[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題11]

極方程式 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ が表す図形を直交座標 $(x,\ y)$ に図示せよ。

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$$

$$\sqrt{2}r-r\sin\theta=1$$

$$\sqrt{2}r=1+r\sin\theta$$

両辺を2乗して

$$2r^2=(1+r\sin\theta)^2$$

よって

$$2(x^2+y^2)=(1+y)^2$$

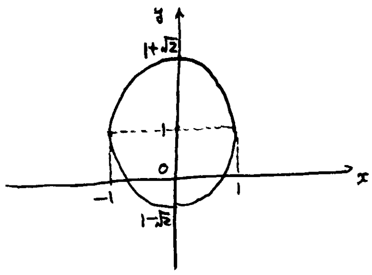
$$2x^2+2y^2=1+2y+y^2$$

$$2x^2+y^2-2y=1$$

$$2x^2+(y-1)^2=2$$

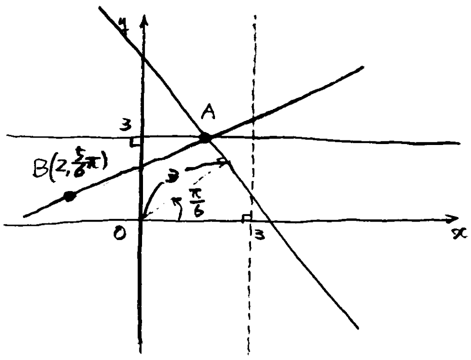
$$x^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

よって、概形は下図の通り



[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題12]

2 直線 $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=3$, $r\sin\theta=3$ の交点 A と点 $\mathrm{B}\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ を通る直線の極方程式を求めよ。



解法1

$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=3$ より

$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=3$

$\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta+\frac{1}{2}r\sin\theta=3$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として

$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=3$

$y=-\sqrt{3}x+6$ ——— ①

$r\sin\theta=3$ より

$y=3$ ——— ②

①, ② を連立して

$3=-\sqrt{3}x+6$

$\sqrt{3}x=3$

$x=\sqrt{3}$

よって $A(\sqrt{3}, 3)$

$B\left(2, \frac{5}{6}\pi\right)$ を直交座標で表すと

$B\left(2\cos\frac{5}{6}\pi, 2\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

$=(-\sqrt{3}, 1)$

よって

AB: $y-3=\frac{3-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$

$y-3=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$

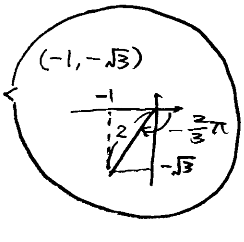
$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$

よって

$r\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta+2$

$r\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)=2\sqrt{3}$

$r\times 2\cos\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)=2\sqrt{3}$



よって $\underline{r\cos\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}}$

解法2

$\begin{cases} r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=3 & \text{——— ③} \\ r\sin\theta=3 & \text{——— ④} \end{cases}$

より

$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=r\sin\theta$

$r\neq 0$ なので

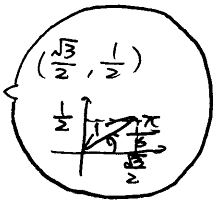
$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta$

$\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\sin\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=0$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$



$r>0$ で ④ より.

$0\leqq\theta\leqq\pi$ としてよく

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$ より.

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

このとき ③, ④ を満たすのは

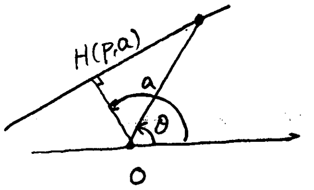
$r=2\sqrt{3}$

よって $A\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

求める直線 l に原点から引いた垂線の足

$H(p, \alpha)$ とすると.

（裏に続く）



$\ell: r\cos(a-\theta)=p$

$r\cos(\theta-a)=p$

とでき.

2点 $A\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2,\frac{5}{6}\pi\right)$ を通るので

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=p & \text{—— ⑤} \\ 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-a\right)=p & \text{—— ⑥} \end{cases}$$

を満たし, ⑤,⑥ を連立して.

$2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-a\right)$

$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos a+\sin\frac{\pi}{3}\sin a\right)$

$=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi\cos a+\sin\frac{5}{6}\pi\sin a\right)$

$2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a+\frac{1}{2}\sin a\right)$

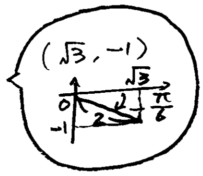
$\sqrt{3}\cos a+3\sin a=-\sqrt{3}\cos a+\sin a$

$2\sqrt{3}\cos a+2\sin a=0$

$\sqrt{3}\cos a+\sin a=0$

$2\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)=0$



($p>0$ のもとで ⑤,⑥ を満たすとき.

$-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{\pi}{3}-a\leqq\frac{\pi}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{5}{6}\pi-a\leqq\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{6}\pi\leqq -a\leqq\frac{\pi}{6}$ かつ $-\frac{4}{3}\pi\leqq -a\leqq -\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{5}{6}\pi$ かつ $\frac{\pi}{3}\leqq a\leqq\frac{4}{3}\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\leqq a\leqq\frac{4}{3}\pi$)

$\frac{\pi}{6}\leqq a-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$ より

$a-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$a=\frac{2}{3}\pi$

このとき ⑤,⑥ を満たすのは

$p=\sqrt{3}$

よって

$\ell: r\cos\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A39]

(1) 極方程式 $r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$ の表す曲線を，直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，その概形を図示せよ。

(2) 原点を O とする。(1) の曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から直線 $x=a$ に下ろした垂線を PH とし，$k=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ とおく。点 P が (1) の曲線上を動くとき，k が一定となる a の値を求めよ。また，そのときの k の値を求めよ。 (2004 徳島大)

(1)

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$$ より

$$2r+\sqrt{6}\,r\cos\theta=\sqrt{6}$$

$$2r=\sqrt{6}(1-r\cos\theta)$$

両辺 2乗して

$$4r^2=6(1-r\cos\theta)^2$$

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

とおくと

$$4(x^2+y^2)=6(1-x)^2$$

$$2x^2+2y^2=3(1-2x+x^2)$$

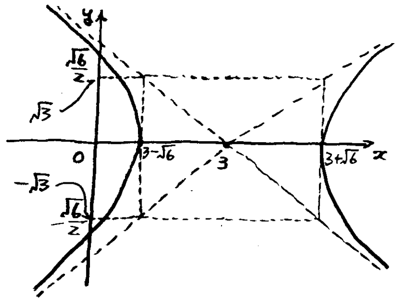
$$x^2-6x+3-2y^2=0$$

$$(x-3)^2-2y^2=6$$

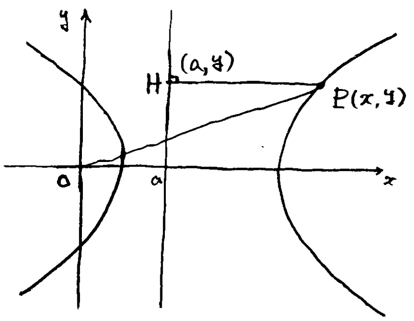
よって

$$\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$$

概形は下図の通り



(2)



$\mathrm{P}(x,y)$ は $\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ —— ①

を満たす。

$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{PH}=|x-a|$

① より

$$y^2=\frac{1}{2}(x-3)^2-3=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}$$

このとき

$$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3x^2-6x+3}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}(x^2-2x+1)}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}(x-1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}|x-1|$$

よって

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{|x-1|}{|x-a|}$$

これが一定となるとき

$a=1$

であり，このとき

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

よって

$$a=1,\ k=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A40]

xy 平面において，2点 $F_1(a,\ a)$，$F_2(-a,\ -a)$ からの距離の積が一定値 $2a^2$ となるような点Pの軌跡を C とする。ただし，$a>0$ である。

(1) 直交座標 $(x,\ y)$ に関しての C の方程式を求めよ。

(2) 原点を極とし x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ に関しての C の極方程式を求めよ。

(3) 点Pが第1象限内にあるとき，Pは点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円の周または内部にあることを証明せよ。

(2005 鹿児島大)

(1)

$P(x,y)$ とおくと

$F_1P \times F_2P = 2a^2$ より

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\times\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=2a^2$$

両辺2乗して

$$\{(x-a)^2+(y-a)^2\}\{(x+a)^2+(y+a)^2\}=4a^4$$

$$(x^2-a^2)^2+(x-a)^2(y+a)^2+(x+a)^2(y-a)^2+(y^2-a^2)^2=4a^4$$

$$x^4-2a^2x^2+a^4+(x^2-2ax+a^2)(y^2+2ay+a^2)$$
$$+(x^2+2ax+a^2)(y^2-2ay+a^2)+y^4-2a^2y^2+a^4=4a^4$$

$$x^4-2a^2x^2+\cancel{a^4}+x^2y^2+2ax^2y+a^2x^2-2axy^2-4a^2xy-2a^3x$$
$$+a^2y^2+2a^3y+\cancel{a^4}+x^2y^2-2ax^2y+a^2x^2+2axy^2-4a^2xy$$
$$+2a^3x+a^2y^2-2a^3y+\cancel{a^4}+y^4-2a^2y^2+\cancel{a^4}=\cancel{4a^4}$$

$$x^4+(\cancel{-2a^2}+y^2+\cancel{2ay}+\cancel{a^2}+y^2-\cancel{2ay}+\cancel{a^2})x^2$$
$$+(\cancel{-2ay^2}-4a^2y\cancel{-2a^3}+\cancel{2ay^2}-4a^2y+\cancel{2a^3})x$$
$$+(\cancel{a^2y^2}+\cancel{2a^3y}+\cancel{a^2y^2}-\cancel{2a^3y}+y^4-\cancel{2a^2y^2})=0$$

$$x^4+2x^2y^2-8a^2xy+y^4=0$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4-8a^2xy=0$$

よって．$P(x,y)$ は

$$x^4+2x^2y^2+y^4-8a^2xy=0$$

を満たす．

つまり

$$C: x^4+2x^2y^2+y^4-8a^2xy=0$$

(2)

$$C: (x^2+y^2)^2-8a^2xy=0$$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくと．

$$(r^2)^2-8a^2r^2\cos\theta\sin\theta=0$$

$$r^2(r^2-8a^2\cos\theta\sin\theta)=0$$

$$r^2=0,\ 8a^2\cos\theta\sin\theta$$

$$r=0,\ r^2=4a^2\sin2\theta$$

$r^2=4a^2\sin2\theta$ で

$\theta=0$ のとき $r=0$ となるので

$$C: r^2=4a^2\sin2\theta$$

(3)（証明）

P が第1象限にあるとき．

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

であり．

点 $\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2}\right)$ を中心とする半径 a の円の極方程式は．

$$r=2a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2a\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2a\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt2}\sin\theta\right)$$
$$=\sqrt2a(\cos\theta+\sin\theta)$$

ここで

$$\left(\sqrt2a(\cos\theta+\sin\theta)\right)^2-4a^2\sin2\theta$$
$$=2a^2(1+2\sin\theta\cos\theta)-4a^2\sin2\theta$$
$$=2a^2(1-\sin2\theta)\geqq0$$

よって

第1象限の点 P は

点 $\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2}\right)$ を中心とする半径 a の円の周または内部にある．■

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A41]

原点をOとする座標平面において，次の極方程式で表される2つの曲線を考える。

$$r=f(\theta)=3\cos\theta,\quad r=g(\theta)=1+\cos\theta$$

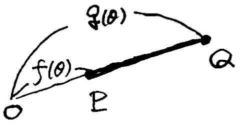
ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。また，極座標が$(f(\theta),\ \theta)$，$(g(\theta),\ \theta)$ である点をそれぞれP，Qとする。

(1) 点P$(f(\theta),\ \theta)$ と点Q$(g(\theta),\ \theta)$ の間の距離の最大値と最小値を求めよ。

(2) 線分PQの中点が原点Oとなるとき，点Pの直交座標を求めよ。

(2014 金沢工業大)

(1) $\boxed{\text{解法1}}$



$$PQ=|1+\cos\theta-3\cos\theta|$$
$$=|2\cos\theta-1|$$

$0\leqq\theta<2\pi$ で

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より

$-3\leqq2\cos\theta-1\leqq1$

$0\leqq|2\cos\theta-1|\leqq3$

よって

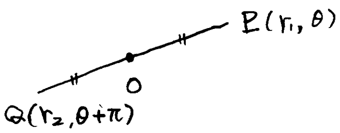
$0\leqq PQ\leqq3$

$$\begin{cases}\mathrm{Max}\ PQ=3 & (\cos\theta=-1)\\ \mathrm{min}\ PQ=0 & (\cos\theta=\frac{1}{2})\end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases}\mathrm{Max}\ PQ=3 & (\theta=\pi)\\ \mathrm{min}\ PQ=0 & (\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi)\end{cases}$$

(2)



$$f(\theta)=g(\theta+\pi)$$

となるとよく

$$3\cos\theta=1+\cos(\theta+\pi)$$
$$3\cos\theta=1-\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{1}{4}$$

よって

$$P\left(\frac{3}{4},\ \alpha\right)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{ただし } \alpha \text{ は } \cos\alpha=\frac{1}{4},\ \sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\\ \text{を満たす角}\end{array}\right)$

よって，点Pの直交座標は

$$P\left(\frac{3}{16},\ \pm\frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$$

(1) $\boxed{\text{解法2}}$

P$(3\cos\theta,\ \theta)$ を直交座標で

P$(3\cos^2\theta,\ 3\cos\theta\sin\theta)$

Q$(1+\cos\theta,\ \theta)$ を直交座標で

Q$((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1+\cos\theta)\sin\theta)$

$$PQ^2=\{3\cos^2\theta-(1+\cos\theta)\cos\theta\}^2+\{3\cos\theta\sin\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta\}^2$$
$$=(2\cos\theta-1)^2\cos^2\theta+(2\cos\theta-1)^2\sin^2\theta$$
$$=(2\cos\theta-1)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=(2\cos\theta-1)^2$$

$$PQ=|2\cos\theta-1|$$

(あとは同様)

(2) $\boxed{\text{解法2}}$

直交座標で

P$(3\cos^2\theta,\ 3\cos\theta\sin\theta)$，Q$((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1+\cos\theta)\sin\theta)$

であり 線分PQの中点は

$$\left(\frac{3\cos^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta}{2},\ \frac{3\cos\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\sin\theta}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{(1+4\cos\theta)\cos\theta}{2},\ \frac{(1+4\cos\theta)\sin\theta}{2}\right)$$

(裏に続く)

これが原点に一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{(1+4\cos\theta)\cos\theta}{2} = 0 \\ \dfrac{(1+4\cos\theta)\sin\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+4\cos\theta)\cos\theta = 0 \quad \text{——①} \\ (1+4\cos\theta)\sin\theta = 0 \quad \text{——②} \end{cases}$$

① より

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}, 0$$

(i) $\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ のとき、②も満たし、

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$ であり

$$P\left(\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$$

(ii) $\cos\theta = 0$ のとき

② は $\sin\theta = 0$

これを満たす θ は存在しない。

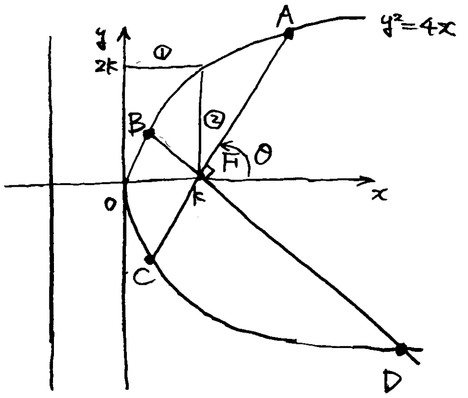
(i), (ii) より

$$\underline{\underline{P\left(\frac{3}{16}, \pm\frac{3\sqrt{15}}{16}\right)}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 例題6]

放物線 $y^2=4x$ ……Ⓐ上に4点があり，y座標の大きい順にA，B，C，Dとする。
ACとBDはⒶの焦点Fで垂直に交わり，$\overrightarrow{FA}$がx軸の正の方向となす角をθとする。
(1) AFをθで表せ。
(2) $\dfrac{1}{AF\cdot CF}+\dfrac{1}{BF\cdot DF}$ は一定であることを示せ。

(2007 名古屋工業大)



(1) [解法1]

焦点F$(k,0)$ $(k>0)$ とおくと

Ⓐ $y^2=4x$ は点$(k,2k)$を通るので

$4k^2=4k$

$4k(k-1)=0$

$k=0,1$

$k>0$ より $k=1$

よって，焦点F$(1,0)$

$A(x,y)$，$FA=r$ とおくと

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FA}$

$(x,y)=(1,0)+(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$(x,y)=(1+r\cos\theta,r\sin\theta)$

$A(x,y)$は$y^2=4x$を満たすので

$r^2\sin^2\theta=4(1+r\cos\theta)$

$r^2\sin^2\theta-4r\cos\theta-4=0$

ACとBDが焦点Fで垂直に交わるためには $\sin\theta\neq0$ より

$$r=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\pm2}{\sin^2\theta}$$

$r>0$ より

$$r=\frac{2\cos\theta+2}{\sin^2\theta}$$

よって

$$AF=\frac{2(\cos\theta+1)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2}{1-\cos\theta}$$

(2)（証明）

$AF=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ より，

$$CF=\frac{2}{1-\cos(\theta+\pi)}=\frac{2}{1+\cos\theta}$$

$$BF=\frac{2}{1-\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{2}{1+\sin\theta}$$

$$DF=\frac{2}{1-\cos(\theta-\frac{\pi}{2})}=\frac{2}{1-\sin\theta}$$

よって

$$\frac{1}{AF\cdot CF}+\frac{1}{BF\cdot DF}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{1+\sin\theta}{2}\cdot\frac{1-\sin\theta}{2}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{4}+\frac{1-\sin^2\theta}{4}$$

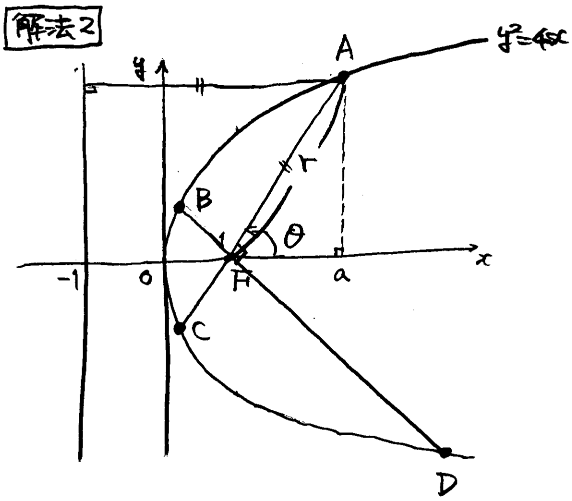
$$=\frac{2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\ (=一定)$$

■

(裏に続く)

(1) 解法2



(点Aの x 座標) $= a$ とおくと.

放物線の定義から

$a+1=r$

$a=r-1.$

$r\cos\theta = a-1.$

$r\cos\theta = r-2$

$r(1-\cos\theta)=2.$

ACとBDが焦点Fで垂直に交わるためには

$\cos\theta \neq 1$

より

$r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$

つまり

$$AF=\frac{2}{1-\cos\theta}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B42]

実数b, d, αをとり，$b>0$, $d\geqq 0$とする。曲線Cを極方程式 $\dfrac{1}{r}=b\cos(\theta-\alpha)+d$ によって定める。

(1) $d=0$とした曲線C'を直交座標に関する方程式に書き直すと，$^{ア}\boxed{}\times x+{}^{イ}\boxed{}\times y-1=0$ になる。

すなわち，C'は直線である。

(2) $d>0$とする。曲線C上の点Pから直線C'へ垂線PHを下ろす。PHをb, d, rを用いて表すと，

$\mathrm{PH}={}^{ウ}\boxed{}$ となる。したがって，$\dfrac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}}={}^{エ}\boxed{}$ となり，この比はr, θによらない一定の値をとる。

このことから，$b={}^{オ}\boxed{}$ のとき，曲線Cは放物線である。

(2003 慶応義塾大)

(1)

$d=0$ のとき

$C' : \dfrac{1}{r}=b\cos(\theta-\alpha)$

$br\cos(\theta-\alpha)=1$

$br(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=1$

$b\cos\alpha(r\cos\theta)+b\sin\alpha(r\sin\theta)=1$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと

$(b\cos\alpha)x+(b\sin\alpha)y=1$

よって

$C' : \underline{\underline{(b\cos\alpha)x+(b\sin\alpha)y-1=0}}$

となり，C'は直線を表す。

(2)

C上の点$P(r,\theta)$ を直交座標に直すと

$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ であり

直線C'との距離 PH は

$$\mathrm{PH}=\frac{|(b\cos\alpha)r\cos\theta+(b\sin\alpha)r\sin\theta-1|}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{|br(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)-1|}{\sqrt{b^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}}$$

$$=\frac{|br\cos(\alpha-\theta)-1|}{|b|}$$

$$=\frac{|br\cos(\theta-\alpha)-1|}{b} \quad (\because b>0)$$

ここで

$C : \dfrac{1}{r}=b\cos(\theta-\alpha)+d$ より

$br\cos(\theta-\alpha)+dr=1$

$br\cos(\theta-\alpha)-1=-dr$

$$\mathrm{PH}=\frac{|-dr|}{b}$$

$$=\underline{\underline{\frac{d|r|}{b}}} \quad (\because d\geqq 0)$$

このとき

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}}=\frac{\frac{d|r|}{b}}{|r|}=\underline{\underline{\frac{d}{b}}} \quad (=一定)$$

ここで

$b=d$ のとき

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}}=1$$

つまり $\mathrm{PH}=\mathrm{OP}$

となり

曲線Cは定直線C'と原点Oからの距離が等しい。

よって

原点Oを焦点，直線C'を準線とする放物線を表す。

よって $\underline{\underline{b=d}}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B43]

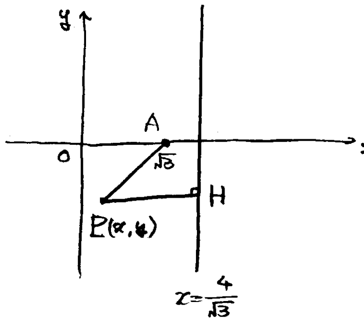
(1) 直交座標において，点 A$(\sqrt{3},\ 0)$ と準線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3}:2$ である点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2) (1) における A を極，x 軸の正の部分の半直線 AX とのなす角 θ を偏角とする極座標を定める。このとき，P の軌跡を $r=f(\theta)$ の形の極方程式で求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$，$r>0$ とする。

(3) A を通る任意の直線と (1) で求めた曲線との交点を R，Q とする。このとき，$\dfrac{1}{\mathrm{RA}}+\dfrac{1}{\mathrm{QA}}$ は一定であることを示せ。

(1997 帯広畜産大)

(1)



点Pから準線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ に下ろした垂線の足 H$\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ y\right)$ とおくと，

$\mathrm{AP}:\mathrm{PH}=\sqrt{3}:2$ より

$2\mathrm{AP}=\sqrt{3}\,\mathrm{PH}$

$2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}=\sqrt{3}\left|x-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right|$

両辺 2乗して

$4(x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2)=3\left(x^2-\dfrac{8}{\sqrt{3}}x+\dfrac{16}{3}\right)$

$4x^2-8\sqrt{3}x+12+4y^2=3x^2-8\sqrt{3}x+16$

$x^2+4y^2=4$

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

よって，P(x, y) の軌跡は

楕円：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$(x, y)=(\sqrt{3}, 0)+(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$(x, y)=(\sqrt{3}+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

点Pは $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上にあるので

$\dfrac{(\sqrt{3}+r\cos\theta)^2}{4}+(r\sin\theta)^2=1$

$3+2\sqrt{3}r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta=4$

$r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)+2\sqrt{3}r\cos\theta-1=0$

$r^2(4-3\cos^2\theta)+2\sqrt{3}r\cos\theta-1=0$

$4-3\cos^2\theta\neq0$ より

$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm\sqrt{3\cos^2\theta+4-3\cos^2\theta}}{4-3\cos^2\theta}$

$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm2}{4-3\cos^2\theta}$

$r>0$ より

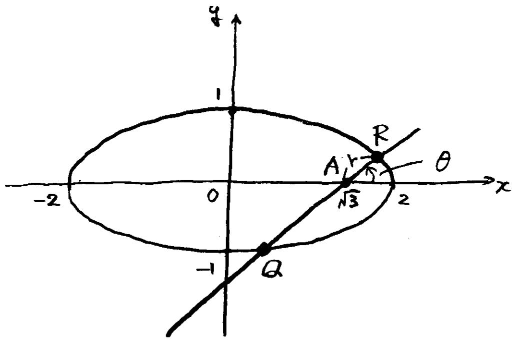
$r=\dfrac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{4-3\cos^2\theta}$

$r=\dfrac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{(2+\sqrt{3}\cos\theta)(2-\sqrt{3}\cos\theta)}$

$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$

(裏に続く)

(3) （証明）



$R(r, \theta)$ とすると.

(2) より

$$RA = \frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$$

$$QA = \frac{1}{2+\sqrt{3}\cos(\theta+\pi)}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$$

よって

$$\frac{1}{RA} + \frac{1}{QA} = (2+\sqrt{3}\cos\theta) + (2-\sqrt{3}\cos\theta)$$

$$= 4 \quad (=一定)$$

■