

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題13]

曲線 $y = \frac{4x+1}{2x-1}$ は、直角双曲線 $y = \frac{\square}{x}$ を x 軸方向に \square 、 y 軸方向に \square だけ平行移動したものであり、この曲線の漸近線の方程式は \square である。

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{4x+1}{2x-1} \\
 &= \frac{2(2x-1)+3}{2x-1} \\
 &= \frac{3}{2x-1} + 2 \\
 &= \frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} + 2 \\
 &= \frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}} + 2
 \end{aligned}$$

∴ うつは

$$\underline{y = \frac{3}{2x}} \quad \text{a うつ}$$

x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 、 y 軸方向に $\underline{2}$

だけ平行移動したもの

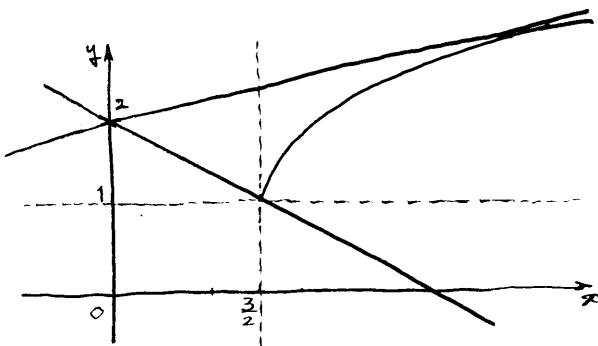
$$y = \frac{\frac{3}{2}}{x} \quad \text{a うつ} \text{の 漸近線} \text{ は}$$

$$x=0, y=0 \quad \text{t} \propto \tau$$

$$y = \frac{4x+1}{2x-1} \quad \text{a うつ} \text{の 漸近線} \text{ は}$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}, y = 2}$$

$y = \sqrt{2x-3} + 1$ のグラフと直線 $y = mx + 2$ が共有点をもつような実数 m の値の範囲を求める。



$$l: y = mx + 2$$

は点 $(0, 2)$ を通り直線 m の直線

これが点 $(\frac{3}{2}, 1)$ を通るとき

$$1 = \frac{3}{2}m + 2$$

$$\frac{3}{2}m = -1$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

$$C: y = \sqrt{2x-3} + 1 \quad \text{と接するとき}$$

$l \subset C$ を適応して

$$mx + 2 = \sqrt{2x-3} + 1$$

$$mx + 1 = \sqrt{2x-3}$$

$$x \geq \frac{3}{2} のもとで" \text{両辺}^2 \text{して}$$

$$m^2x^2 + 2mx + 1 = 2x - 3$$

$$m^2x^2 + (2m-2)x + 4 = 0$$

判別式 $D = 0$ とするところ必要

$$\frac{D}{4} = (m-1)^2 - 4m^2$$

$$= -3m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$3m^2 + 2m - 1 = 0$$

$$(3m-1)(m+1) = 0$$

$$m = \frac{1}{3}, -1$$

$$\text{因} \text{の} 5 \quad m = \frac{1}{3}$$

よって

$$-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題A53]

関数 $y = \frac{ax+b}{2x+1}$ ① のグラフは点(1, 0)を通り, $y=1$ を漸近線にもつ。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。

(2) ①のグラフを利用して, 不等式 $\frac{ax+b}{2x+1} > x-2$ を解け。

(1)

①のグラフが点(1, 0)を通るから

$$0 = \frac{a+b}{3} \quad \text{すなはち}$$

$$b = -a$$

このとき ① は

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-a}{2x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\frac{a}{2} - \frac{3}{2}a}{2x+1} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}a}{2x+1} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

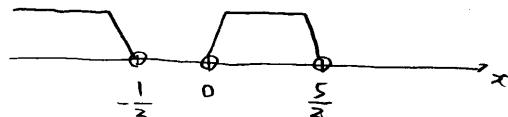
$y=1$ を漸近線にもつので

$$\frac{a}{2} = 1$$

すなはち

$$\underline{\underline{a=2, b=-2}}$$

$$\left(\begin{array}{l} 2x^2 - 5x = 0 \\ x(2x-5) = 0 \\ x=0, \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

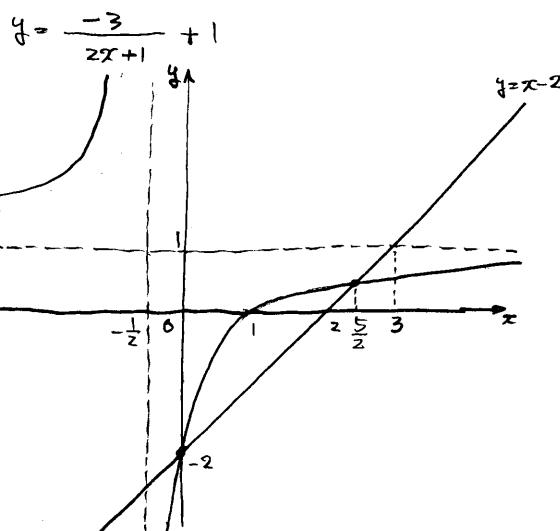


よって

$$\underline{\underline{x < -\frac{1}{2}, 0 < x < \frac{5}{2}}}$$

(2)

(1)より ① は



$$\left(\begin{array}{l} \frac{2x-2}{2x+1} = x-2 \quad \text{とおくと} \\ 2x-2 = 2x^2 - 3x - 2 \end{array} \right)$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題A54]

a を正の実数とする。 $x \geq 0$ のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2005 岡山大)

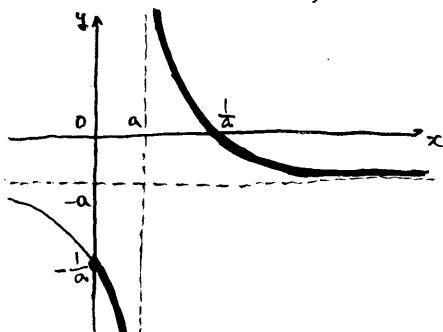
(i) ~ (iii) 並り

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-1}{a-x} \\ &= \frac{-ax+1}{x-a} \\ &= \frac{-a(x-a)-a^2+1}{x-a} \\ &= \frac{1-a^2}{x-a} - a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{a}, -a < y & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ y = -1 & (a = 1 \text{ のとき}) \\ y < -a, -\frac{1}{a} \leq y & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $1-a^2 > 0 \Leftrightarrow a > 0$ のとき

(i.e. $0 < a < 1$ のとき)



よって

$$y \leq -\frac{1}{a}, -a < y$$

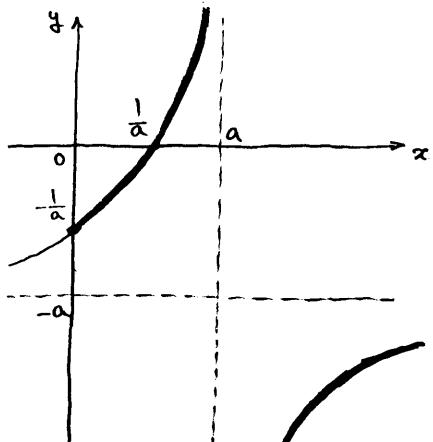
(ii) $1-a^2 = 0 \Leftrightarrow a=0$ のとき

(i.e. $a=1$ のとき)

$$y = -1$$

(iii) $1-a^2 < 0 \Leftrightarrow a > 0$ のとき

(i.e. $a > 1$ のとき)



よって

$$y < -a, -\frac{1}{a} \leq y$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題A55]

座標平面の2点 $A(1, 2)$, $B(3, 0)$ に対して, $BP - AP > 2$ を満たす点 P の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

(2007 3月前大)

解法1

境界線 $BP - AP = 2$ は
2点 A, B から の距離の差が一定
であることを双曲線を表す。

線分 AB の中点 $M(2, 1)$ があり

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}$$

$$= (-2, -1) + (1, 2)$$

$$= (-1, 1)$$

$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}$$

$$= (-2, -1) + (3, 0)$$

$$= (1, -1)$$

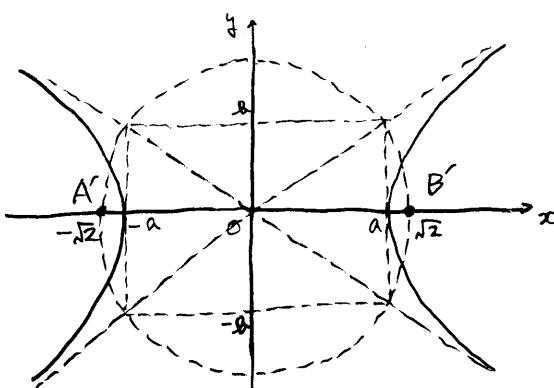
$$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{2}$$

5)

$$A'(-\sqrt{2}, 0), B'(\sqrt{2}, 0) \pm 2\text{焦点}$$

とする双曲線を時計回りに 45°

回転し, x 軸方向に 2, y 軸方向に 1
だけ平行移動せるとよい。



$$a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow (\sqrt{2} + a) - (-a + \sqrt{2}) = 2$$

$$a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$b > 0 \quad a \in \mathbb{R} \quad b = 1$$

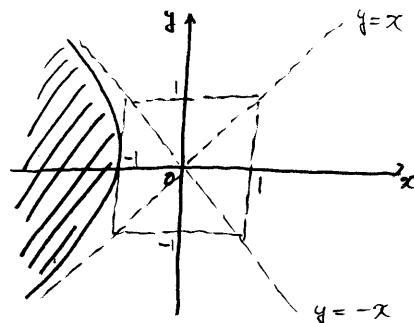
5, 7

$$x^2 - y^2 = 1$$

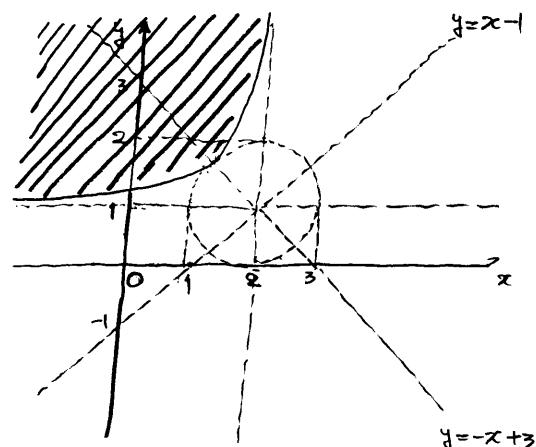
ただし

$$B'P' - A'P' > 2 \quad 5)$$

$$x^2 - y^2 > 1 \Rightarrow x \leq -1$$



よって



点 P の存在範囲は図の斜線部
ただし, 境界を含まない。

解法2

$P(x, y)$ とおこう

$$BP - AP > 2 \quad 5)$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} > 2$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} > \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 2$$

両辺ともに正なので 2乗して

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 > x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 4$$

$$-4x + 4y > 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$-x + y > \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

(裏に続く)

$$-x+y > 0 \quad (\text{i.e. } y > x) \text{ かつて}$$

両辺2乗して

$$x^2 - 2xy + y^2 > x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$-2xy + 2x + 4y > 5 \quad \text{---} \textcircled{1}$$

5.7 $P(x, y)$ は

$$-2xy + 2x + 4y > 5 \quad \text{かつ } y > x$$

を満たす。

この曲線上の点 $P(x, y)$ が原点回りに
反時計回りに 45° 回転した点を
 $Q(s, t)$ とおこう。

$$\begin{aligned} s+ti &= (x+yi)(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ &= (x+yi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)i \end{aligned}$$

$$s, t, x, y \in \mathbb{R} \quad \text{より}$$

$$s = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad \text{かつ} \quad t = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x-y = \sqrt{2}s \quad \text{かつ} \quad x+y = \sqrt{2}t$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+s) \quad \text{かつ} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(t-s)$$

したがって

$$-2xy + 2x + 4y > 5 \quad \text{より}$$

$$-2 \times \frac{1}{2}(t^2 - s^2) + \sqrt{2}(t+s) + 2\sqrt{2}(t-s) > 5$$

$$-t^2 + s^2 + 3\sqrt{2}t - \sqrt{2}s > 5$$

$$(s - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{3}{4} - (t - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{18}{4} > 5$$

$$(s - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (t - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 > 1$$

$$y > x \quad \text{より}$$

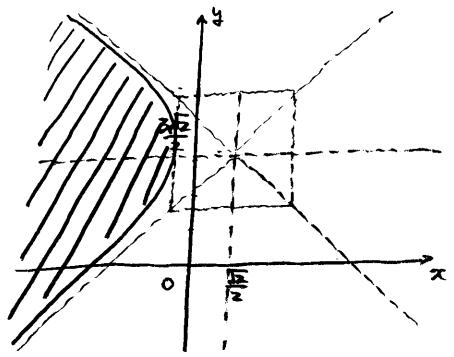
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(t-s) > \frac{\sqrt{2}}{2}(t+s)$$

$$s < 0$$

5.7. $Q(s, t)$ は

$$(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (y - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 > 1 \quad \text{かつ} \quad x < 0$$

を満たす。



頂点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ を原点回りに
反時計回りに -45° 回転した点

を $C(c, d)$ とおこう

$$\begin{aligned} c+di &= \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)i \\ &= \frac{4-\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

5.7

$$c = \frac{4-\sqrt{2}}{2}, d = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{つまり } C\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ を原点回りに反時計回り

に -45° 回転した点を $D(e, f)$ とおこう

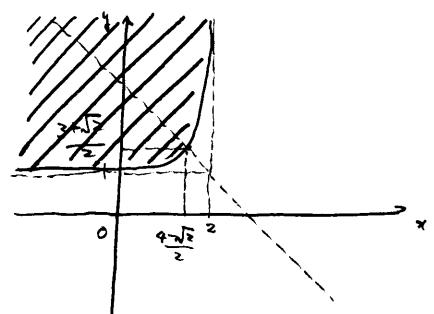
$$e+fi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ))$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)i \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

$$5.7 \quad e = 2, f = 1$$

$$\text{つまり } D(2, 1)$$

5.7. 点 P の存在範囲は図の斜線部
たただし、境界を含まない。



(次頁に続く)

解法3 (① 以降)

$$XY - X - 2Y < -\frac{5}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} & Y & -1 \\ X & XY & -X \\ \hline -2 & -2Y & 2 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} +2 \\ \downarrow \\ +2 \end{matrix}$$

$$(X-2)(Y-1) < -\frac{1}{2}$$

∴

$P(x, y)$ は

$$(X-2)(Y-1) < -\frac{1}{2} \quad \text{すなはち} \quad Y > x \quad \text{を満たす}$$

これは

$$XY < -\frac{1}{2} \quad \text{のグラフである。}$$

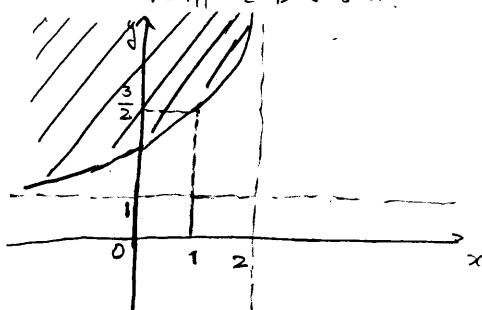
x 軸方向に ≥ 2 , y 軸方向に ≥ 1

だけ 平行移動 した グラフ である。

∴

点 P の存在範囲は 図の斜線部

ただし、境界を含まない。



[三訂版オリジ・スタンIII受問題A56]

曲線 $y = \sqrt{2x+3}$ と直線 $y = x - 1$ の共有点の x 座標を求めるとき $x = \boxed{\quad}$ である。

また、不等式 $\sqrt{2x+3} > x - 1$ を解くとき $\boxed{\quad}$ である。

(2012 福岡大)

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x+3} & \text{--- ①} \\ y = x - 1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

を連立して

$$\sqrt{2x+3} = x - 1$$

$$2x+3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

のときとて両辺を乗じて

$$2x+3 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{6}$$

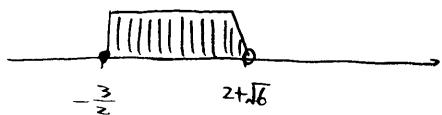
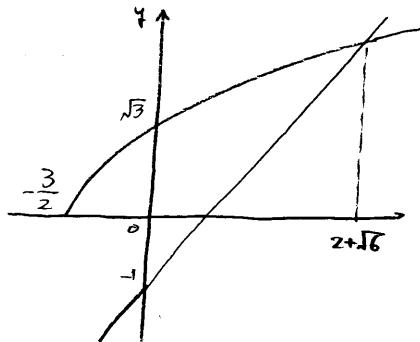
$$x \geq 1 \quad \text{より}$$

$$\underline{x = 2 + \sqrt{6}}$$

さて

$$\sqrt{2x+3} > x - 1$$

を解こう。



$$\underline{-\frac{3}{2} \leq x < 2 + \sqrt{6}}$$

〔三訂版オリジ・スタンIII受問題A57〕

(1) 不等式 $\sqrt{4x-x^2} > 3-x$ を解け。

(2) 不等式 $\sqrt{a^2-x^2} > 3x-a$ ($a \neq 0$) の解は, $a > 0$ のとき $\boxed{\quad} \leq x < \boxed{\quad}$,

$a < 0$ のとき $\boxed{\quad} \leq x < \boxed{\quad}$ である。

(1) 2009 学習院大 (2) 2002 芝浦工大

(1)

不等式が成立するためには

$$4x-x^2 \geq 0 \quad \text{※必要}$$

$$x(x-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \quad (\text{必要})$$

これが

$$(i) \quad 3-x \geq 0 \quad a \text{とき}$$

$$(\text{i.e. } 0 \leq x \leq 3 \quad a \text{とき})$$

と不等式の両辺を2乗して

$$4x-x^2 > 9-6x+x^2$$

$$2x^2-10x+9 < 0$$

$$\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$0 \leq x \leq 3 \quad \text{より}$$

$$\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x \leq 3$$

$$(ii) \quad 3-x < 0 \quad a \text{とき}$$

$$(\text{i.e. } 3 < x \leq 4 \quad a \text{とき})$$

と不等式は成り立つ。

(i), (ii) より



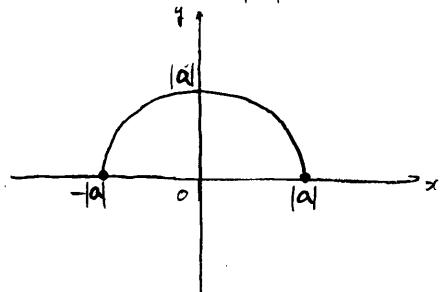
$$\underline{\underline{\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x \leq 4}}$$

(2)

$$y = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = a^2 \Leftrightarrow y \geq 0 \quad \text{より}$$

中心 $(0,0)$, 半径 $|a|$ の円 a 上半分



$$\sqrt{a^2-x^2} = 3x-a$$

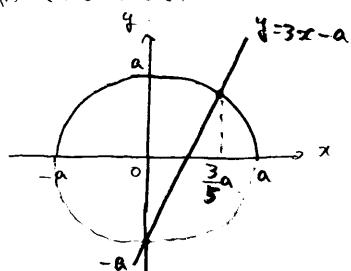
と両辺を2乗して

$$a^2-x^2 = 9x^2-6ax+a^2$$

$$10x^2-6ax=0$$

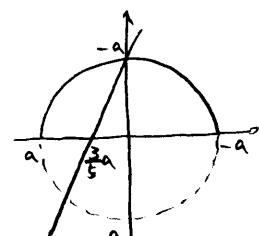
$$x=0, \frac{3}{5}a$$

$$(i) \quad a > 0 \quad a \text{とき}$$



$$-a \leq x < \frac{3}{5}a$$

$$(ii) \quad a < 0 \quad a \text{とき}$$



$$a \leq x < 0$$

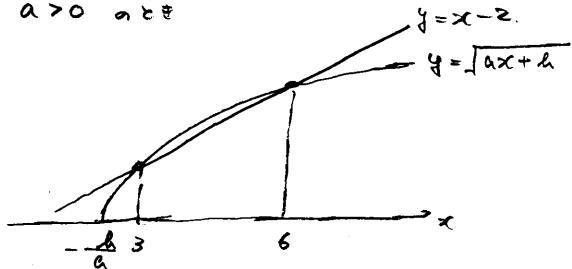
(i), (ii) より

$$\begin{cases} -a \leq x < \frac{3}{5}a & (a > 0 \quad a \text{とき}) \\ a \leq x < 0 & (a < 0 \quad a \text{とき}) \end{cases}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題A58]

不等式 $\sqrt{ax+b} > x-2$ ($a \neq 0$) を満たす x の範囲が $3 < x < 6$ となるとき, $|a+b|$ の値を求めよ。 (2016 自治医科大)

(i) $a > 0$ のとき



$$x-2 = \sqrt{ax+b}$$

∴ $x = 3, 6$ を解に代入する

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{3a+b} \\ 4 = \sqrt{6a+b} \end{cases}$$

5)

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 6a+b=16 \end{cases}$$

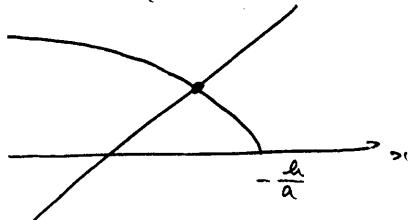
これを解く

$$a = 5, b = -14 \quad (a > 0 \text{ を満たす})$$

このとき

$$|a+b| = |5-14| = |-9| = 9$$

(ii) $a < 0$ のとき



交点は高々 1 個あり。

$$\text{解} \therefore 3 < x < 6$$

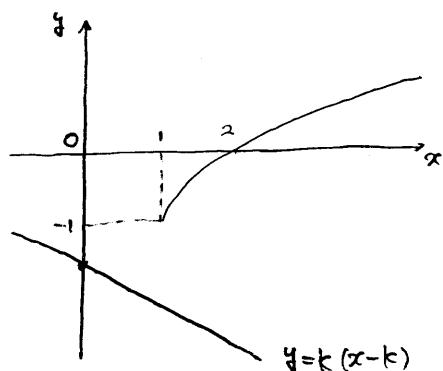
となることはない。

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{|a+b| = 9}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受例題7]

実数 x に関する方程式 $\sqrt{x-1} - 1 = k(x-k)$ が解をもたないような負の数 k の範囲を求めよ。 (2003 防衛医科大学校)



点 $(1, -1)$ が直線 $y = k(x-k)$ の上側

にあるとよ。さて

$$y > k(x-k)$$

を満たすとよ。

$$-1 > k(1-k)$$

$$k^2 - k - 1 > 0$$

$$k < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < k$$

$$k < 0 \quad \text{よ}$$

$$\underline{\underline{k < \frac{1-\sqrt{5}}{2}}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題B59]

- (1) 関数 $y = x + |x - a|$ のグラフ上の点で, x 座標が a である点を P とする。実数 a の値が変化するとき, 点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 方程式 $\sqrt{x+2} = x + |x - a|$ が相異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。 (2004 杏林大)

(1)

$$y = x + |x - a| \quad \text{ただし } a \neq 0$$

$$x = a \text{ のとき } y = a$$

よって $P(a, a)$

$P(x, y)$ とおこう

$$x = a \text{ かつ } y = a$$

このとき a を消去すると

$$y = x$$

よって

$$P(x, y) \text{ は } y = x$$

を満たす。

つまり, 点 P の軌跡は

$$\underline{\text{直線 } y = x}$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

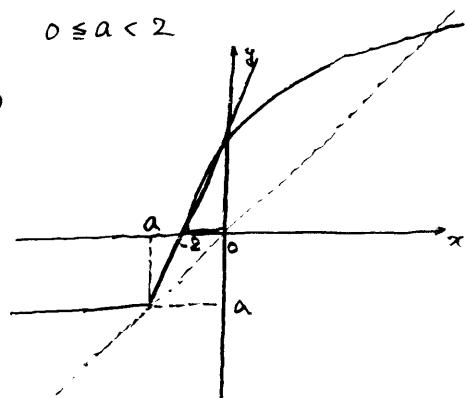
$$x = 2, -1$$

$$x \geq 0 \text{ より, } x = 2.$$

よって

$$0 \leq a < 2$$

(i)



点 $(-2, 0)$ を通過とき。

$$-4 - a = 0$$

$$a = -4$$

接するとき

$$y = 2x - a \text{ と } y = \sqrt{x+2} \text{ を連立して}$$

$$2x - a = \sqrt{x+2}$$

$x \geq -2$ のもとで両辺を 2乗して

$$4x^2 - 4ax + a^2 = x + 2$$

$$4x^2 + (-4a-1)x + a^2 - 2 = 0$$

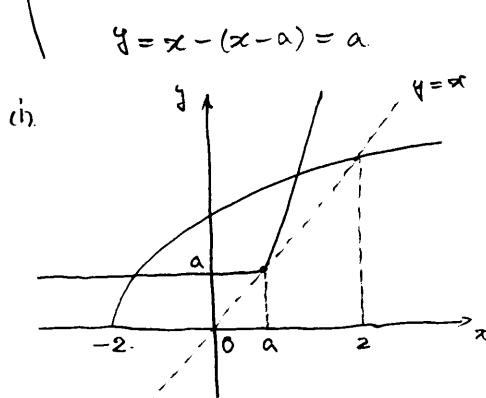
判別式 $D = 0$ となるとき

$$(-4a-1)^2 - 4 \times 4 \times (a^2 - 2) = 0$$

$$16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 32 = 0$$

$$8a = -33$$

$$a = -\frac{33}{8}$$



$$y = x \text{ と } y = \sqrt{x+2} \text{ を連立して}$$

$$\text{よって } -\frac{33}{8} < a \leq -4$$

$$x = \sqrt{x+2}$$

$$x \geq 0 \text{ かつ } x+2 \geq 0 \text{ (i.e. } x \geq 0)$$

a もとで両辺を 2乗して

(i), (ii) なり

$$-\frac{33}{8} < a \leq -4, 0 \leq a < 2$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題B60]

(1) t を正の実数とするとき, $|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geq 0$ を満たす実数とする。 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

を満たすとき, $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を, a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき, (2) で求めた m の最大値を求めよ。

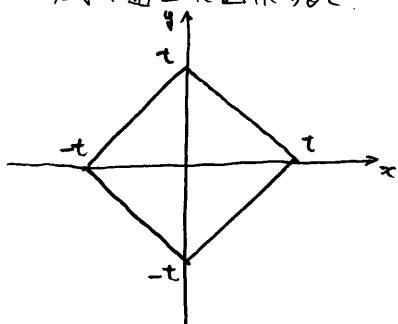
(2011 神戸大)

(1)

$$|x| + |y| = t \quad \text{は}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき } x+y=t \\ x \leq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ のとき } -x+y=t \\ x \leq 0 \text{ かつ } y \leq 0 \text{ のとき } -x-y=t \\ x \geq 0 \text{ かつ } y \leq 0 \text{ のとき } x-y=t \end{cases}$$

よって xy 平面上に図示すると



$$\frac{2}{a} > \frac{2}{2-a} \quad a < 1$$

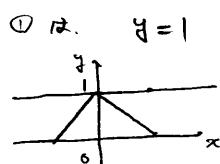
$$2-a > a$$

$$-2a > -2$$

$$a < 1$$

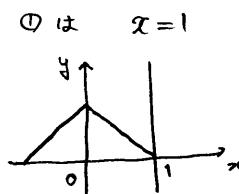
$$\begin{cases} a \leq 1 \text{ のとき } m = \frac{2}{2-a} \\ a \geq 1 \text{ のとき } m = \frac{2}{a} \end{cases} \quad (\text{ただし } a \neq 0, 2)$$

$$(ii) a = 0 \text{ のとき, } m = 1$$



$$m = 1$$

$$(iii) a = 2 \text{ のとき, } m = 1$$



$$m = 1$$

(2)

$$ax + (2-a)y = 2 \quad \text{--- (1) より}$$

$$(x-y)a + (2y-2) = 0$$

a についての一次式 \Rightarrow

$$x-y=0 \Rightarrow 2y-2=0$$

より

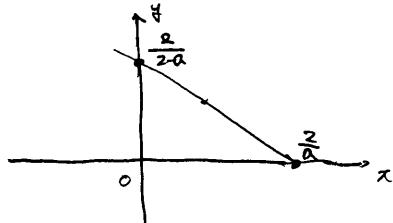
$$x = y = 1$$

よって 直線 (1) は

点 $(1, 1)$ を通る直線

(i) $a \neq 0, 2$ のとき (1) は

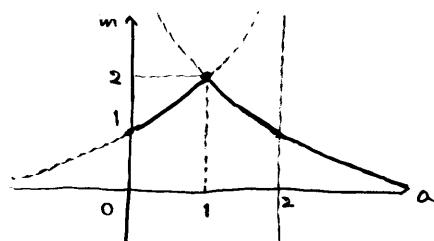
$$\frac{a}{2}x + \frac{2-a}{2}y = 1$$



(i) ~ (iii) エリ

$$m = \begin{cases} \frac{2}{2-a} & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{2}{a} & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)



エリ

$$\underline{\underline{\text{Max } m = 2 \quad (a = 1)}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受問題B61]

点A(a, b)は中心O(0, 0), 半径1の円の内部およびその周上を動き, 点P(p, q)は中心O'(4, 0), 半径1の円の内部およびその周上を動くとする。このとき, $k = \frac{a+b-p-q}{a-b-p+q}$ とおく。

(1) 直線APの傾きをmとする。kをmを用いて表せ。

(2) kの値のとりうる範囲を求めよ。

(2001 早稲田大)

(1)

直線APの傾き m は

$$m = \frac{b-q}{a-p} \quad \text{よし}$$

$$b-q = m(a-p)$$

このとき

$$k = \frac{a+b-p-q}{a-b-p+q}$$

$$= \frac{(a-p)+(b-q)}{(a-p)-(b-q)}$$

$$= \frac{(a-p)+m(a-p)}{(a-p)-m(a-p)}$$

$$= \frac{1+m}{1-m}$$

円の中心(0,0)との距離dは

$$d = \frac{|-2m'|}{\sqrt{m'^2+1}} = \frac{2|m'|}{\sqrt{m'^2+1}}$$

半径 r = 1

接するとき d = r より

$$\frac{2|m'|}{\sqrt{m'^2+1}} = 1$$

$$2|m'| = \sqrt{m'^2+1}$$

両辺2乗 より

$$4m'^2 = m'^2 + 1$$

$$m'^2 = \frac{1}{3}$$

$$m' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よし

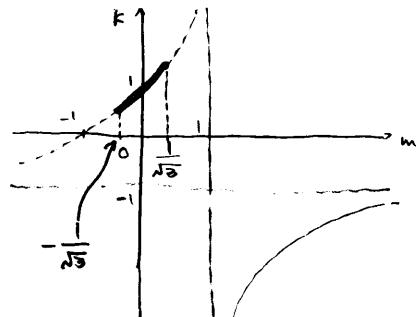
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よし

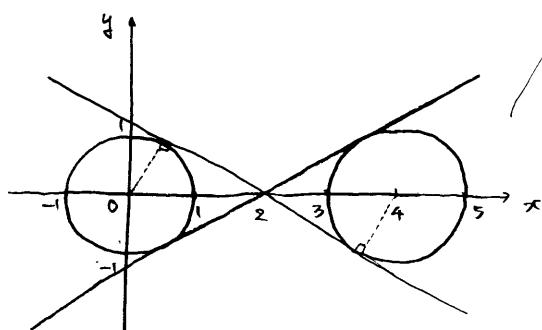
$$k = \frac{1+m}{1-m}$$

$$= \frac{-(1-m)+2}{1-m}$$

$$= \frac{-2}{m-1} - 1$$



(2)



2円の共通接線は

图形の対称性から点(2, 0)を通過するので
化直す m' とおこう。

$$y = m'(x-2)$$

$$\Leftrightarrow m'x - y - 2m' = 0$$

よし

$$\begin{cases} m = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ よし} & k = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3} \\ m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ よし} & k = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}. \end{cases}$$

よし

$$2-\sqrt{3} \leq k \leq 2+\sqrt{3}$$