[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題9]

次の式で表される点 P$(x,\ y)$ は，どのような曲線を描くか。

(1) $\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta-2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{\cos\theta} \\ y=2\tan\theta \end{cases}$

(1)

$$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta-2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=x-1 \\ \sin\theta=y+2 \end{cases}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$(y+2)^2+(x-1)^2=1$

$(x-1)^2+(y+2)^2=1.$

よって P(x, y) の軌跡は

円 : $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

(2)

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\cos\theta} \\ y=2\tan\theta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{x}{3} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x^2}{9}$

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

よって．P(x, y) の軌跡は

双曲線 : $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題10]

$a>0$, $b>0$ とする。次の媒介変数表示

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\quad y=\frac{2bt}{1+t^2}$$

で表される曲線を C とする。

(1) $t=\tan\theta$ とおいて，x, y をそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $a=3$, $b=2$ のとき，C の概形をかけ。

(1)

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$=\frac{a(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{a\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=a\cos2\theta$$

$$y=\frac{2bt}{1+t^2}$$

$$=\frac{2b\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2b\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$=2b\sin\theta\cos\theta$$

$$=b\sin2\theta$$

よって

$$\begin{cases} x=a\cos2\theta \\ y=b\sin2\theta \end{cases}$$

(2)

$$C:\begin{cases} x=3\cos2\theta \\ y=2\sin2\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \cos2\theta=\frac{x}{3} \\ \sin2\theta=\frac{y}{2} \end{cases}$$

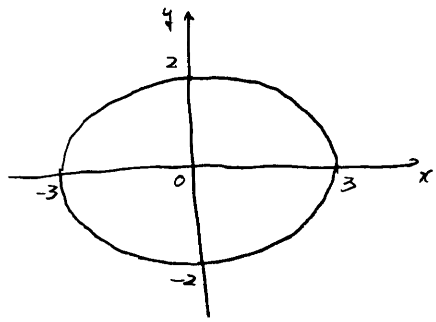
$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$ より

$$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

よって，

Cの概形は下図の通り.



[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A34]

媒介変数 t を用いて $x=\sin 2t$, $y=\sin 5t$ と表される座標平面上の曲線を C とする。C と y 軸が交わる座標平面上の点の個数を求めよ。 (2010 産業医科大)

$x=0$ となるのは

$\sin 2t=0$ より

$2t=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$

$t=\frac{n}{2}\pi$

このとき

$$
\begin{aligned}
y&=\sin 5t\\
&=\sin\frac{5n}{2}\pi\\
&=\sin\left(2n\pi+\frac{n}{2}\pi\right)\\
&=\sin\frac{n}{2}\pi\\
&=\begin{cases}1 & (n=4m+1)\\ 0 & (n=4m,\ 4m+2)\\ -1 & (n=4m+3)\end{cases} \quad (m\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

より、C と y軸の交点は

$(0,1),(0,0),(0,-1)$ に限る

よって

3個

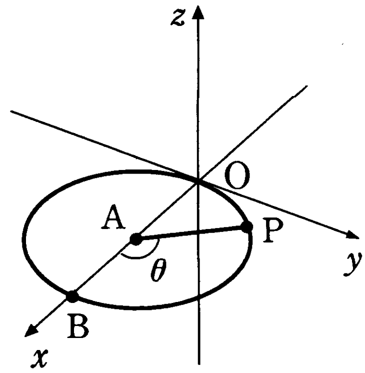
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A35]

点Oを原点とし，x軸，y軸，z軸を座標軸とする座標空間において，3点A(1, 0, 0)，B(2, 0, 0)，C(1, 0, 1)がある。

点Aを中心とするxy平面上の半径1の円周上に点Pをとり，図のように$\theta=\angle BAP$とおく。ただし，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$とする。また，直線CPと$yz$平面の交点をQとおく。

(1) 点P，Qの座標をそれぞれθを用いて表せ。

(2) θの値が$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$の範囲で変化するとき，$yz$平面における点Qの軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ。



(2015 佐賀大)

(1)

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=(1,0,0)+(\cos\theta,\sin\theta,0)$

$=(1+\cos\theta,\sin\theta,0)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}$

$=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CP}$ $(k\in\mathbb{R})$

$=\overrightarrow{OC}+k(-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP})$

$=(1-k)\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{OP}$

$=(1-k)(1,0,1)+k(1+\cos\theta,\sin\theta,0)$

$=(1-k,0,1-k)+(k+k\cos\theta,k\sin\theta,0)$

$=(1+k\cos\theta,k\sin\theta,1-k)$

点Qはyz平面上にあるので

$1+k\cos\theta=0$

$k\cos\theta=-1$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ で $\cos\theta\neq0$ より

$k=-\frac{1}{\cos\theta}$

このとき

$\overrightarrow{OQ}=\left(0,-\frac{\sin\theta}{\cos\theta},1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$=\left(0,-\tan\theta,1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$

よって

$P(1+\cos\theta,\sin\theta,0),\ Q\left(0,-\tan\theta,1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$

(2)

$Q(0,Y,Z)$ とおくと

$\begin{cases}Y=-\tan\theta\\ Z=1+\frac{1}{\cos\theta}\end{cases}\iff\begin{cases}\tan\theta=-Y\\ \frac{1}{\cos\theta}=Z-1\end{cases}$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1+Y^2=(Z-1)^2$

$Y^2-(Z-1)^2=-1$

ここで

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ より

$-1\leqq\cos\theta<0$

$-1\geqq\frac{1}{\cos\theta}$

$Z-1\leqq-1$

$Z\leqq0$

よって

$Q(0,Y,Z)$ は

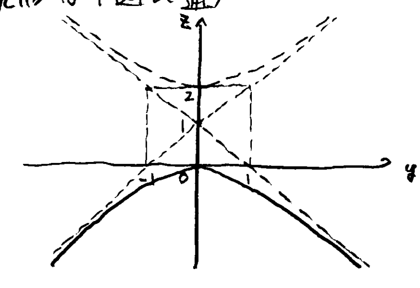
$y^2-(z-1)^2=-1$ かつ $z\leqq0$ かつ $x=0$

を満たす。

よって Qの軌跡は

双曲線：$y^2-(z-1)^2=-1$ $(z\leqq0)$ かつ $x=0$

概形は下図の通り



[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A36]

媒介変数 θ を用いて $x=\sqrt{2}\cos\theta$, $y=\sqrt{3}\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ で表される曲線を C とする。

(1) C と x 軸との交点の座標を求めよ。また, C と y 軸との交点の座標を求めよ。

(2) C 上の点 $(x,\ y)$ に対して, $x-y$ のとる値の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ。

(3) C 上の点 $(x,\ y)$ に対して, $(x+y)(x-y)$ のとる値の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ。

(2016 徳島大)

(1)

x 軸との交点は $y=0$ として

$\sqrt{3}\sin\theta=0$

$\sin\theta=0$

$0\leqq\theta\leqq2\pi$ で

$\theta=0,\pi,2\pi$

$\theta=0$ のとき $x=\sqrt{2}\cos0=\sqrt{2}$

$\theta=\pi$ のとき $x=\sqrt{2}\cos\pi=-\sqrt{2}$

$\theta=2\pi$ のとき $x=\sqrt{2}\cos2\pi=\sqrt{2}$

よって $\underline{(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)}$

y 軸との交点は $x=0$ として

$\sqrt{2}\cos\theta=0$

$\cos\theta=0$

$0\leqq\theta\leqq2\pi$ で

$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき $y=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{3}$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき $y=\sqrt{3}\sin\frac{3}{2}\pi=-\sqrt{3}$

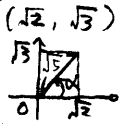
よって $\underline{(0,\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})}$

(2)

$x-y=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

$=\sqrt{5}\cos(\theta+\alpha)$

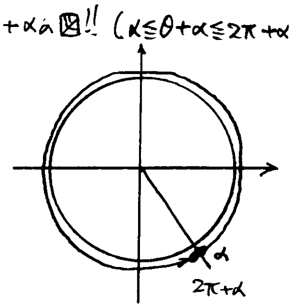
$(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$



$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\theta+\alpha$ の図!! $(\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq2\pi+\alpha)$



$$\begin{cases}\text{Max }(x-y)=\sqrt{5} & (\theta+\alpha=0 \text{ のとき})\\ \text{min }(x-y)=-\sqrt{5} & (\theta+\alpha=\pi \text{ のとき})\end{cases}$$

$\theta+\alpha=0$ のとき

$\theta=-\alpha$

このとき

$x=\sqrt{2}\cos(-\alpha)$
$=\sqrt{2}\cos\alpha$
$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$y=\sqrt{3}\sin(-\alpha)$
$=-\sqrt{3}\sin\alpha$
$=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\theta+\alpha=\pi$ のとき

$\theta=\pi-\alpha$

このとき

$x=\sqrt{2}\cos(\pi-\alpha)$
$=-\sqrt{2}\cos\alpha$
$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$y=\sqrt{3}\sin(\pi-\alpha)$
$=\sqrt{3}\sin\alpha$
$=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

よって

$$\begin{cases}\text{Max }(x-y)=\sqrt{5} & \left((x,y)=\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right)\\ \text{min }(x-y)=-\sqrt{5} & \left((x,y)=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right)\end{cases}$$

(3)

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

$=2\cos^2\theta-3\sin^2\theta$

$=2\cos^2\theta-3(1-\cos^2\theta)$

$=5\cos^2\theta-3$

$0\leqq\theta\leqq2\pi$ で

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

より

$$\begin{cases}\text{Max }(x+y)(x-y)=2 & (\cos\theta=\pm1)\\ \text{min }(x+y)(x-y)=-3 & (\cos\theta=0)\end{cases}$$

より

$$\begin{cases}\text{Max }(x+y)(x-y)=2 & ((x,y)=(\pm\sqrt{2},0))\\ \text{min }(x+y)(x-y)=-3 & ((x,y)=(0,\pm\sqrt{3}))\end{cases}$$

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点Pから直線 $x-2\sqrt{3}\,y+8=0$ に下ろした垂線の長さの最大値と最小値を求めよ。また，それぞれの場合に，点Pの座標を求めよ。 (1998 北海道大)

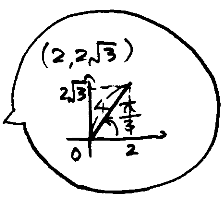
$P(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

と直線 $x-2\sqrt{3}y+8=0$ との距離 d は

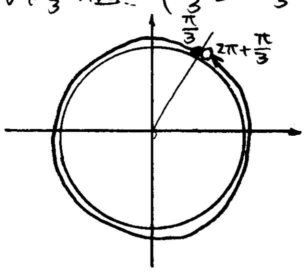
$$d=\frac{|2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta+8|}{\sqrt{1+12}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\left|4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+8\right|$$

$$=\frac{4}{\sqrt{13}}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\right|$$



$\theta+\frac{\pi}{3}$ の図!! $\left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$



$-1\leqq\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$ より

$1\leqq\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\leqq 3$

$$\begin{cases}\text{Max } d=\dfrac{12}{\sqrt{13}} & \left(\theta+\dfrac{\pi}{3}=2\pi\right)\\ \text{min } d=\dfrac{4}{\sqrt{13}} & \left(\theta+\dfrac{\pi}{3}=\pi\right)\end{cases}$$

$\theta+\frac{\pi}{3}=2\pi$ のとき

$\theta=\frac{5}{3}\pi$

$$\begin{cases}x=2\cos\frac{5}{3}\pi=1\\ y=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$\theta+\frac{\pi}{3}=\pi$ のとき

$\theta=\frac{2}{3}\pi$

$$\begin{cases}x=2\cos\frac{2}{3}\pi=-1\\ y=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

よって

$$\begin{cases}\text{Max } d=\dfrac{12}{\sqrt{13}} & \left(P\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{ のとき}\right)\\ \text{min } d=\dfrac{4}{\sqrt{13}} & \left(P\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B37]

xy 平面上の曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と表される。

(1) 曲線 C を表す x と y の関係式を求め，xy 平面に図示せよ。

(2) 点 $(2,\ 0)$ から曲線 C に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。 (2013 琉球大)

(1)

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{3}\cos\theta \\ x-2y=\sqrt{6}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y) \\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}(x-2y) \end{cases}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\frac{1}{6}(x-2y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^2=1$$

$$x^2-4xy+4y^2+2(x^2+2xy+y^2)=6$$

$$3x^2+6y^2=6$$

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1 \quad\text{———} ①$$

ここで $0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$$-1\leqq\cos\theta\leqq1$$

$$0\leqq\sin\theta\leqq1$$

であり

$$0\leqq\frac{1}{\sqrt{6}}(x-2y)\leqq1$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}x$$

① と $y=\frac{1}{2}x$ を連立して

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x^2=1$$

$$\frac{3}{4}x^2=1$$

$$x^2=\frac{4}{3}$$

$$x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

① と $y=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{6}}{2}$ を連立して

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^2-2\sqrt{6}x+6}{4}=1$$

$$3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$$

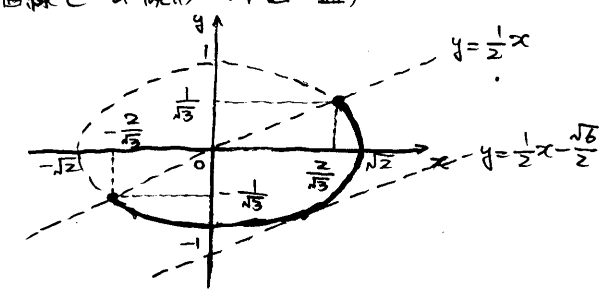
$$(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2=0$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって

$$C:\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\quad\left(y\leqq\frac{1}{2}x\right)$$

曲線 C の概形は下図の通り



(2)

接点 (x_1,y_1) とおくと

接線 $\frac{x_1x}{2}+y_1y=1$

とでき，$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$ ——— ②

を満たす。

接線は点 $(2,0)$ を通るので，

$$x_1=1$$

このとき ② より

$$\frac{1}{2}+y_1^2=1$$

$$y_1^2=\frac{1}{2}$$

$$y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで

点 $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のうち

C 上にあるのは点 $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

よって

接線：$\frac{x}{2}-\frac{y}{\sqrt{2}}=1$，接点 $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

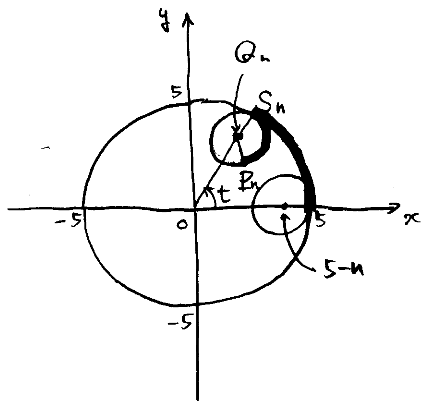
[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B38]

座標平面上に原点Oを中心とする半径5の円Cがある。$n=2$ または $n=3$ とし，半径nの円C_nが円Cに内接して滑ることなく回転していくとする。円C_n上に点P_nがある。最初，円C_nの中心O_nが$(5-n,\ 0)$に，点P_nが$(5,\ 0)$にあったとして，円C_nの中心が円Cの内部を反時計回りにn周して，もとの位置に戻るものとする。円Cと円C_nの接点をS_nとし，線分OS_nがx軸の正の方向となす角をtとする。

(1) 点P_nの座標をtとnを用いて表せ。

(2) 点P_2の描く曲線と点P_3の描く曲線は同じであることを示せ。

(2011　大阪大)



(1)

円C_nの中心Q_n，$\angle P_nQ_nS_n=\alpha$

とおくと

$5t=n\alpha$　より

$\alpha=\dfrac{5t}{n}$

$\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{OQ_n}+\overrightarrow{Q_nP_n}$

$=(5-n)(\cos t,\ \sin t)$

$\quad+n\left(\cos\left(t-\dfrac{5t}{n}\right),\ \sin\left(t-\dfrac{5t}{n}\right)\right)$

$=\left((5-n)\cos t+n\cos\left(t-\dfrac{5t}{n}\right),\ (5-n)\sin t+n\sin\left(t-\dfrac{5t}{n}\right)\right)$

よって

$\underline{\underline{P_n\left((5-n)\cos t+n\cos\left(t-\dfrac{5t}{n}\right),\ (5-n)\sin t+n\sin\left(t-\dfrac{5t}{n}\right)\right)}}$

(2) (証明)

$P_2\left(3\cos t+2\cos\left(-\dfrac{3}{2}t\right),\ 3\sin t+2\sin\left(-\dfrac{3}{2}t\right)\right)$

$=\left(3\cos t+2\cos\dfrac{3}{2}t,\ 3\sin t-2\sin\dfrac{3}{2}t\right)$　$(0\leqq t\leqq 4\pi)$

$P_3\left(2\cos t+3\cos\left(-\dfrac{2}{3}t\right),\ 2\sin t+3\sin\left(-\dfrac{2}{3}t\right)\right)$

$=\left(2\cos t+3\cos\dfrac{2}{3}t,\ 2\sin t-3\sin\dfrac{2}{3}t\right)$　$(0\leqq t\leqq 6\pi)$

P_2で

$t=4\pi-\dfrac{2}{3}u$　とおくと

$3\cos t+2\cos\dfrac{3}{2}t$

$=3\cos\left(4\pi-\dfrac{2}{3}u\right)+2\cos(6\pi-u)$

$=3\cos\dfrac{2}{3}u+2\cos u$

$=2\cos u+3\cos\dfrac{2}{3}u$

$3\sin t-2\sin\dfrac{3}{2}t$

$=3\sin\left(4\pi-\dfrac{2}{3}\pi\right)-2\sin(6\pi-u)$

$=-3\sin\dfrac{2}{3}u+2\sin u$

$=2\sin u-3\sin\dfrac{2}{3}u$

$0\leqq t\leqq 4\pi$　より

$0\leqq 4\pi-\dfrac{2}{3}u\leqq 4\pi$

$-4\pi\leqq -\dfrac{2}{3}u\leqq 0$

$0\leqq u\leqq 6\pi$

よって

$P_2\left(2\cos u+3\cos\dfrac{2}{3}u,\ 2\sin u-3\sin\dfrac{2}{3}u\right)$

$(0\leqq u\leqq 6u)$

とでき，

P_2とP_3の描く曲線は一致する。■