

曲線  $y = \frac{4x+1}{2x-1}$  は、直角双曲線  $y = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{x}$  を  $x$  軸方向に  $\boxed{\phantom{00}}$ ,  $y$  軸方向に  $\boxed{\phantom{00}}$  だけ平行移動したものである。この曲線の漸近線の方程式は  $x = \boxed{\phantom{00}}$  である。

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{4x+1}{2x-1} \\
 &= \frac{2(2x-1)+3}{2x-1} \\
 &= \frac{3}{2x-1} + 2 \\
 &= \frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} + 2 \\
 &= \frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}} + 2
 \end{aligned}$$

のグラフは

$$y = \frac{\frac{3}{2}}{x} \quad \text{のグラフ}$$

$x$  軸方向に  $\frac{1}{2}$ ,  $y$  軸方向に 2  
だけ平行移動したもの

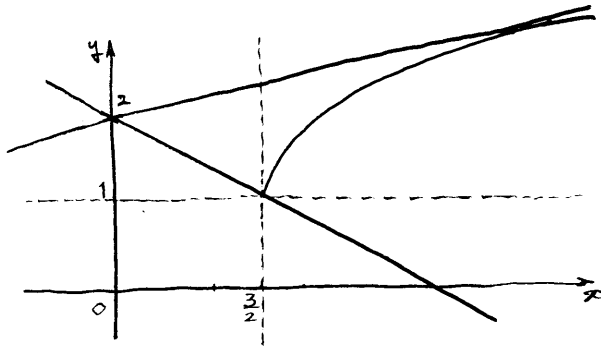
$$y = \frac{\frac{3}{2}}{x} \quad \text{のグラフの漸近線は}$$

$$x=0, \quad y=0 \quad \text{と } x=2$$

$$y = \frac{4x+1}{2x-1} \quad \text{のグラフの漸近線は}$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}, \quad y = 2}$$

$y = \sqrt{2x-3} + 1$  のグラフと直線  $y = mx + 2$  が共有点をもつような実数  $m$  の値の範囲を求めよ。



$$l: y = mx + 2$$

は点  $(0, 2)$  を通る傾き  $m$  の直線

これが点  $(\frac{3}{2}, 1)$  を通るとき

$$1 = \frac{3}{2}m + 2$$

$$\frac{3}{2}m = -1$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

$C: y = \sqrt{2x-3} + 1$  と接するとき

$l$  と  $C$  を連立して

$$mx + 2 = \sqrt{2x-3} + 1$$

$$mx + 1 = \sqrt{2x-3}$$

$x \geq \frac{3}{2}$  のもとで両辺 2乗して

$$m^2x^2 + 2mx + 1 = 2x - 3$$

$$m^2x^2 + (2m-2)x + 4 = 0$$

判別式  $D = 0$  とおさなければならない。

$$D/4 = (m-1)^2 - 4m^2$$

$$= -3m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$3m^2 + 2m - 1 = 0$$

$$(3m-1)(m+1) = 0$$

$$m = \frac{1}{3}, -1$$

図から  $m = \frac{1}{3}$

よって

$$-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$$

関数  $y = \frac{ax+b}{2x+1}$  ……① のグラフは点  $(1, 0)$  を通り、 $y=1$  を漸近線にもつ。

- (1) 定数  $a, b$  の値を求めよ。  
 (2) ① のグラフを利用して、不等式  $\frac{ax+b}{2x+1} > x-2$  を解け。

(1)

① のグラフが点  $(1, 0)$  を通るので

$$0 = \frac{a+b}{2 \times 1 + 1} \quad \text{より}$$

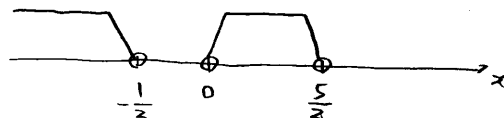
$$b = -a$$

このとき ① は

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-a}{2x+1} \\ &= \frac{(2x+1) \frac{a}{2} - \frac{3a}{2}}{2x+1} \\ &= \frac{-\frac{3a}{2}}{2x+1} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \frac{a}{2} \\ 2x+1 \overline{) ax-a} \\ \underline{ax+\frac{a}{2}} \\ -\frac{3a}{2} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{l} 2x^2 - 5x = 0 \\ x(2x-5) = 0 \\ x = 0, \frac{5}{2} \end{array} \right)$$



グラフより

$$\underline{x < -\frac{1}{2}, 0 < x < \frac{5}{2}}$$

$y=1$  を漸近線にもつので

$$\frac{a}{2} = 1$$

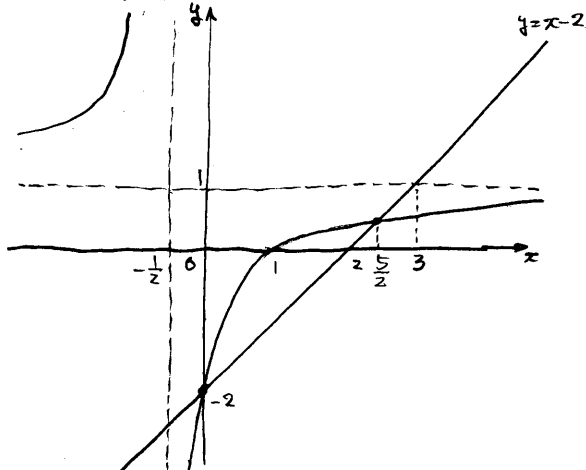
より

$$\underline{a=2, b=-2}$$

(2)

(1) より ① は

$$y = \frac{-3}{2x+1} + 1$$



$$\left( \begin{array}{l} \frac{2x-2}{2x+1} = x-2 \quad \text{両辺} \\ 2x-2 = 2x^2-3x-2 \end{array} \right)$$

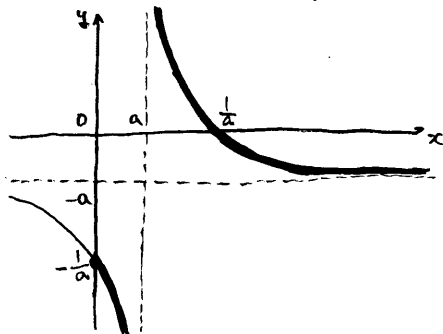
$a$  を正の実数とする。 $x \geq 0$  のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$  がとりうる値の範囲を求めよ。

(2005 岡山大学)

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-1}{a-x} \\ &= \frac{-ax+1}{x-a} \\ &= \frac{-a(x-a)-a^2+1}{x-a} \\ &= \frac{1-a^2}{x-a} - a \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{a}, -a < y & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ y = -1 & (a = 1 \text{ のとき}) \\ y < -a, -\frac{1}{a} \leq y & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

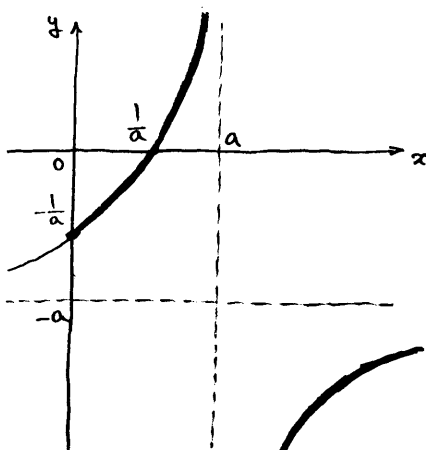
(i)  $1-a^2 > 0$  から  $a < 1$  のとき(i.e.  $0 < a < 1$  のとき)

よって

$$y \leq -\frac{1}{a}, -a < y$$

(ii)  $1-a^2 = 0$  から  $a = 1$  のとき(i.e.  $a = 1$  のとき)

$$y = -1$$

(iii)  $1-a^2 < 0$  から  $a > 1$  のとき(i.e.  $a > 1$  のとき)

よって

$$y < -a, -\frac{1}{a} \leq y$$

座標平面の2点A(1, 2), B(3, 0)に対して,  $BP - AP > 2$  を満たす点Pの存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

(2007 弘前大)

**解法1**

境界線  $BP - AP = 2$  は

2点A, B からの距離の差が一定  
であるので 双曲線を表す。

線分ABの中点M(2, 1) であり

$$\vec{MA} = -\vec{OM} + \vec{OA}$$

$$= (-2, -1) + (1, 2)$$

$$= (-1, 1)$$

$$\vec{MB} = -\vec{OM} + \vec{OB}$$

$$= (-2, -1) + (3, 0)$$

$$= (1, -1)$$

$$|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = \sqrt{2}$$

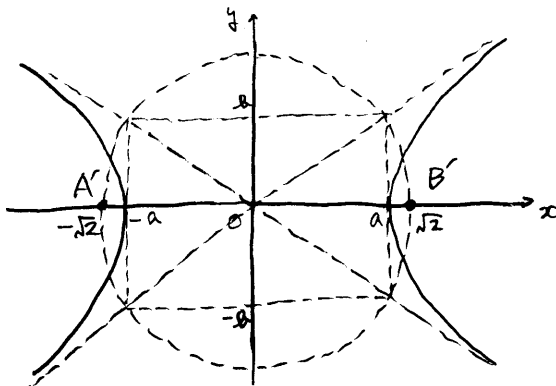
より,

$A'(-\sqrt{2}, 0), B'(\sqrt{2}, 0)$  を2焦点

とする双曲線を時計回りに45°

回転し, x軸方向に2, y軸方向に1

だけ平行移動させるとよい。



$$\left( \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 2 \quad \text{かつ} \quad (\sqrt{2} + a) - (-a + \sqrt{2}) = 2 \\ a^2 + b^2 = 2 \quad \text{かつ} \quad a = 1 \\ b > 0 \quad a \text{ も } b \text{ まで} \quad b = 1 \end{array} \right)$$

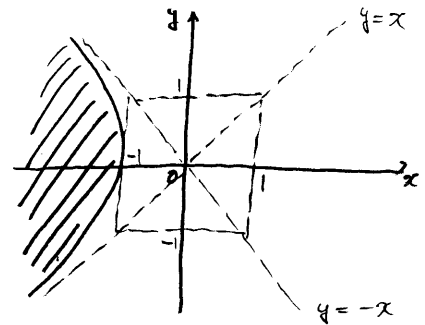
よって

$$x^2 - y^2 = 1$$

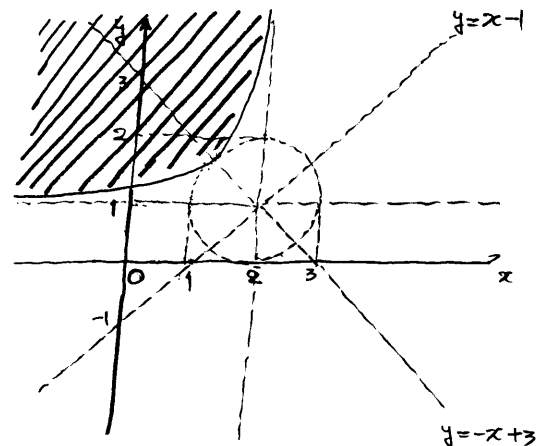
ただし

$$B'P' - A'P' > 2 \quad \text{より}$$

$$x^2 - y^2 > 1 \quad \text{かつ} \quad x \leq -1$$



よって



点Pの存在範囲は図の斜線部。

ただし, 境界を含めない。

**解法2**

$P(x, y)$  とおくと

$$BP - AP > 2 \quad \text{より}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} > 2$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} > \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 2$$

両辺ともに正なので2乗して

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 > x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 4$$

$$-4x + 4y > 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$-x + y > \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

(裏に続く)

$$-X+Y>0 \text{ (ie. } Y>X) \text{ かつ } Z''$$

両辺 2 乗して

$$X^2 - 2XY + Y^2 > X^2 - 2X + 1 + Y^2 - 4Y + 4$$

$$-2XY + 2X + 4Y > 5 \quad \text{--- ①}$$

よって  $P(X, Y)$  は

$$-2XY + 2X + 4Y > 5 \quad \text{かつ } Y > X$$

を満たす。

この曲線上の点  $P(X, Y)$  を原点回りに

反時計回りに  $45^\circ$  回転した点を

$Q(s, t)$  とおくと

$$\begin{aligned} s + t\lambda &= (X + Y\lambda) \left( \cos 45^\circ + \lambda \sin 45^\circ \right) \\ &= (X + Y\lambda) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \right)\lambda \\ s, t, X, Y &\in \mathbb{R} \text{ より} \\ s &= \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \quad \text{かつ} \quad t = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow X-Y &= \sqrt{2}s \quad \text{かつ} \quad X+Y = \sqrt{2}t \\ \Leftrightarrow X &= \frac{\sqrt{2}}{2}(t+s) \quad \text{かつ} \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(t-s) \end{aligned}$$

したがって

$$-2XY + 2X + 4Y > 5 \quad \text{より}$$

$$-2 \times \frac{1}{2}(t^2 - s^2) + \sqrt{2}(t+s) + 2\sqrt{2}(t-s) > 5$$

$$-t^2 + s^2 + 3\sqrt{2}t - \sqrt{2}s > 5$$

$$\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2}{4} - \left(t - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{18}{4} > 5$$

$$\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 > 1$$

$Y > X$  より

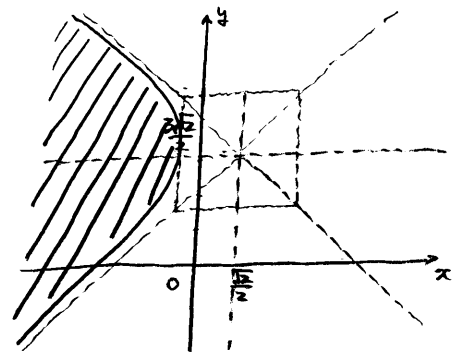
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(t-s) > \frac{\sqrt{2}}{2}(t+s)$$

$$s < 0$$

よって  $Q(s, t)$  は

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 > 1 \quad \text{かつ} \quad x < 0$$

を満たす。



頂点  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$  を原点回りに

反時計回りに  $-45^\circ$  回転した点

を  $C(c, d)$  とおくと

$$\begin{aligned} c + d\lambda &= \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda\right) \left(\cos(-45^\circ) + \lambda \sin(-45^\circ)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\lambda \\ &= \frac{4-\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\lambda \end{aligned}$$

よって

$$c = \frac{4-\sqrt{2}}{2}, \quad d = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{つまり } C\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

点  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$  を原点回りに反時計回りに

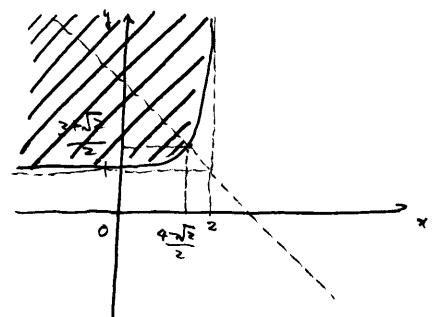
$-45^\circ$  回転した点を  $D(e, f)$  とおくと

$$\begin{aligned} e + f\lambda &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda\right) \left(\cos(-45^\circ) + \lambda \sin(-45^\circ)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\lambda \\ &= 2 + \lambda \end{aligned}$$

よって  $e = 2, f = 1$

$$\text{つまり } D(2, 1)$$

よって点  $P$  の存在範囲は図の斜線部ただし、境界を含まない。



(次頁に続く)

**解法3** (①以降)

$$xy - x - 2y < -\frac{5}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & -1 \\ -2 & -2y & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2 \\ +2 \end{matrix}$$

$$(x-2)(y-1) < -\frac{1}{2}$$

よて

$P(x, y)$  は

$$(x-2)(y-1) < -\frac{1}{2} \text{ かつ } y > x \text{ を満たす}$$

これは

$xy < -\frac{1}{2}$  のグラフを

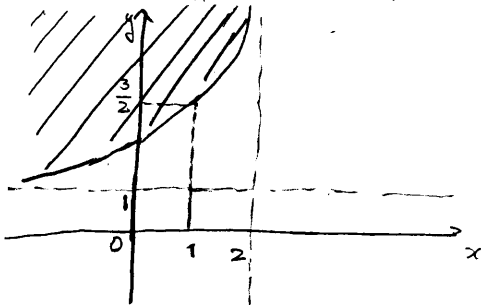
$x$  軸方向に2,  $y$  軸方向に1

だけ平行移動したグラフである。

よて

点  $P$  の存在範囲は図の斜線部

ただし、境界を含まない。



曲線  $y = \sqrt{2x+3}$  と直線  $y = x-1$  の共有点の  $x$  座標を求めると  $x = \boxed{\phantom{00}}$  である。

また、不等式  $\sqrt{2x+3} > x-1$  を解くと  $\boxed{\phantom{00}}$  である。

(2012 福岡大)

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x+3} & \text{--- ①} \\ y = x-1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

①②を連立して

$$\sqrt{2x+3} = x-1$$

$$2x+3 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2} \quad \text{かつ} \quad x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

①②を両辺2乗して

$$2x+3 = x^2-2x+1$$

$$x^2-4x-2=0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{6}$$

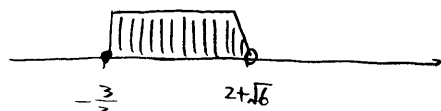
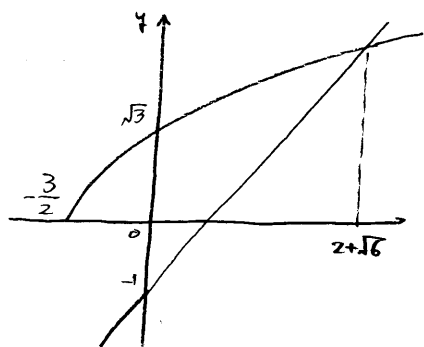
$$x \geq 1 \quad \text{より}$$

$$\underline{\underline{x = 2 + \sqrt{6}}}$$

よって

$$\sqrt{2x+3} > x-1$$

を解くと



$$\underline{\underline{-\frac{3}{2} \leq x < 2 + \sqrt{6}}}$$



(1) 不等式  $\sqrt{4x-x^2} > 3-x$  を解け。

(2) 不等式  $\sqrt{a^2-x^2} > 3x-a$  ( $a \neq 0$ ) の解は,  $a > 0$  のとき  $\boxed{\phantom{0}} \leq x < \boxed{\phantom{0}}$ ,

$a < 0$  のとき  $\boxed{\phantom{0}} \leq x < \boxed{\phantom{0}}$  である。

(1) 2009 学習院大 (2) 2002 芝浦工大

(1)

不等式が成立するためには,

$$4x-x^2 \geq 0 \quad \text{が必要}$$

$$x(x-4) \leq 0$$

$$\text{すなわち } 0 \leq x \leq 4 \quad (\text{必要})$$

また

$$(i) \quad 3-x \geq 0 \quad a \neq 0$$

$$(\text{i.e. } 0 \leq x \leq 3 \quad a \neq 0)$$

与不等式の両辺を2乗して

$$4x-x^2 > 9-6x+x^2$$

$$2x^2-10x+9 < 0$$

$$\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{7}}{2}$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{ より}$$

$$\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 3$$

$$(ii) \quad 3-x < 0 \quad a \neq 0$$

$$(\text{i.e. } 3 < x \leq 4 \quad a \neq 0)$$

与不等式は成り立つ。

(i), (ii) より



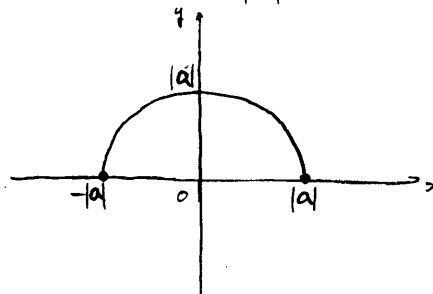
$$\frac{5-\sqrt{7}}{2} < x \leq 4$$

(2)

$$y = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=a^2 \quad \text{かつ } y \geq 0 \text{ より}$$

中心  $(0,0)$ , 半径  $|a|$  の円  $a$  上半分



$$\sqrt{a^2-x^2} = 3x-a$$

の両辺を2乗して

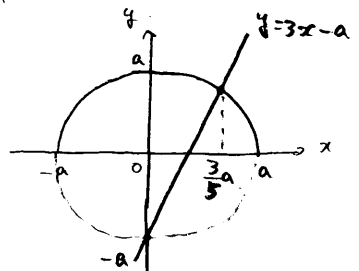
$$a^2-x^2 = 9x^2-6ax+a^2$$

$$10x^2-6ax=0$$

$$x(5x-3a)=0$$

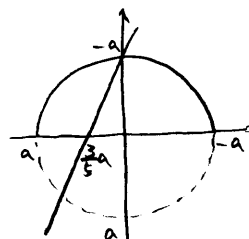
$$x=0, \frac{3}{5}a$$

(i)  $a > 0$   $a \neq 0$



$$-a \leq x < \frac{3}{5}a$$

(ii)  $a < 0$   $a \neq 0$



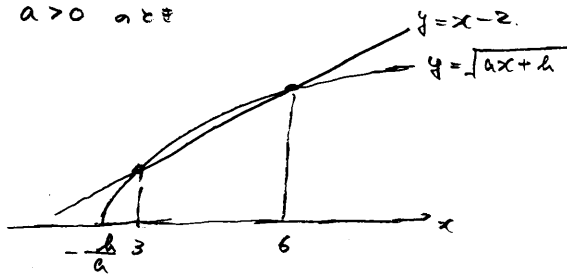
$$a \leq x < 0$$

(i), (ii) より

$$\begin{cases} -a \leq x < \frac{3}{5}a & (a > 0 \quad a \neq 0) \\ a \leq x < 0 & (a < 0 \quad a \neq 0) \end{cases}$$

不等式  $\sqrt{ax+b} > x-2$  ( $a \neq 0$ ) を満たす  $x$  の範囲が  $3 < x < 6$  となるとき,  $|a+b|$  の値を求めよ。(2016 自治医科大学)

(i)  $a > 0$  のとき



$$x-2 = \sqrt{ax+b}$$

∴  $x=3, 6$  は解にもつとよいから

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{3a+b} \\ 4 = \sqrt{6a+b} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 6a+b=16 \end{cases}$$

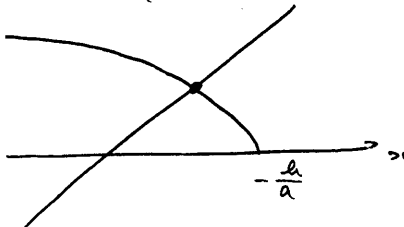
これを解いて

$$a=5, b=-14 \quad (a > 0 \text{ を満たす})$$

このとき

$$|a+b| = |5-14| = |-9| = 9$$

(ii)  $a < 0$  のとき



交点は高々1個であり,

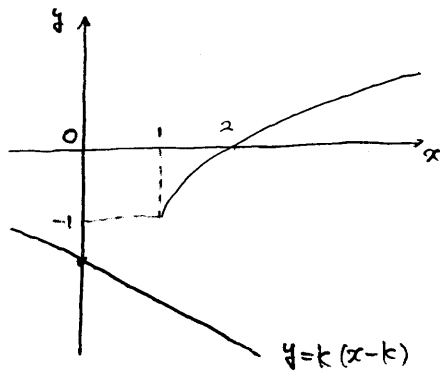
解が  $3 < x < 6$

となることはない.

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{|a+b| = 9}}$$

実数  $x$  に関する方程式  $\sqrt{x-1} - 1 = k(x-k)$  が解をもたないような負の数  $k$  の範囲を求めよ。(2003 防衛医科大学校)



点  $(1, -1)$  が直線  $y = k(x-k)$  の上側

にあるとよい。そこで

$$y > k(x-k)$$

を満たすとよい。

$$-1 > k(1-k)$$

$$k^2 - k - 1 > 0$$

$$k < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < k$$

$$k < 0 \quad \text{より}$$

$$\underline{\underline{k < \frac{1-\sqrt{5}}{2}}}$$

- (1) 関数  $y = x + |x - a|$  のグラフ上の点で、 $x$ 座標が  $a$  である点を  $P$  とする。実数  $a$  の値が変化するとき、点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (2) 方程式  $\sqrt{x+2} = x + |x - a|$  が相異なる2つの実数解をもつような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。(2004 杏林大)

(1)

$$y = x + |x - a| \quad \text{で}$$

$$x = a \text{ のとき } y = a$$

$$\text{よって } P(a, a)$$

$$P(x, y) \text{ とおくと}$$

$$x = a \text{ から } y = a$$

$$\text{このとき } a \text{ を消去すると}$$

$$y = x$$

よって

$$P(x, y) \text{ は } y = x$$

を満たす。

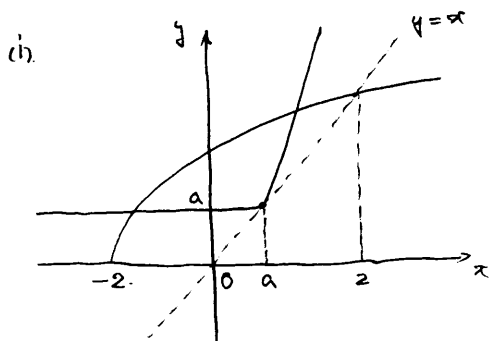
つまり、点  $P$  の軌跡は

$$\underline{\underline{\text{直線 } y = x}}$$

(2)

$$y = x + |x - a| \quad \text{について}$$

$$\begin{cases} x \geq a \text{ のとき} \\ y = x + (x - a) = 2x - a \\ x \leq a \text{ のとき} \\ y = x - (x - a) = a \end{cases}$$



$$y = x \text{ と } y = \sqrt{x+2} \text{ と連立して}$$

$$x = \sqrt{x+2}$$

$$x \geq 0 \text{ から } x+2 \geq 0 \text{ (i.e. } x \geq -2)$$

かつ両辺を2乗して

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

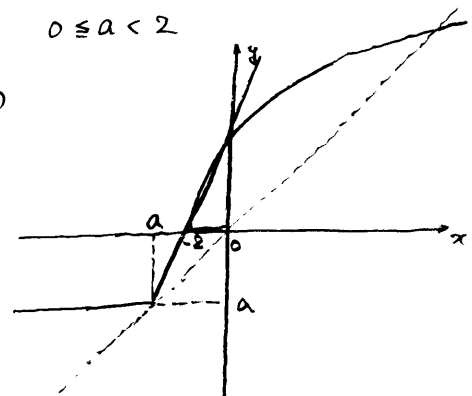
$$x = 2, -1$$

$$x \geq 0 \text{ より } x = 2$$

よって

$$0 \leq a < 2$$

(ii)



点  $(-2, 0)$  を通るとき

$$-4 - a = 0$$

$$a = -4$$

接するとき

$$y = 2x - a \text{ と } y = \sqrt{x+2} \text{ と連立して}$$

$$2x - a = \sqrt{x+2}$$

$x \geq -2$  のもとで両辺を2乗して

$$4x^2 - 4ax + a^2 = x + 2$$

$$4x^2 + (-4a-1)x + a^2 - 2 = 0$$

判別式  $D = 0$  とおくと

$$(-4a-1)^2 - 4 \times 4 \times (a^2 - 2) = 0$$

$$16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 32 = 0$$

$$8a = -33$$

$$a = -\frac{33}{8}$$

$$\text{よって } -\frac{33}{8} < a \leq -4$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{-\frac{33}{8} < a \leq -4, 0 \leq a < 2}}$$

(1)  $t$  を正の実数とすると、 $|x|+|y|=t$  の表す  $xy$  平面上の図形を図示せよ。

(2)  $a$  を  $a \geq 0$  を満たす実数とする。 $x, y$  が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

を満たすとき、 $|x|+|y|$  のとりうる値の最小値  $m$  を、 $a$  を用いた式で表せ。

(3)  $a$  が  $a \geq 0$  の範囲を動くとき、(2) で求めた  $m$  の最大値を求めよ。

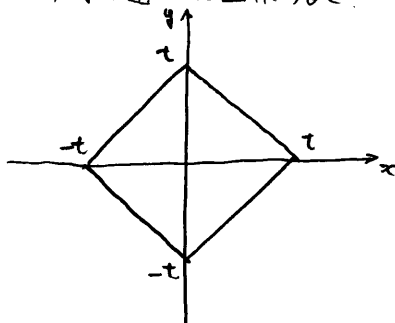
(2011 神戸大)

(i)

$$|x|+|y|=t \quad \text{は}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 & \text{aとき} & x+y=t \\ x \leq 0 \text{ かつ } y \geq 0 & \text{aとき} & -x+y=t \\ x \leq 0 \text{ かつ } y \leq 0 & \text{aとき} & -x-y=t \\ x \geq 0 \text{ かつ } y \leq 0 & \text{aとき} & x-y=t \end{cases}$$

よて、 $xy$  平面上に図示すると



$$\frac{2}{a} > \frac{2}{2-a} \quad \text{aとき}$$

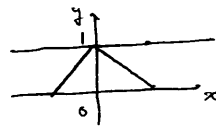
$$\begin{aligned} 2-a &> a \\ -2a &> -2 \\ a &< 1. \end{aligned}$$

よて

$$\begin{cases} a \leq 1 & \text{aとき} & m = \frac{2}{2-a} \\ a \geq 1 & \text{aとき} & m = \frac{2}{a} \end{cases} \quad (\text{ただし } a \neq 0, 2)$$

(ii)  $a=0$  aとき

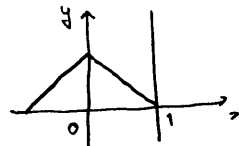
$$\textcircled{1} \text{ は } y=1$$



$$m=1.$$

(iii)  $a=2$  aとき

$$\textcircled{1} \text{ は } x=1$$



$$m=1$$

(2)

$$ax + (2-a)y = 2 \quad \text{--- } \textcircled{1} \quad \text{よて}$$

$$(x-y)a + (2y-2) = 0$$

$a$  について恒等式 とみて

$$x-y=0 \quad \text{かつ} \quad 2y-2=0.$$

よて

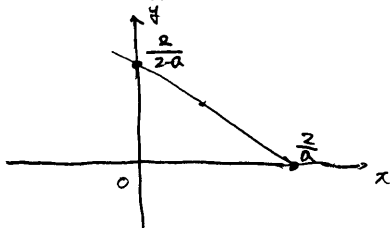
$$x=y=1.$$

よて 直線  $\textcircled{1}$  は

点  $(1, 1)$  を通る直線

(i)  $a \neq 0, 2$  aとき  $\textcircled{1}$  は

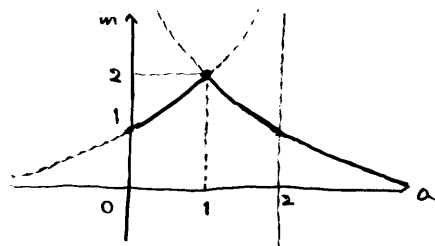
$$\frac{a}{2}x + \frac{2-a}{2}y = 1$$



(i) ~ (iii) より

$$m = \begin{cases} \frac{2}{2-a} & (0 \leq a \leq 1 \text{ aとき}) \\ \frac{2}{a} & (a \geq 1 \text{ aとき}) \end{cases}$$

(3)



よて

$$\underline{\underline{\text{Max } m = 2 \quad (a=1)}}$$

点  $A(a, b)$  は中心  $O(0, 0)$ 、半径1の円の内部およびその周上を動き、点  $P(p, q)$  は中心  $O'(4, 0)$ 、半径1の円の内部およびその周上を動くとする。このとき、 $k = \frac{a+b-p-q}{a-b-p+q}$  とおく。

(1) 直線  $AP$  の傾きを  $m$  とする。 $k$  を  $m$  を用いて表せ。

(2)  $k$  の値のとりうる範囲を求めよ。

(2001 早稲田大)

(1)

直線  $AP$  の傾き  $m$  は

$$m = \frac{b-q}{a-p} \quad \text{より}$$

$$b-q = m(a-p)$$

このとき

$$k = \frac{a+b-p-q}{a-b-p+q}$$

$$= \frac{(a-p) + (b-q)}{(a-p) - (b-q)}$$

$$= \frac{(a-p) + m(a-p)}{(a-p) - m(a-p)}$$

$$= \frac{1+m}{1-m}$$

円  $\alpha$  中心  $(0,0)$  と  $\alpha$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|-2m'|}{\sqrt{m'^2+1}} = \frac{2|m'|}{\sqrt{m'^2+1}}$$

半径  $r=1$

接する  $\alpha$  である  $d=r$  より

$$\frac{2|m'|}{\sqrt{m'^2+1}} = 1$$

$$2|m'| = \sqrt{m'^2+1}$$

両辺2乗して

$$4m'^2 = m'^2 + 1$$

$$m'^2 = \frac{1}{3}$$

$$m' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって

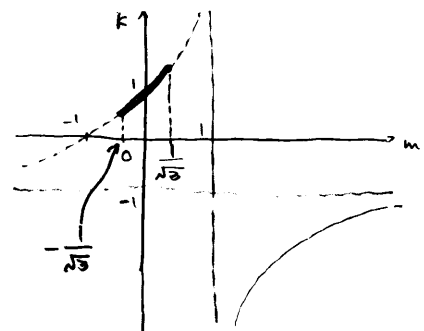
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって

$$k = \frac{1+m}{1-m}$$

$$= \frac{-(1-m)+2}{1-m}$$

$$= \frac{-2}{m-1} - 1$$

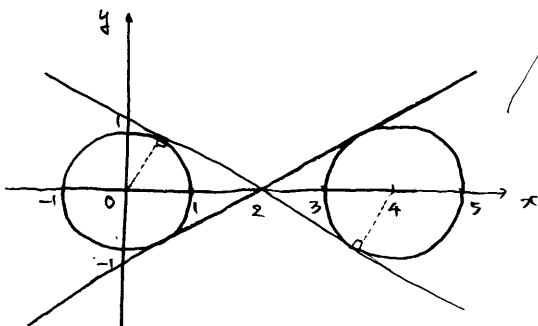


$$\begin{cases} m = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき } & k = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3} \\ m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき } & k = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

よって

$$2-\sqrt{3} \leq k \leq 2+\sqrt{3}$$

(2)



図形的にも  
考察で得!

2円の共通接線は

図形の対称性から、点  $(2,0)$  を通るので傾き  $m'$  とおくと

$$y = m'(x-2)$$

$$\Leftrightarrow m'x - y - 2m' = 0$$

とでき