[三訂版オリジ・スタンⅢ受 演習問題44]

曲線 $C: x^2+3y^2=4$ と，その上の点 P(1, 1) を考える。実数 m に対して，P を通る傾き m の直線を ℓ_m とし，ℓ_m と C との交点で，P と異なるものを $Q_m(a_m, b_m)$ とおく。ただし，ℓ_m が C と接する場合には，$Q_m=P$ と決めることにする。

(1) 曲線 C の P における接線の方程式を求めよ。

(2) Q_m の座標 (a_m, b_m) を m を用いて表せ。

(3) m が有理数のとき，a_m，b_m はともに有理数であることを示せ。

(4) a_m，b_m がともに有理数のとき，m は有理数であることを示せ。

(2017 高知大)

(1)

$C: x^2+3y^2=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$

上の点 P(1,1) における接線は

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{3y}{4}=1$

(2)

$\ell_m: y-1=m(x-1)$

$y=mx-m+1$

$C: x^2+3y^2=4$ と連立して

$x^2+3(mx-m+1)^2=4$

$x^2+3(m^2x^2+m^2+1-2m^2x-2m+2mx)=4$

$(1+3m^2)x^2+(-6m^2+6m)x+(3m^2-6m-1)=0$

$(x-1)\left((1+3m^2)x-(3m^2-6m-1)\right)=0$

$x\neq 1$ のとき

$x=\dfrac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}$

このとき

$y=m\times\dfrac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}-m+1$

$=\dfrac{\cancel{3m^3}-6m^2-m-\cancel{3m^3}-m+3m^2+1}{3m^2+1}$

$=\dfrac{-3m^2-2m+1}{3m^2+1}$

よって

$Q_m\left(\dfrac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}, \dfrac{-3m^2-2m+1}{3m^2+1}\right)$

(3) (証明)

$a_m=\dfrac{3m^2-6m-1}{3m^2+1}$, $b_m=\dfrac{-3m^2-2m+1}{3m^2+1}$

であり

有理数は四則について閉じているので

$m\in\mathbb{Q}$ のとき $a_m, b_m\in\mathbb{Q}$ ■

(4) (証明)

ℓ_m の傾き m は

$m=\dfrac{b_m-1}{a_m-1}$

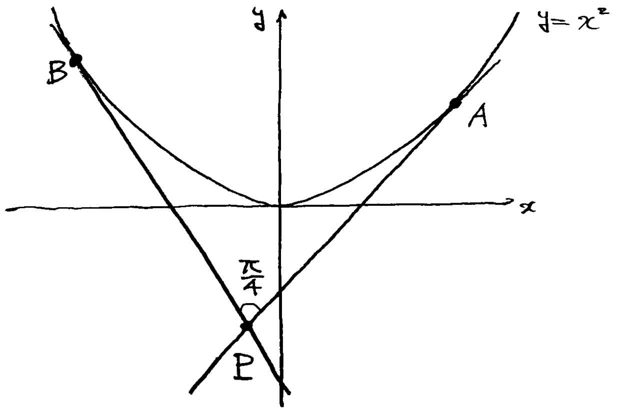
であり

$a_m, b_m\in\mathbb{Q}$ のとき

$m\in\mathbb{Q}$ である。■

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 演習問題45]

点Pは，Pから放物線 $y=x^2$ に2本の接線を引くことができ，それらの接点をA，Bとするとき，$\angle APB=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら動く。このような点Pの軌跡を求めよ。 (2013 静岡大)



$P(X, Y)$, $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$

(ただし，$b<a$ とする.)

とおく

接点 $A(a, a^2)$

$y'=2x$

$y'_{(x=a)}=2a$

より，点Aにおける接線 l_A は

$y-a^2=2a(x-a)$

$y=2ax-a^2$

同様に，点Bにおける接線 l_B は

$y=2bx-b^2$

2直線 l_A と l_B が x 軸正の向きとのなす角をそれぞれ α, β として

$\tan\alpha=2a$, $\tan\beta=2b$

$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしており

$\tan(\beta-\alpha)=\tan\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=1$

$2b-2a=1+4ab$

$2(b-a)=1+4ab$ ――― ①

l_A と l_B を連立して

$2ax-a^2=2bx-b^2$

$2(a-b)x=a^2-b^2$

$a\neq b$ より

$x=\dfrac{a+b}{2}$

このとき

$y=2a\times\dfrac{a+b}{2}-a^2$

$=ab$

よって

$X=\dfrac{a+b}{2}$, $Y=ab$

$\Leftrightarrow a+b=2X$, $ab=Y$

a, b を解とする2次方程式は

$u^2-2Xu+Y=0$

a, b は相異なる実数なので判別式 $D>0$ となるとよい.

$D/4=X^2-Y>0$

よって $Y<X^2$ ――― ②

また ① で $b<a$ より

$1+4ab<0$

$1+4Y<0$

$Y<-\dfrac{1}{4}$ ――― ③

この条件のもと ① の両辺を2乗して

$4(a^2-2ab+b^2)=1+8ab+16a^2b^2$

$4\{(a+b)^2-4ab\}=1+8ab+16a^2b^2$

$4(a+b)^2=1+24ab+16a^2b^2$

$16X^2=1+24Y+16Y^2$

$16X^2-16Y^2-24Y=1$

$16X^2-16\left(Y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-8$

$2X^2-2\left(Y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ ――― ④

② かつ ③ かつ ④ より

$2X^2-2\left(Y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ かつ $Y<-\dfrac{1}{4}$

よって $P(X, Y)$ は

$2x^2-2\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ かつ $y<-\dfrac{1}{4}$

を満たす.

よって Pの軌跡は

双曲線弧：$2x^2-2\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ $\left(y<-\dfrac{1}{4}\right)$

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。 (2015 東京大)

解法1

$x=k$ で固定して

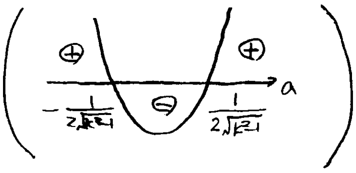
$$y=ak^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$
$$=k^2a+\frac{1}{4a}-a$$
$$=(k^2-1)a+\frac{1}{4a}$$

を a の関数 とみると

$$y'=k^2-1-\frac{1}{4a^2}$$
$$=\frac{4(k^2-1)a^2-1}{4a^2}$$

(i) $k^2-1>0$ のとき

($i.e.$ $k<-1, 1<k$ のとき)



a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}$	$\cdots$	(∞)
y'		$-$		$+$	
y	(∞)	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{k^2-1}$	↗	(∞)

$a=\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}$ のとき

$$y=(k^2-1)\times\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}+\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{k^2-1}$$

よって $y\geqq\frac{3}{2}\sqrt{k^2-1}$

x を動かすと

$$y\geqq\frac{3}{2}\sqrt{x^2-1}$$

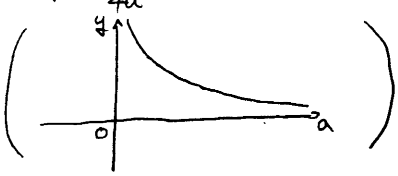
$y\geqq 0$ のもとで 両辺 2乗して

$$y^2\geqq\frac{9}{4}(x^2-1)$$
$$\frac{4}{9}y^2\geqq x^2-1$$
$$x^2-\frac{4y^2}{9}\leqq 1$$

(ii) $k^2-1=0$ のとき

($i.e.$ $k=\pm1$ のとき)

$$y=\frac{1}{4a}$$



よって

$y>0$

(iii) $k^2-1<0$ のとき

($i.e.$ $-1<k<1$ のとき)

$y'<0$ であり

a	(0)	$\cdots$	(∞)
y'		$-$	
y	(∞)	↘	$(-\infty)$

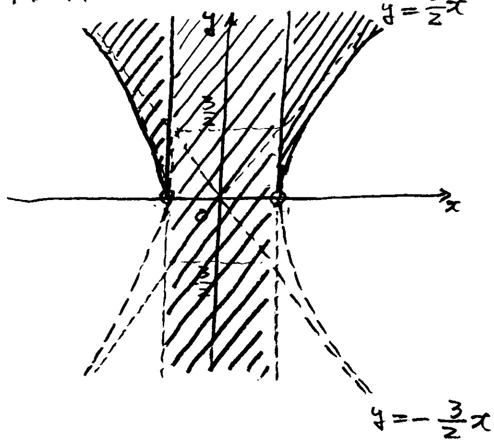
よって y はすべての実数

(i)〜(iii) より

C の通過領域 は 図の斜線部

ただし，境界 は 実線部 を含み

破線部 を含まない．



(裏 に 続く)

$\boxed{\text{解法2}}$

Cの通過する点 (X, Y) とおくと.

$$Y = aX^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

$$4aY = 4a^2X^2 + 1 - 4a^2$$

$$(4X^2-4)a^2 - 4Ya + 1 = 0$$

$$4(X^2-1)a^2 - 4Ya + 1 = 0 \quad \text{——①}$$

$a>0$ で解をもつとよい.

(I) $X^2-1=0$ のとき.

(i.e. $X=\pm 1$ のとき)

①は

$$-4Ya+1=0$$

$Y=0$ のとき

$$0\cdot a + 1 = 0$$

となり, $a>0$ で解をもたない

ので $Y \neq 0$ としてよく.

このとき

$$a = \frac{1}{4Y} > 0$$

よって $Y>0$.

つまり

(X, Y) は

$X=\pm 1,\ Y>0$ を満たす.

(II) $X^2-1 \neq 0$ のとき.

(i.e. $X \neq \pm 1$ のとき)

①は.

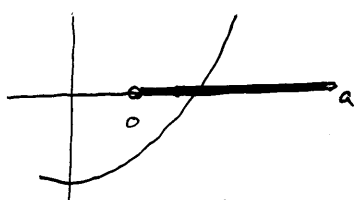
$$a^2 - \frac{Y}{X^2-1}a + \frac{1}{4(X^2-1)} = 0$$

とでき.

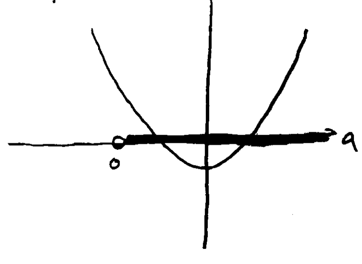
$$f(a) = a^2 - \frac{Y}{X^2-1}a + \frac{1}{4(X^2-1)}$$

とおくと.

(i)



(ii)



(i) $\dfrac{Y}{2(X^2-1)} \leqq 0$ ——② のとき.

$f(0)<0$ となるとよく.

$$\frac{1}{4(X^2-1)} < 0.$$

$$X^2-1<0.$$

$$-1<X<1$$

このとき ② は.

$$Y \geqq 0$$

(ii) $\dfrac{Y}{2(X^2-1)} > 0$ ——③ のとき.

判別式 $D \geqq 0$ となるとよく.

$$\left(-\frac{Y}{X^2-1}\right)^2 - 4\times\frac{1}{4(X^2-1)} \geqq 0.$$

$$Y^2 - (X^2-1) \geqq 0.$$

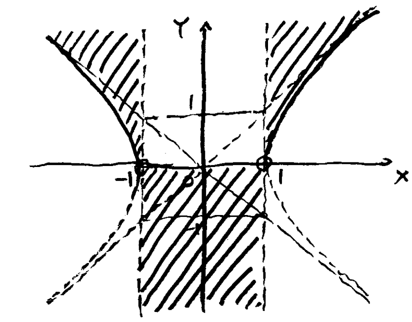
$$X^2 - Y^2 \leqq 1.$$

このとき ③ は

$$(X^2-1)Y > 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2-1>0 \\ Y>0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} X^2-1<0 \\ Y<0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X<-1,\ 1<X \\ Y>0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} -1<X<1 \\ Y<0 \end{cases}$$

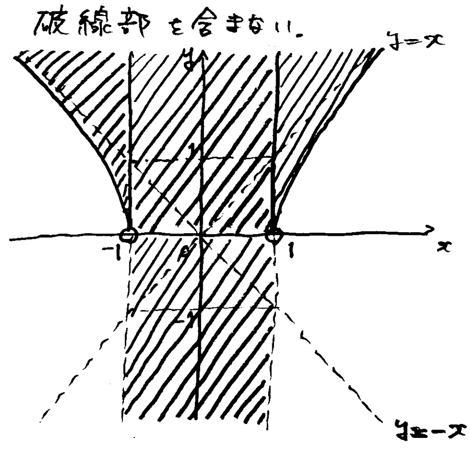


(I), (II)(i), (ii) より.

Cの通過領域は図の斜線部

ただし, 境界は実線部を含む

破線部を含まない.



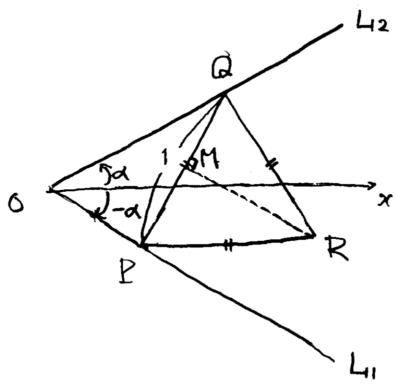
[三訂版オリジ・スタンIII受 演習問題47]

平面の原点Oを端点とし，x軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし，0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点P，L_2 上に点Qを線分PQの長さが1となるようにとり，点Rを，直線PQに対し原点Oの反対側に△PQRが正三角形になるようにとる。

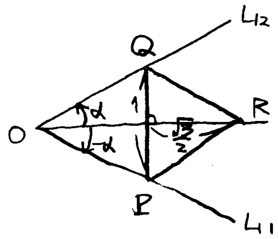
(1) 線分PQがx軸と直交するとき，点Rの座標を求めよ。

(2) 2点P，Qが線分PQの長さを1に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点Rの軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

(2008 東京工業大)



(1)



$OQ=r$ とすると

$Q(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

であり

$PQ=1$ より

$$r\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$\sin\alpha\neq 0$ より

$$r=\frac{1}{2\sin\alpha}$$

このとき

$$OR=r\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より

$$\underline{\underline{R\left(\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)}}$$

(2) (証明)

$OQ=r$，$OP=s$ とおくと．

△OPQ で 余弦Th より

$$1=r^2+s^2-2rs\cos2\alpha \quad \text{——①}$$

を満たしており．

$Q(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

$P(s\cos(-\alpha),\ s\sin(-\alpha))=(s\cos\alpha,\ -s\sin\alpha)$

線分PQの中点 M は

$$M\left(\frac{r+s}{2}\cos\alpha,\ \frac{r-s}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

$$=(-s\cos\alpha,\ s\sin\alpha)+(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$$

$$=((r-s)\cos\alpha,\ (r+s)\sin\alpha)$$

であり．

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{MR}$，$|\overrightarrow{PQ}|=1$，$|\overrightarrow{MR}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\overrightarrow{MR}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left((r+s)\sin\alpha,\ (-r+s)\cos\alpha\right)$$

よって，$R(X,Y)$ とおくと

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR}$$

$$=\left(\frac{r+s}{2}\cos\alpha,\ \frac{r-s}{2}\sin\alpha\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(s+r)\sin\alpha,\ \frac{\sqrt{3}}{2}(s-r)\cos\alpha\right)$$

$$=\left(\frac{r+s}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha),\ \frac{r-s}{2}(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)\right)$$

より．

$$\begin{cases} X=\dfrac{r+s}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha) \\ Y=\dfrac{r-s}{2}(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha) \end{cases}$$

(裏に続く．

ここで

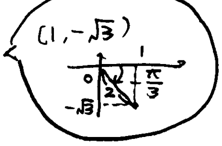
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right)=A \\ \frac{1}{2}\left(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\right)=B \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} X=A(r+s) \\ Y=B(r-s) \end{cases}$$

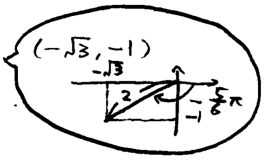
であり,

$$A=\frac{1}{2}\times 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$



$$=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$B=\frac{1}{2}\times 2\cos\left(\alpha-\frac{5}{6}\pi\right)$$



$$=\cos\left(\alpha-\frac{5}{6}\pi\right)$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より

$$-\frac{\pi}{3}<\alpha-\frac{\pi}{3}<0 \quad , \quad -\frac{5}{6}\pi<\alpha-\frac{5}{6}\pi<-\frac{\pi}{2}$$

よって $A\neq 0$, $B\neq 0$

$$\begin{cases} r+s=\frac{X}{A} \\ r-s=\frac{Y}{B} \end{cases} \iff \begin{cases} r=\frac{1}{2}\left(\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}\right) \\ s=\frac{1}{2}\left(\frac{X}{A}-\frac{Y}{B}\right) \end{cases}$$

① に代入して

$$1=\frac{1}{4}\left(\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{X}{A}-\frac{Y}{B}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{A^2}-\frac{Y^2}{B^2}\right)\cos 2\alpha$$

$$4=\frac{X^2}{A^2}+\cancel{\frac{2XY}{AB}}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{X^2}{A^2}-\cancel{\frac{2XY}{AB}}+\frac{Y^2}{B^2}-\frac{2\cos 2\alpha}{A^2}X^2+\frac{2\cos 2\alpha}{B^2}Y^2$$

$$\left(\frac{2}{A^2}-\frac{2\cos 2\alpha}{A^2}\right)X^2+\left(\frac{2}{B^2}+\frac{2\cos 2\alpha}{B^2}\right)Y^2=4$$

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2A^2}X^2+\frac{1+\cos 2\alpha}{2B^2}Y^2=1$$

よって $R(X, Y)$ は

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2A^2}x^2+\frac{1+\cos 2\alpha}{2B^2}y^2=1$$

を満たす.

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2A^2}>0 \quad , \quad \frac{1+\cos 2\alpha}{2B^2}>0$$ より.

点Rの軌跡は楕円の一部である. ■

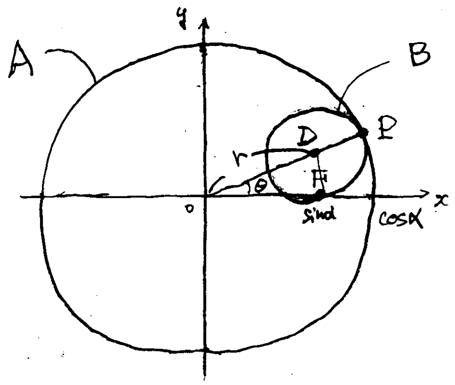
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 演習問題48]

実数 α は $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ を満たすとする。xy 平面上に原点 O を中心とする半径 $\cos\alpha$ の円 A と，点 $\mathrm{F}(\sin\alpha,\ 0)$ がある。A の周上に点 P をとり，P で A に内接し F を通る円を B とする。P が A の周上を動くとき，B の中心の軌跡を C とする。

(1) C を x，y の方程式で表せ。

(2) C の極方程式を求めよ。

(3) P が A の周上を，点 Q は C 上を動くときの PQ の最大値を $f(\alpha)$ とする。α が $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，$f(\alpha)$ のとりうる値の範囲を求めよ。　　(2002 横浜国立大)



(1)

円Bの中心をD

とおくと，

円Bは円Aに内接するので

$$OP = OD + DP$$

である．

また，

円Bの半径に着目すると

$DP = DF$ より

$$OP = OD + DF$$

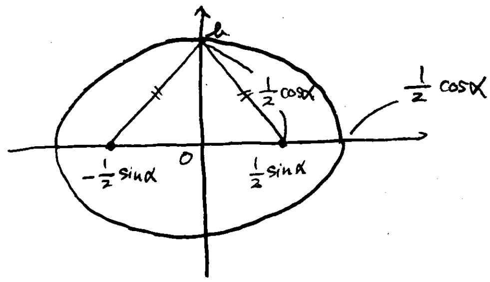
$$OD + DF = \cos\alpha \ (=一定)$$

となり，

点Dは2点O，Fからの距離の和が一定なる点であり，

点Dの軌跡はO，Fを2焦点とする楕円である．

x 軸方向に $-\frac{1}{2}\sin\alpha$ ずつ平行移動して



上図で三平方のThより．

$$l^2 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha = \frac{1}{4}\cos^2\alpha$$

$$l^2 = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4} = \frac{\cos 2\alpha}{4}$$

$$\frac{4x^2}{\cos^2\alpha} + \frac{4y^2}{\cos 2\alpha} = 1$$

これを x 軸方向に $\frac{1}{2}\sin\alpha$ 平行移動すると

$$C:\ \frac{4\left(x-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha} + \frac{4y^2}{\cos 2\alpha} = 1$$

つまり，

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2}{\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{2}\right)^2} = 1$$

(裏に続く)

(2)

$OD = r$, $\angle DOF = \theta$ とおくと

$\triangle ODF$ で余弦Th より

$$DF^2 = OD^2 + OF^2 - 2OD\cdot OF\cos\theta$$

$\left(\begin{array}{l}\text{ここで} \\ DF = DP = \cos\alpha - r \quad \text{より}\end{array}\right)$

$$(\cos\alpha - r)^2 = r^2 + \sin^2\alpha - 2r\sin\alpha\cos\theta$$

$$\cos^2\alpha - 2r\cos\alpha + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + \sin^2\alpha - 2r\sin\alpha\cos\theta$$

$$2r(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$2r(\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta) = \cos 2\alpha$$

(ここで

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ より

$\cos\alpha > \sin\alpha$

であり

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

$-\sin\alpha \leqq \sin\alpha\cos\theta \leqq \sin\alpha$.

より

$\cos\alpha > \sin\alpha\cos\theta$)

$\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta \neq 0$ より

$$r = \frac{\cos 2\alpha}{2(\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta)}$$

(3)

PQ が最大となるのは、OP が最小となることが必要であり、

(2) より $\theta = 0$ のときである。

このとき

$$r = \frac{\cos 2\alpha}{2(\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2(\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{2}$$

より.

$$P\left(\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{2}, 0\right)$$

このとき.

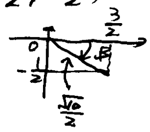
$Q(-\cos\alpha, 0)$ であるとよく.

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{2} - (-\cos\alpha)$$

$$= \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

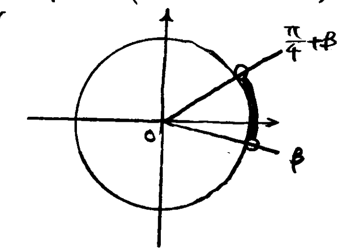
$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\alpha + \beta$ の図!! $\left(\beta < \alpha + \beta < \frac{\pi}{4} + \beta\right)$



$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) < \cos(\alpha + \beta) \leqq 1$$

(ここで

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\beta - \sin\frac{\pi}{4}\sin\beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$)

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} < \cos(\alpha + \beta) \leqq 1$$

$$\sqrt{2} < \frac{\sqrt{10}}{2}\cos(\alpha + \beta) \leqq \frac{\sqrt{10}}{2}$$

よって

$$\sqrt{2} < f(\alpha) \leqq \frac{\sqrt{10}}{2}$$

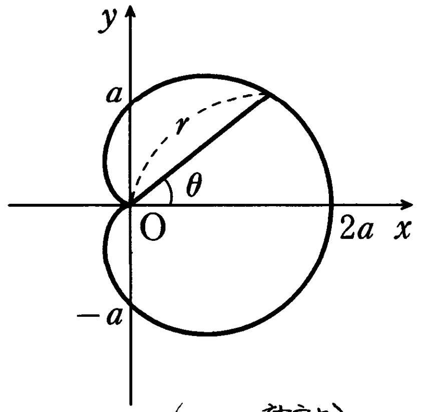
[三訂版オリジ・スタンIII受 演習問題49]

$a\,(a>0)$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える。

(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

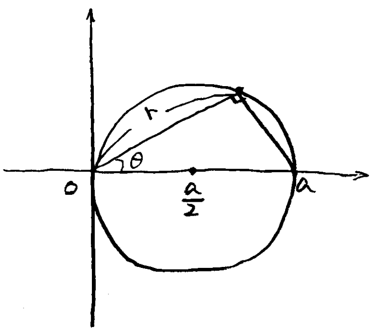
(2) 点Oと曲線 C_a 上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\neq\mathrm{O})$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点をQとするとき，線分PQの長さは一定であることを示せ。

(3) 点Pが曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点とPとの距離の最大値を求めよ。



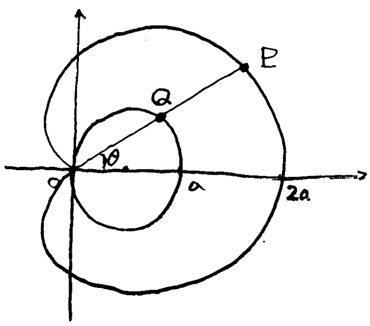
(2000 神戸大)

(1)



$$\underline{\underline{r=a\cos\theta}}$$

(2)



(証明)

(i) 3点 O, Q, P が この順に一直線上のとき

$$PQ=OP-OQ$$
$$=a(1+\cos\theta)-a\cos\theta$$
$$=a\ (=一定)$$

(ii) 3点 P, O, Q が この順に一直線上のとき

$$PQ=OP+OQ$$
$$=a(1+\cos\theta)+a\cos(\theta+\pi)$$
$$=a(1+\cos\theta)-a\cos\theta$$
$$=a\ (=一定)$$

(i), (ii) より.

$PQ=a$ (=一定) である. ■

(3)

$A(2a, 0)$ とすると

△OPA で 余弦Th より

$$AP^2=OP^2+OA^2-2\cdot OP\cdot OA\cdot\cos\theta$$
$$=a^2(1+\cos\theta)^2+4a^2-2a(1+\cos\theta)\cdot 2a\cdot\cos\theta$$
$$=a^2(1+\cos\theta)^2+4a^2-4a^2(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$=a^2\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+4-4\cos\theta-4\cos^2\theta\right)$$
$$=a^2\left(-3\cos^2\theta-2\cos\theta+5\right)$$
$$=a^2\left\{-3\left(\cos\theta+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}\right\}$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ なので

$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき 最大となり

$$\mathrm{Max}\ AP^2=\frac{16}{3}a^2$$

よって

$$\underline{\underline{\mathrm{Max}\ AP=\frac{4a}{\sqrt{3}}}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 演習問題50]

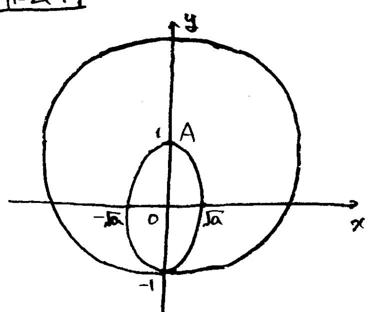
座標平面において楕円 E: $\dfrac{x^2}{a}+y^2=1$ を考える。ただし，a は $a>0$ を満たす定数とする。楕円 E 上の点 A$(0,\ 1)$ を中心とする円 C が，次の2つの条件を満たしているとする。

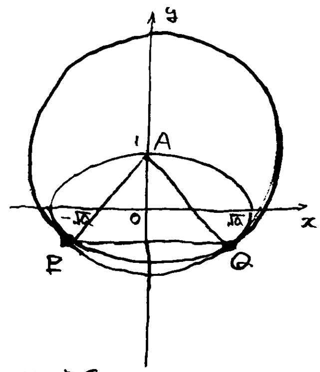
(i) 楕円 E は円 C とその内部に含まれ，E と C は2点 P，Q で接する。

(ii) $\triangle$APQ は正三角形である。

このとき，a の値を求めよ。 (2015 早稲田大)

解法1





(Pのx座標)<(Qのx座標) としてよく.

条件(i)より

$$\sqrt{a}>1$$

つまり $a>1$ であり.

$$C:\ x^2+(y-1)^2=r^2$$

とおくと.

$$x^2=r^2-(y-1)^2$$

であり, E と連立して

$$r^2-(y-1)^2+ay^2=a$$

$$(a-1)y^2+2y-1-a+r^2=0 \quad \text{——①}$$

2点P,Qで接するためには.

重解をもつとよく.

判別式 $D=0$ となるとよい.

$$\frac{D}{4}=1-(a-1)(-1-a+r^2)$$

$$=1+(a-1)(a+1)-(a-1)r^2$$

$$=a^2-(a-1)r^2=0$$

$$(a-1)r^2=a^2$$

$a-1>0$ より

$$r^2=\frac{a^2}{a-1}$$

よって

$$C:\ x^2+(y-1)^2=\frac{a^2}{a-1}$$

また, ①は

$$(a-1)y^2+2y-1-a+\frac{a^2}{a-1}=0$$

$$(a-1)^2y^2+2(a-1)+1=0$$

$$\{(a-1)y+1\}^2=0$$

$$y=\frac{1}{1-a}$$

であり. E の式から

$$\frac{x^2}{a}+\left(\frac{1}{1-a}\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{a}=1-\frac{1}{(1-a)^2}$$

$$\frac{x^2}{a}=\frac{-2a+a^2}{(1-a)^2}$$

$$x^2=\frac{a^2(a-2)}{(a-1)^2}$$

よって 2点P,Qが存在するためには

$$a>2$$

となるとよい.

このもとで

$$x=\pm\frac{a\sqrt{a-2}}{a-1}$$

であり.

$$P\left(-\frac{a\sqrt{a-2}}{a-1},\ \frac{-1}{a-1}\right),\ Q\left(\frac{a\sqrt{a-2}}{a-1},\ \frac{-1}{a-1}\right)$$

とでき.

条件(ii)より.

$$\frac{a\sqrt{a-2}}{a-1}:\left(1+\frac{1}{a-1}\right)=1:\sqrt{3}$$

$$\frac{a\sqrt{3a-6}}{a-1}=\frac{a}{a-1}$$

$a>2$ より

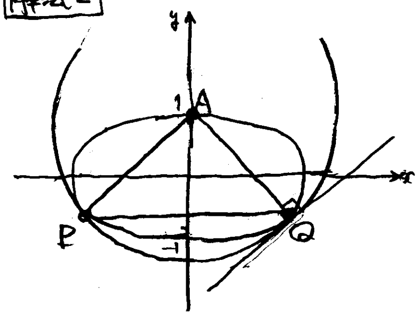
$$\sqrt{3a-6}=1$$

$$3a-6=1$$

$$a=\frac{7}{3}$$ (これは $a>2$ を満たす)

(裏に続く)

解法2



(Pのx座標)<(Qのx座標) としてよく.

△APQ は正三角形なので

$AQ:\ y=-\sqrt{3}x+1$

とできる.

$E:\ \frac{x^2}{a}+y^2=1$

と連立して.

$$\frac{x^2}{a}+3x^2-2\sqrt{3}x+1=1$$

$$(3a+1)x^2-2\sqrt{3}ax=0$$

$$x\left((3a+1)x-2\sqrt{3}a\right)=0$$

$a>0$ より

$$x=0,\ \frac{2\sqrt{3}a}{3a+1}$$

$x=\frac{2\sqrt{3}a}{3a+1}$ のとき.

$$y=-\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}a}{3a+1}+1$$

$$=\frac{-6a+3a+1}{3a+1}$$

$$=\frac{-3a+1}{3a+1}$$

よって

$$Q\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3a+1},\ \frac{-3a+1}{3a+1}\right)$$

点Q における Eの接線 は

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}a}{3a+1}}{a}x+\frac{-3a+1}{3a+1}y=1$$

$$2\sqrt{3}x+(-3a+1)y=3a+1$$

これと

$AQ:\ \sqrt{3}x+y=1$

は直交するので

$$2\sqrt{3}\times\sqrt{3}+(-3a+1)\times1=0.$$

$$-3a+7=0$$

$$a=\frac{7}{3}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 演習問題51]

w を0でない複素数，x，y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2017 京都大)

(1)

$|w|=R$ より

$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

とでき，

$$x+yi=w+\frac{1}{w}$$

$$=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{R(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{R}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)$$

$$=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$R,\ \cos\theta,\ \sin\theta\in\mathbb{R}$ より

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$R>1$ なので

$$\cos\theta=\frac{R}{R^2+1}x,\quad \sin\theta=\frac{R}{R^2-1}y$$

とでき，

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1$$

よって，

点 (x,y) の軌跡は

$$\text{楕円}：\frac{x^2}{\left(\frac{R^2+1}{R}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{R^2-1}{R}\right)^2}=1$$

(2)

$\arg w=\alpha$ より

$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\quad\left(r>0,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

とでき

(1) と同様

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

とできる。

$\sin\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq0$ より

$$r+\frac{1}{r}=\frac{x}{\cos\alpha},\quad r-\frac{1}{r}=\frac{y}{\sin\alpha}$$

より

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right),\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)$$

辺々をかけあわせて

$$1=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}\right)$$

より

$$\frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$$

(ただし，

$r>0$ より

$$\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}>0,\quad \frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}>0$$

であり，$x>0$)

よって，

点 (x,y) の軌跡は

$$\text{双曲線}：\frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\quad(x>0)$$

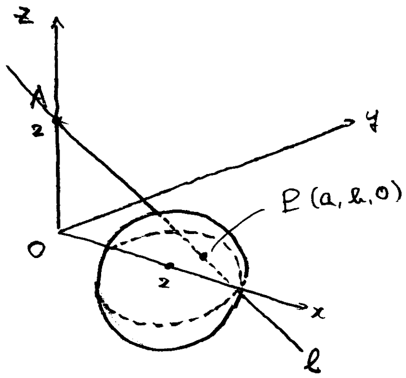
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 演習問題52]

xyz 空間の2点 A$(0,\ 0,\ 2)$, P$(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。

(1) ℓ 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AP}$ で定めるとき，点 Q の座標を a, b, t を使って表せ。

(2) ℓ が S と相異なる2点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3) ℓ が T と相異なる2点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。 (2017 名古屋大)



(1)

$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ より

$-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ} = t(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP})$

$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OP}$

$= (1-t)(0,0,2) + t(a,b,0)$

$= (at,\ bt,\ 2-2t)$

よって

$\underline{\underline{Q(at,\ bt,\ 2-2t)}}$

(2)

点Q が 球面 S 上にあるとすると

B$(2,0,0)$ として

$\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OQ}$

$= (-2,0,0) + (at,\ bt,\ 2-2t)$

$= (at-2,\ bt,\ -2t+2)$

$|\overrightarrow{BQ}| = \sqrt{2}$ より

$\sqrt{(at-2)^2+(bt)^2+(-2t+2)^2} = \sqrt{2}$

両辺 2乗して

$a^2t^2-4at+4+b^2t^2+4t^2-8t+4=2$

$(a^2+b^2+4)t^2+(-4a-8)t+6=0$ ——①

$a^2+b^2+4 \neq 0$ なので

① が 異なる 2つの 実数解 をもつとよく，
判別式 $D>0$ となるとよい。

$D/4 = (-2a-4)^2 - 6(a^2+b^2+4)$

$= 4a^2+16a+16-6a^2-6b^2-24$

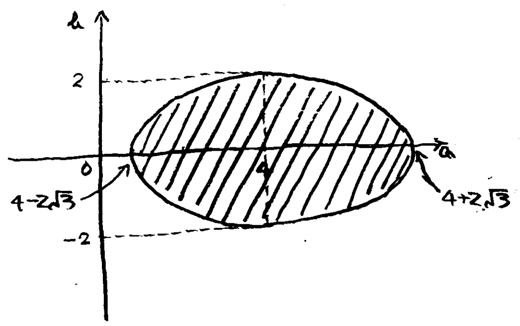
$= -2a^2+16a-6b^2-8>0$

$a^2-8a+3b^2+4<0$

$(a-4)^2+3b^2<12$

$\dfrac{(a-4)^2}{12}+\dfrac{b^2}{4}<1$

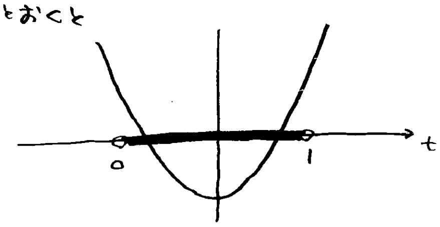
よって $(a,\ b)$ の存在範囲は，
図の斜線部
ただし，境界 を含まない。



(3)

① が $0<t<1$ で 異なる2つの実数解
をもつとよい。

$f(t)=(a^2+b^2+4)t^2+(-4a-8)t+6$
とおくと



(裏に続く)

$$\begin{cases} 判別式\ D>0 \text{ ——— ②} \\ 0<軸<1 \text{ ——— ③} \\ f(0)>0 \text{ ——— ④} \\ f(1)>0 \text{ ——— ⑤} \end{cases}$$

を満たすとよい．

② は (2) より

$$\frac{(a-4)^2}{12}+\frac{b^2}{4}<1$$

③ より

$$0<\frac{2a+4}{a^2+b^2+4}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<2a+4<a^2+b^2+4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-2 \\ a^2-2a+b^2>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-2 \\ (a-1)^2+b^2>1 \end{cases}$$

④ より

$6>0$

よって

すべての (a,b) がこれを満たす．

⑤ より

$$a^2+b^2+4-4a-8+6>0$$

$$a^2-4a+b^2+2>0$$

$$(a-2)^2+b^2>2$$

② かつ ③ かつ ④ かつ ⑤ より

(a,b) の存在範囲は図の斜線部

ただし，境界を含まない．