + \frac{2}{3}(a-b)^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\pi+4}{6}(a-b)^2}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A29]

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1) $f(a)$ を a で表せ。

(2) $f(a)$ を a の関数とみなすとき，ab 平面上に曲線 $b=f(a)$ の概形をかけ。　（2009　筑波大）

(1)

$\mathrm{P}(x,y)$ は

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1.$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{x^2}{2}-1 \quad \text{———} ①$$

を満たす。

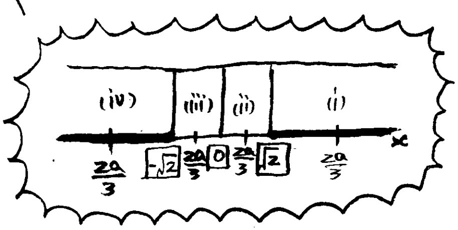
$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}&=\sqrt{(x-a)^2+y^2}\\
&=\sqrt{x^2-2ax+a^2+\frac{x^2}{2}-1}\\
&=\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2-1}\\
&=\sqrt{\frac{3}{2}\left\{x^2-\frac{4a}{3}x\right\}+a^2-1}\\
&=\sqrt{\frac{3}{2}\left\{\left(x-\frac{2a}{3}\right)^2-\frac{4a^2}{9}\right\}+a^2-1}\\
&=\sqrt{\frac{3}{2}\left(x-\frac{2a}{3}\right)^2+\frac{1}{3}a^2-1}
\end{aligned}$$

（ここで ① より

$$\frac{x^2}{2}-1\geqq 0$$

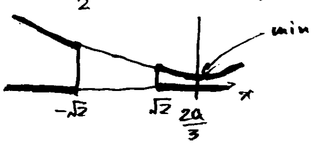
$$x^2-2\geqq 0$$

$$x\leqq-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\leqq x$$
）



(i) $\sqrt{2}\leqq\dfrac{2a}{3}$ のとき

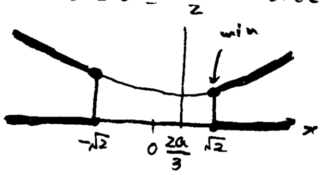
（i.e. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき）



$$\min \mathrm{AP}=\sqrt{\frac{1}{3}a^2-1}\quad \left(x=\frac{2a}{3}\right)$$

(ii) $0\leqq\dfrac{2a}{3}\leqq\sqrt{2}$ のとき

（i.e. $0\leqq a\leqq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき）



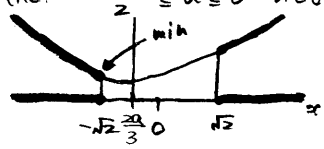
$$\min \mathrm{AP}=\sqrt{a^2-2\sqrt{2}a+2}\quad (x=\sqrt{2})$$

$$\min \mathrm{AP}=\sqrt{(a-\sqrt{2})^2}$$

$$=|a-\sqrt{2}|$$

(iii) $-\sqrt{2}\leqq\dfrac{2a}{3}\leqq 0$ のとき

（i.e. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき）



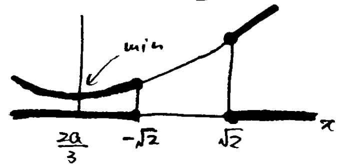
$$\min \mathrm{AP}=\sqrt{a^2+2\sqrt{2}a+2}\quad (x=-\sqrt{2})$$

$$=\sqrt{(a+\sqrt{2})^2}$$

$$=|a+\sqrt{2}|$$

(iv) $\dfrac{2a}{3}\leqq-\sqrt{2}$ のとき

（i.e. $a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき）



$$\min \mathrm{AP}=\sqrt{\frac{1}{3}a^2-1}\quad \left(x=\frac{2a}{3}\right)$$

(i) ～ (iv) より

$$f(a)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1} & \left(a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a \text{ のとき}\right)\\ |a-\sqrt{2}| & \left(0\leqq a\leqq\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき}\right)\\ |a+\sqrt{2}| & \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a\leqq 0 \text{ のとき}\right)\end{cases}$$

(2)

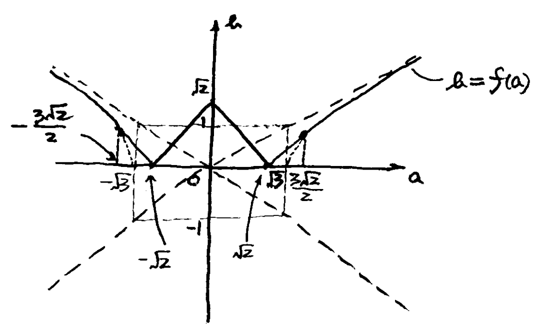
$a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき

$$b=\sqrt{\frac{1}{3}a^2-1}$$

$$\Leftrightarrow b^2=\frac{1}{3}a^2-1 \quad \text{かつ} \quad b\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3}-b^2=1 \quad \text{かつ} \quad b\geqq 0$$

よって



[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A30]

(1) 直線 $y=mx+n$ が楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に接するための条件を m, n を用いて表せ。

(2) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の直交する2つの接線の交点の軌跡を求めよ。

(2017 島根大)

(1) 解法1

2式を連立して

$x^2+\frac{1}{4}(mx+n)^2=1$

$4x^2+m^2x^2+2mnx+n^2=4$

$(m^2+4)x^2+2mnx+(n^2-4)=0$

接するとき, 判別式 $D=0$

となるとよく.

$D/4=(mn)^2-(m^2+4)(n^2-4)$

$=m^2n^2-(m^2n^2-4m^2+4n^2-16)$

$=4m^2-4n^2+16=0$

よって $\underline{\underline{m^2-n^2+4=0}}$

解法2

y軸方向に $\frac{1}{2}$倍すると.

$\begin{cases} 2y=mx+n \iff mx-2y+n=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

円の中心 $(0,0)$ と直線 $mx-2y+n=0$ との距離 d は

$d=\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+4}}$

半径 $r=1$

接するとき $d=r$ より

$\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+4}}=1$

$|n|=\sqrt{m^2+4}$

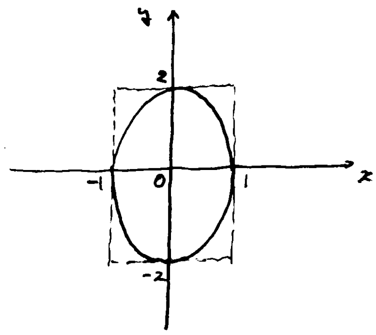
両辺2乗して

$n^2=m^2+4$

よって $\underline{\underline{m^2-n^2+4=0}}$

(2)

2接線の交点 (X,Y) とおくと.



$X\neq\pm1$ のとき

接線 $y-Y=m(x-X)$

$y=mx-mX+Y$

とでき,

(1)より

$m^2-(-mX+Y)^2+4=0$

$m^2-(m^2X^2-2mXY+Y^2)+4=0$

$(1-X^2)m^2+2XYm+(-Y^2+4)=0$

2接線が直交するとき,

解と係数の関係より,

$\dfrac{-Y^2+4}{1-X^2}=-1$

$-Y^2+4=-1+X^2$

$X^2+Y^2=5$

交点 (X,Y) は

$x^2+y^2=5$ ――― ①

を満たす.

$X=\pm1$ のとき

図より $Y=\pm2$

点 $(\pm1,\pm2)$ (複号任意)

は ① を満たす.

よって

求める軌跡は

$\underline{\underline{円\ x^2+y^2=5}}$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A31]

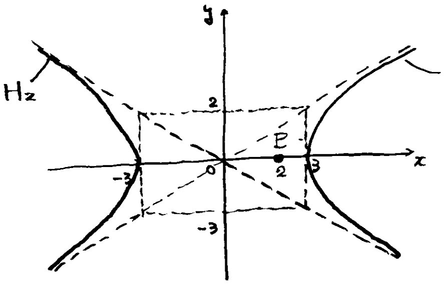
双曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$を$H$とし，$H$の$x>0$の部分を$H_1$，$H$の$x<0$の部分を$H_2$とする。また，$\ell$ を点P(2, 0)を通る傾きmの直線とする。

(1) 直線ℓがHと共有点を2個もつようなmの範囲を求めよ。

(2) 直線ℓ がH_1とH_2の両方と共有点をもつようなmの範囲を求めよ。

(3) 直線ℓ とH_1の共有点をP_1とし，ℓ とH_2の共有点をP_2とする。このとき，線分P_1P_2の中点Mは，ある2次曲線Cの上を動く。Cの方程式を求めよ。

(2012 静岡大)



(1)

ℓ: $y=m(x-2)$

とでき　H と連立すると

$$\frac{x^2}{9}-\frac{m^2}{4}(x-2)^2=1$$

$$4x^2-9m^2(x^2-4x+4)=36$$

$$(4-9m^2)x^2+36m^2x-36m^2-36=0 \quad \text{——※}$$

共有点を2個もつためには

$4-9m^2\neq 0$ —① かつ 判別式 $D>0$ —②

①より

$$m^2\neq\frac{4}{9}$$

$$m\neq\pm\frac{2}{3}$$

②より

$$\frac{D}{4}=(18m^2)^2-(4-9m^2)\cdot(-36)(m^2+1)$$

$$=18\times18m^4+36(4-9m^2)(m^2+1)>0$$

$$\cancel{9m^4}+4m^2+4-\cancel{9m^4}-9m^2>0$$

$$5m^2-4<0$$

$$(\sqrt{5}m+2)(\sqrt{5}m-2)<0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}<m<\frac{2}{\sqrt{5}}$$

①かつ②より

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}<m<-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<m<\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2) $\boxed{解法1}$

$m\neq\pm\frac{2}{3}$ のもとで

$$f(x)=x^2+\frac{36m^2}{4-9m^2}x-\frac{36(m^2+1)}{4-9m^2}$$

とおくと

$x\leqq-3$ と $3\leqq x$ で1つずつx軸と共有点をもつとよく

$f(-3)\leqq0$ ——③ かつ $f(3)\leqq0$ ——④

となるとよい。

③より

$$9-\frac{3\times36m^2}{4-9m^2}-\frac{36(m^2+1)}{4-9m^2}\leqq0$$

$$(4-9m^2)^2-12m^2(4-9m^2)-4(m^2+1)(4-9m^2)\leqq0$$

$$(4-9m^2)\left(4-9m^2-12m^2-4m^2-4\right)\leqq0$$

$$(4-9m^2)(-25m^2)\leqq0$$

$$m^2(9m^2-4)\leqq0$$

$$0\leqq m^2\leqq\frac{4}{9}$$

④より

$$9+\frac{3\times36m^2}{4-9m^2}-\frac{36(m^2+1)}{4-9m^2}\leqq0$$

$$(4-9m^2)\left(4-9m^2+12m^2-4m^2-4\right)\leqq0$$

$$(4-9m^2)(-m^2)\leqq0$$

$$m^2(9m^2-4)\leqq0$$

$$0\leqq m^2\leqq\frac{4}{9}$$

$m\neq\pm\frac{2}{3}$ に注意して

$$-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$$

(裏に続く)

(3) $\boxed{\text{解法1}}$

$M(X, Y)$, $P_1(\alpha, m(\alpha-2))$, $P_2(\beta, m(\beta-2))$

ただし　$\beta<0<\alpha$

とできる。

点Mは線分P_1P_2の中点であるので

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ Y = m\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} - 2\right) \end{cases}$$

であり。

α, βは※の2解であるので。

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = \frac{36m^2}{9m^2-4}$$

なので

$$X = \frac{18m^2}{9m^2-4}$$

$$Y = m\left(\frac{18m^2}{9m^2-4} - 2\right)$$

$$= m \times \frac{8}{9m^2-4}$$

$$= \frac{8m}{9m^2-4}$$

であり、

$m \neq 0$ のとき

$$\frac{X}{Y} = \frac{9}{4}m \quad \text{より}$$

$$m = \frac{4X}{9Y}$$

このとき

$$Y = \frac{\dfrac{32X}{9Y}}{\dfrac{16X^2}{9Y^2} - 4}$$

$$Y = \frac{32XY}{16X^2 - 36Y^2}$$

$m \neq 0$ のとき $Y \neq 0$ であり

$$16X^2 - 36Y^2 = 32X$$

$$4X^2 - 8X - 9Y^2 = 0$$

$$4(X-1)^2 - 9Y^2 = 4$$

$$(X-1)^2 - \frac{9Y^2}{4} = 1$$

ここで

$$0 < m^2 < \frac{4}{9} \quad \text{より。}$$

$$0 < \frac{16X^2}{81Y^2} < \frac{4}{9}$$

$$Y^2 - \frac{4}{9}X^2 > 0$$

$$\left(Y + \frac{2}{3}X\right)\left(Y - \frac{2}{3}X\right) > 0$$

$$\begin{cases} Y + \frac{2}{3}X > 0 \quad \text{かつ} \quad Y - \frac{2}{3}X > 0 \\ \quad \text{or} \\ Y + \frac{2}{3}X < 0 \quad \text{かつ} \quad Y - \frac{2}{3}X < 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} Y > -\frac{2}{3}X \quad \text{かつ} \quad Y > \frac{2}{3}X \\ \quad \text{or} \\ Y < -\frac{2}{3}X \quad \text{かつ} \quad Y < \frac{2}{3}X \end{cases}$$

よって　$M(X, Y)$ は

$$(x-1)^2 - \frac{9y^2}{4} = 1$$

ただし $\begin{cases} y > -\frac{2}{3}x \quad \text{かつ} \quad y > \frac{2}{3}x \\ \quad \text{or} \\ y < -\frac{2}{3}x \quad \text{かつ} \quad y < \frac{2}{3}x \end{cases}$

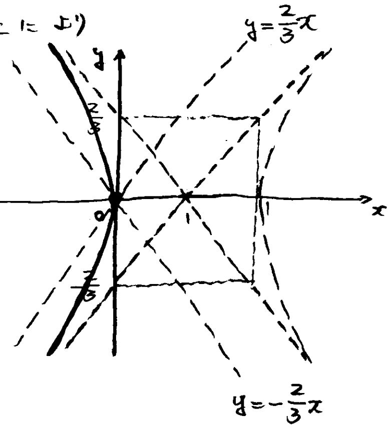
を満たす。

$m=0$ のとき

$X=0$ かつ $Y=0$ 　より

$M(0, 0)$ 　である。

以上により



よって

$$C: (x-1)^2 - \frac{9y^2}{4} = 1 \quad (x \leqq 0)$$

(次頁に続く)

(2) $\boxed{\text{解法2}}$

(1)のもとで ⊛ が 異符号の解 をもつとよいので
解と係数の関係 を用いて.

$$\frac{-36(m^2+1)}{4-9m^2}<0$$

$m^2+1>0$ なので

$4-9m^2>0$

$9m^2-4<0$

$(3m+2)(3m-2)<0$

$\underline{\underline{-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}}}$ (これは (1) を満たす.)

(3) $\boxed{\text{解法2}}$ (x の範囲)

$$x=\frac{18m^2}{9m^2-4}$$

$$=2+\frac{8}{9m^2-4}$$

ここで

$0<m^2<\frac{4}{9}$ より.

$-4<9m^2-4<0$

$$-2>\frac{8}{9m^2-4}$$

$$0>2+\frac{8}{9m^2-4}$$

よって

$x<0$

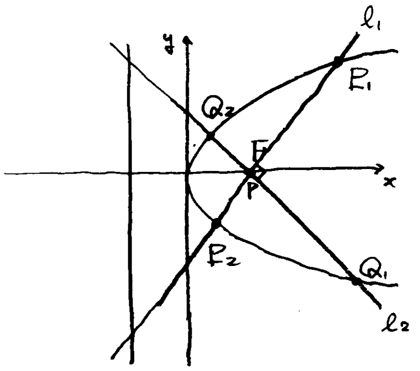
[三訂版オリジ・スタンIII受 例題4]

放物線C：$y^2=4px$ $(p>0)$ の焦点F$(p,\ 0)$を通る2直線ℓ_1，ℓ_2は互いに直交し，Cとℓ_1は2点P_1，P_2で，Cとℓ_2は2点Q_1，Q_2で交わるとする。

(1) ℓ_1の方程式を$x=ay+p$とおき，P_1，P_2の座標をそれぞれ$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$とする。y_1+y_2，y_1y_2をaとpで表せ。

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\dfrac{1}{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}$は$\ell_1$，$\ell_2$のとり方によらず一定であることを示せ。

(2013　早稲田大)



(1)

$C: y^2=4px$ と $\ell_1: x=ay+p$

を連立して

$y^2=4p(ay+p)$

$y^2-4apy-4p^2=0$

y_1, y_2 は この方程式の解 なので

解と係数の関係 より

$$\begin{cases} y_1+y_2=4ap \\ y_1y_2=-4p^2 \end{cases}$$

(2) (証明)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}_1}$

$=(p, 0)+(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$=(p+r\cos\theta, r\sin\theta)$

とでき，

点P_1 は $C: y^2=4px$ 上 より

$r^2\sin^2\theta=4p(p+r\cos\theta)$

$r^2\sin^2\theta-4pr\cos\theta-4p^2=0$

ℓ_1 と C は 異なる 2点 で 交わるので

$\sin\theta\neq 0$ として よく

$$r=\frac{2p\cos\theta\pm\sqrt{4p^2\cos^2\theta+4p^2\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2p\cos\theta\pm 2p}{\sin^2\theta}$$

$$r=\frac{2p(\cos\theta\pm 1)}{\sin^2\theta}$$

$r>0$ より

$$r=\frac{2p(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

よって

$$\mathrm{FP}_1=\frac{2p(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\mathrm{FP}_2=\frac{2p(1+\cos(\theta+\pi))}{\sin^2(\theta+\pi)}$$

$$=\frac{2p(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\mathrm{FQ}_1=\frac{2p\left(1+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{2p(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\mathrm{FQ}_2=\frac{2p\left(1+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{2p(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

このとき

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\mathrm{FP}_1+\mathrm{FP}_2$$

$$=\frac{4p}{\sin^2\theta}$$

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=\mathrm{FQ}_1+\mathrm{FQ}_2$$

$$=\frac{4p}{\cos^2\theta}$$

より

$$\frac{1}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\frac{1}{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}=\frac{\sin^2\theta}{4p}+\frac{\cos^2\theta}{4p}=\frac{1}{4p}\ (=一定)$$

■

(裏 に 続く)

(証明2)

l_1 と C は 異なる2点 で交わるから

$a \neq 0$

であり，$l_1 \perp l_2$ より

l_2: $x = -\dfrac{1}{a}y + p$

とできる.

このとき

$$P_1P_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= \{(ay_1 + p) - (ay_2 + p)\}^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= a^2(y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (a^2+1)(y_1 - y_2)^2$$

$$= (a^2+1)(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)$$

$$= (a^2+1)\{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2\}$$

$$= (a^2+1)(16a^2p^2 + 16p^2)$$

$$= 16(a^2+1)^2p^2$$

$P_1P_2 > 0$ かつ $p > 0$ より

$$P_1P_2 = 4(a^2+1)p$$

同様に

$$Q_1Q_2 = 4\left(\frac{1}{a^2} + 1\right)p$$

よって

$$\frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{Q_1Q_2} = \frac{1}{4(a^2+1)p} + \frac{a^2}{4(a^2+1)p}$$

$$= \frac{a^2+1}{4(a^2+1)p}$$

$$= \frac{1}{4p} \quad (= \text{一定})$$

■

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B32]

2つの双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$, $H : x^2 - y^2 = -1$ を考える。双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ は点Pを通らないことを示せ。

(2) 直線 ℓ と双曲線 C は異なる2点Q，Rで交わることを示し，△PQRの重心Gの座標を s，t を用いて表せ。

(3) (2)における3点G，Q，Rに対して，△GQRの面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

(2012 筑波大)

(1) (証明)

点 $P(s,t)$ は $H : x^2 - y^2 = -1$ 上より

$s^2 - t^2 = -1$ —— ①

を満たす。

直線 ℓ が点 P を通ると仮定すると

$s^2 - t^2 = 1$

となり ① に不合理

よって，

直線 ℓ は点 P を通らない。■

(2) (証明)

① $s^2 - t^2 = -1$ より

$t^2 = s^2 + 1 > 0$

よって $t \neq 0$

$\ell : sx - ty = 1$ より

$y = \frac{s}{t}x - \frac{1}{t}$

$C : x^2 - y^2 = 1$ と連立して

$x^2 - \left(\frac{s}{t}x - \frac{1}{t}\right)^2 = 1$

$t^2x^2 - (s^2x^2 - 2sx + 1) = t^2$

$(t^2 - s^2)x^2 + 2sx - 1 - t^2 = 0$

$x^2 + 2sx - t^2 - 1 = 0$

判別式 D として

$D/4 = s^2 + t^2 + 1 > 0$

よって，

直線 ℓ と双曲線 C は

異なる2点で交わる。■

2点Q，Rの x 座標をそれぞれ q，r とし，それは②の2解と一致する。

解と係数の関係より

$q + r = -2s$，$qr = -t^2 - 1$

また $\ell : y = \frac{s}{t}x - \frac{1}{t}$ より

$x = q$ のとき $y = \frac{sq - 1}{t}$

$x = r$ のとき $y = \frac{sr - 1}{t}$

よって

$P(s,t)$，$Q\left(q, \frac{sq-1}{t}\right)$，$R\left(r, \frac{sr-1}{t}\right)$

このとき

△PQRの重心Gの

$$(x座標) = \frac{s + q + r}{3} = \frac{s - 2s}{3} = -\frac{s}{3}$$

$$(y座標) = \frac{t + \frac{sq-1}{t} + \frac{sr-1}{t}}{3} = \frac{t^2 + s(q+r) - 2}{3t} = \frac{t^2 - 2s^2 - 2}{3t} = \frac{t^2 - 2(s^2+1)}{3t} = \frac{t^2 - 2t^2}{3t} = -\frac{t}{3}$$

よって $\underline{\underline{G\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)}}$

(裏に続く)

(3) （証明）

$$QR = \sqrt{(q-r)^2 + \frac{s^2(q-r)^2}{t^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s^2+t^2)(q-r)^2}{t^2}}$$

$$\left(\begin{aligned} &\text{ここで} \\ &(q-r)^2 = q^2 - 2qr + r^2 \\ &\quad = (q+r)^2 - 4qr \\ &\quad = 4s^2 + 4t^2 + 4 \\ &\quad = 4(s^2+t^2+1) \end{aligned}\right)$$

$$QR = \sqrt{\frac{4(s^2+t^2)(s^2+t^2+1)}{t^2}}$$

点 $G\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)$ と $\ell : sx - ty = 1$

との距離 d は

$$d = \frac{\left|-\frac{s^2}{3} + \frac{t^2}{3} - 1\right|}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \frac{|-(s^2-t^2)-3|}{3\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \frac{|-2|}{3\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{s^2+t^2}}$$

よって

$$S(\triangle GQR) = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot d$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4(s^2+t^2)(s^2+t^2+1)}{t^2}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{s^2+t^2+1}{t^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(s^2+1)+t^2}{t^2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2t^2}{t^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (=\text{一定})$$

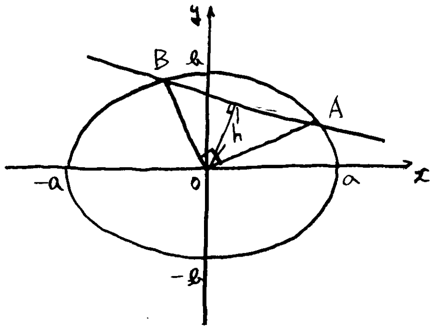
■

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B33]

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上に2点A，Bがある。原点Oと直線ABの距離を h とする。$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ であることを示せ。

(2) h を a，b を用いて表せ。 (2006 東京学芸大)



(1) (証明)

$S(\triangle OAB)$ を2通りに表して

$$\frac{1}{2}\times OA\times OB=\frac{1}{2}\times AB\times h$$

$$AB=\frac{OA\times OB}{h}$$

$\triangle OAB$ で三平方のTh より

$$AB^2=OA^2+OB^2$$

$$\frac{OA^2\times OB^2}{h^2}=OA^2+OB^2$$

よって

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$$

■

(2)

$A(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおくと

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるので

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)r^2=a^2b^2$$

$b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta\neq 0$ より

$$r^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

$r>0$ より

$$r=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

よって

$$OA=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

$$OB=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})+b^2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}}$$

$$=\frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

より (1) から

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{a^2b^2}+\frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$a>0,\ b>0,\ h>0$ より

$$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$