[三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題15]

2つの関数 $f(x)=x+2$，$g(x)=x^2$ に対し，$(f\circ h)(x)=g(x)$ を満たす x の2次関数 $h(x)$ を求めよ。

$$\begin{cases} (f\circ h)(x) = f(h(x)) = h(x)+2 \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

であり

$(f\circ h)(x) = g(x)$ より

$h(x) + 2 = x^2$

よって $\underline{\underline{h(x) = x^2 - 2}}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題16]

関数 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$，$g(x)=2x-1$ について，逆関数 $f^{-1}(x)$，$g^{-1}(x)$，$(f\circ g)^{-1}(x)$ を求めよ。

$$f(x)=\frac{3x}{x+1}$$
$$=\frac{3(x+1)-3}{x+1}$$
$$=\frac{-3}{x+1}+3$$

よって　$x\neq -1$，$y\neq 3$

$y=f(x)$ とおいて，xについて解く.

$$y=\frac{3x}{x+1}$$
$$(x+1)y=3x$$
$$(y-3)x=-y$$

$y\neq 3$ より

$$x=\frac{-y}{y-3}$$

x と y を入れかえて

$$y=\frac{-x}{x-3}$$

よって

$$f^{-1}(x)=\frac{-x}{x-3}\quad (x\neq 3)$$

$$g(x)=2x-1$$

$y=g(x)$ とおいて，x について解く.

$$y=2x-1$$
$$2x=y+1$$
$$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

x と y を入れかえて

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

よって

$$g^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\quad (x\text{は任意})$$

$$(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$$
$$=g^{-1}(f^{-1}(x))$$
$$=g^{-1}\left(\frac{-x}{x-3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-x}{x-3}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-x+(x-3)}{2(x-3)}$$
$$=\frac{-3}{2(x-3)}\quad (x\neq 3)$$

関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える。a，b，c は定数とする。合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，$a=$ ア$\boxed{}$，$b=$ イ$\boxed{}$，$c=$ ウ$\boxed{}$ である。 (2002 近畿大)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$$=\frac{2g(x)+a}{g(x)+1}$$

$$=\frac{2\left(\frac{3x+b}{x+c}\right)+a}{\frac{3x+b}{x+c}+1}$$

$$=\frac{6x+2b+ax+ac}{3x+b+x+c}$$

$$=\frac{(6+a)x+(2b+ac)}{4x+(b+c)}$$

ここで

$$(f\circ g)(x)=\frac{9x+8}{4x+3}$$ より

$$\frac{(6+a)x+(2b+ac)}{4x+(b+c)}=\frac{9x+8}{4x+3}$$

x についての恒等式 より

$$\begin{cases} b+c=3 \\ 6+a=9 \\ 2b+ac=8 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+c=3 \\ 2b+3c=8 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A63]

関数 $f(x)=\sqrt{7x-3}-1$ について考える。

(1) $f(x)$ の逆関数を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ との交点の座標を求めよ。

(3) 不等式 $f^{-1}(x) \leqq f(x)$ を解け。 (2015 金沢工業大)

(1)

$f(x)=\sqrt{7x-3}-1$

$\left(x \geqq \frac{3}{7},\ y \geqq -1\right)$

$y=f(x)$ とおき、x について解く

$y=\sqrt{7x-3}-1$

$y+1=\sqrt{7x-3}$

両辺を2乗して

$y^2+2y+1=7x-3$

$7x=y^2+2y+4$

$x=\frac{1}{7}y^2+\frac{2}{7}y+\frac{4}{7}$

x と y を入れかえて

$y=\frac{1}{7}x^2+\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}$

よって

$f^{-1}(x)=\frac{1}{7}x^2+\frac{2}{7}x+\frac{4}{7} \quad (x \geqq -1)$

(2)

$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフの交点と

$y=f^{-1}(x)$ と $y=x$ のグラフの交点は

一致するので

$\frac{1}{7}x^2+\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}=x$

$x^2+2x+4=7x$

$x^2-5x+4=0$

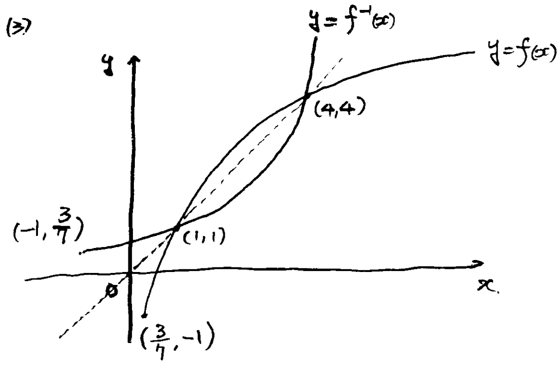
$(x-1)(x-4)=0$

$x=1,4$ ($x \geqq -1$ を満たす)

よって

交点 $(1,1)$, $(4,4)$

(3)



$f^{-1}(x) \leqq f(x)$ は上図より

$1 \leqq x \leqq 4$

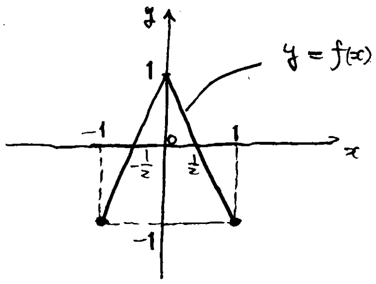
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A64]

$f(x)=\begin{cases}2x+1 & (-1\leqq x<0)\\ -2x+1 & (0\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ のように定義された関数 $f(x)$ について

(1) $y=(f\circ f)(x)$ のグラフをかけ。

(2) $(f\circ f)(a)=f(a)$ となる a の値を求めよ。 (1996 武蔵工業大)

(1)



$\begin{cases}-1\leqq f(x)<0 & \left(-1\leqq x<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x\leqq 1\right)\\ 0\leqq f(x)\leqq 1 & \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq \frac{1}{2}\right)\end{cases}$

であり

(i) $-1\leqq x<-\frac{1}{2}$ のとき $-1\leqq f(x)<0$ であり

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=2f(x)+1$

$=2(2x+1)+1$

$=4x+3$

(ii) $-\frac{1}{2}\leqq x<0$ のとき $0\leqq f(x)\leqq 1$ であり

$(f\circ f)(x)=-2f(x)+1$

$=-2(2x+1)+1$

$=-4x-1$

(iii) $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき $0\leqq f(x)\leqq 1$ であり

$(f\circ f)(x)=-2f(x)+1$

$=-2(-2x+1)+1$

$=4x-1$

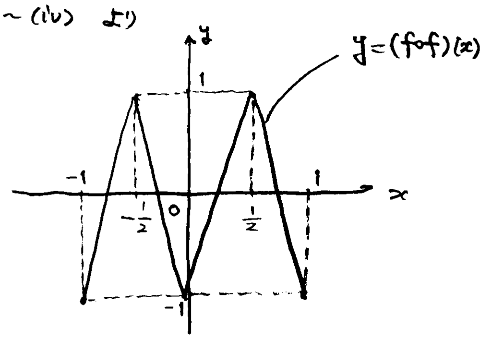
(iv) $\frac{1}{2}<x\leqq 1$ のとき $-1\leqq f(x)<0$ であり

$(f\circ f)(x)=2f(x)+1$

$=2(-2x+1)+1$

$=-4x+3$

(i)〜(iv) より



(2)

$y=(f\circ f)(x)$ と $y=f(x)$ のグラフの

y軸対称性から

$0\leqq x<1$ ときを考えると

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ で共有点をもち

$4x-1=-2x+1$

$6x=2$

$x=\frac{1}{3}$

$x=1$ でも共有点をもつため

$a=\pm\frac{1}{3},\ \pm 1$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A65]

x の関数 $f(x)$ に対して，式 $f(x)=-f(-x)$ および式 $f(2x)=\dfrac{a\cdot 4^x+a-4}{4^x+1}$ が成り立つ。ただし，a は実数の定数である。

(1) $a=$ ア $\boxed{}$ である。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)=\log_2$ イ $\boxed{}$ $-\log_2$ ウ $\boxed{}$ である。 (2009 東京理科大)

(1) 解法1

$f(2x)=-f(-2x)$ が成り立つので

$$\frac{a\cdot 4^x+a-4}{4^x+1}=-\frac{a\cdot 4^{-x}+a-4}{4^{-x}+1}$$

$$\frac{a\cdot 4^x+a-4}{4^x+1}=-\frac{a+(a-4)\cdot 4^x}{1+4^x}$$

$$a\cdot 4^x+a-4=-a+(-a+4)\cdot 4^x$$

$$(2a-4)\cdot 4^x+2a-4=0$$

$$(2a-4)(4^x+1)=0$$

$4^x+1\neq 0$ より

$$2a-4=0$$

よって $\underline{\underline{a=2}}$

(2)

$f^{-1}(x)=y$ より

$x=f(y)$ が成り立つので

$x=\dfrac{3}{5}$ として

$f(y)=\dfrac{3}{5}$ を満たす y を求める。

(1) より

$$f(2x)=\frac{2\cdot 4^x-2}{4^x+1}$$

$$=\frac{2\cdot 2^{2x}-2}{2^{2x}+1}$$

であるので

$$f(y)=\frac{2\cdot 2^y-2}{2^y+1}$$

よって

$$\frac{2\cdot 2^y-2}{2^y+1}=\frac{3}{5}$$

$$10\cdot 2^y-10=3\cdot 2^y+3$$

$$7\cdot 2^y=13$$

$$2^y=\frac{13}{7}$$

$$\log_2 2^y=\log_2\frac{13}{7}$$

$$y=\log_2 13-\log_2 7$$

よって

$$\underline{\underline{f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\log_2 13-\log_2 7}}$$

(1) 解法2

$f(0)=-f(0)$ より，

$f(0)=0$ が成り立つので，

$$f(2x)=\frac{a\cdot 4^x+a-4}{4^x+1}$$

で $x=0$ として

$$f(0)=\frac{a+a-4}{1+1}$$

$$=\frac{2a-4}{2}$$

$$=a-2=0$$

よって $\underline{\underline{a=2}}$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A66]

$y=\dfrac{2^{3x}+4^{x+1}+2^{x+2}}{2^x+2}$ を簡単にせよ。また，この逆関数を求めよ。

(2005 芝浦工業大)

$$y=\frac{2^{3x}+4^{x+1}+2^{x+2}}{2^x+2}$$

$$=\frac{2^{3x}+4\cdot4^x+4\cdot2^x}{2^x+2}$$

$$=\frac{(2^x)^3+4(2^x)^2+4\cdot2^x}{2^x+2}$$

($2^x=X$ とおくと.)

$$y=\frac{X^3+4X^2+4X}{X+2}$$

$$=\frac{X(X^2+4X+4)}{X+2}$$

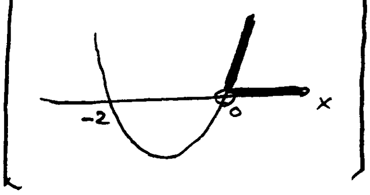
$$=\frac{X(X+2)^2}{X+2}$$

$$=X(X+2)$$

$$=\underline{\underline{2^x(2^x+2)}}$$

$X>0$ であり

$y=X(X+2)$ のグラフ



$y>0$ を満たしている.

$y=X(X+2)$ を.

X について解くと.

$X^2+2X=y$

$X^2+2X-y=0$

$X=-1\pm\sqrt{1+y}$

$X>0$ より

$X=-1+\sqrt{1+y}$

$2^x=-1+\sqrt{1+y}$

$\log_2 2^x=\log_2(-1+\sqrt{1+y})$

$x=\log_2(-1+\sqrt{1+y})$

x と y を入れかえて

$\underline{\underline{y=\log_2(-1+\sqrt{1+x})\quad(x>0)}}$

(真数) >0 なので

$-1+\sqrt{1+x}>0.$

$\sqrt{1+x}>1.$

両辺ともに正なので 2乗してよく

$1+x>1$

$x>0$

なので 省略可

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A67]

0でない定数 a に対して，関数 $f(x)=ax(1-x)$ を考える。$g(x)=f(f(x))$ とするとき，多項式 $g(x)-x$ は多項式 $f(x)-x$ で割り切れることを示せ。 (2001 鳥取大)

(証明)

$$g(x)=f(f(x))$$
$$=a\,f(x)\big(1-f(x)\big)$$
$$=a\cdot ax(1-x)\big(1-ax(1-x)\big)$$
$$=a^2x(1-x)\big(1-ax+ax^2\big)$$

$$g(x)-x=x\left\{a^2(1-x)\big(1-ax+ax^2\big)-1\right\}$$
$$=x\left\{a^2\big(1-ax+ax^2-x+ax^2-ax^3\big)-1\right\}$$
$$=x\left\{-a^3x^3+2a^3x^2+(-a^3-a^2)x+a^2-1\right\}.$$
$$=-x\left\{a^3x^3-2a^3x^2+(a^3+a^2)x-a^2+1\right\}.$$

ここで

$$f(x)-x=ax(1-x)-x$$
$$=x\left\{a(1-x)-1\right\}$$
$$=x(-ax+a-1)$$
$$=-x(ax-a+1)$$

$1-\frac{1}{a}$	a^3	$-2a^3$	a^3+a^2	$-a^2+1$
		a^3-a^2	$-a^3+a$	a^2-1
	a^3	$-a^3-a^2$	a^2+a	0

$$g(x)-x=-x\left(x-1+\frac{1}{a}\right)\left\{a^3x^2+(-a^3-a^2)x+a^2+a\right\}$$
$$=-x(ax-a+1)\left\{a^2x^2+(-a^2-a)x+a+1\right\}$$
$$=\big(f(x)-x\big)\left\{a^2x^2+(-a^2-a)x+a+1\right\}.$$

とできるので

$g(x)-x$ は $f(x)-x$ で割り切れる. ■

定数 a に対して関数 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4x+a^2-6a-7}-\frac{3-a}{2}$ を考え，$y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とする。

(1) $y=f(x)$ の定義域を求めよ。また，$y=f^{-1}(x)$ とその定義域を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが接するときの a の値とその接点の座標を求めよ。(2009 近畿大)

(1)

$f(x)$ の定義域は

$4x+a^2-6a-7\geqq 0$

$x\geqq -\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a+\frac{7}{4}$ ——①

であり

$f(x)$ の値域は

$y\geqq -\frac{3-a}{2}$

より

$f^{-1}(x)$ の定義域は

$x\geqq -\frac{3-a}{2}$ ——②

$y=f(x)$ として，x について解く．

$y=\frac{1}{2}\sqrt{4x+a^2-6a-7}-\frac{3-a}{2}$

$\sqrt{4x+a^2-6a-7}=2y+3-a$

両辺 2乗して

$4x+a^2-6a-7=4y^2+9+a^2+12y-6a-4ay$

$4x=4y^2+(-4a+12)y+16$

$x=y^2+(-a+3)y+4$

x と y を入れかえて

$y=x^2+(-a+3)x+4$

よって $f^{-1}(x)=x^2+(-a+3)x+4$

(2) $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフが接するとき

$y=f^{-1}(x)$ と $y=x$ のグラフも接するので

$x^2+(-a+3)x+4=x$

$x^2+(-a+2)x+4=0$ ——③

判別式 $D=0$ であり

$D=(-a+2)^2-16$

$=a^2-4a-12$

$=(a-6)(a+2)=0$

$a=6,-2$

(i) $a=6$ のとき

① $x\geqq -9+9+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$

② $x\geqq \frac{3}{2}$

①かつ② より $x\geqq \frac{3}{2}$

③ $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$

(これは $x\geqq\frac{3}{2}$ を満たす)

このとき $y=2$

(ii) $a=-2$ のとき

① $x\geqq -1-3+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}$

② $x\geqq -\frac{5}{2}$

①かつ② より $x\geqq -\frac{9}{4}$

③ $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$

$x=-2$

(これは $x\geqq -\frac{9}{4}$ を満たす.)

このとき $y=-2$.

(i), (ii) より

$\begin{cases} a=6 \text{ のとき 接点 } (2,2) \\ a=-2 \text{ のとき 接点 } (-2,-2) \end{cases}$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B68]

関数 $f(x)=\dfrac{ax}{1+ax}$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は $a>1$ を満たす定数とする。

(1) 実数 t が $f(f(t))=f(t)$ を満たすとき，$f(t)=t$ も満たすことを示せ。

(2) x についての不等式 $f(f(x))\geqq f(x)$ を解け。 （同志社大）

(1) （証明）

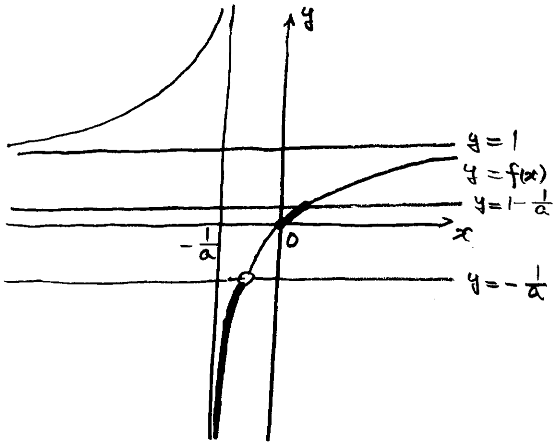
$f(t)=y$ とおくと

$f(f(t))=f(t)$ より

$f(y)=y$

ここで改めて $y=t$ として

$f(t)=t$ ■



(2)

$f(x)=t$ $(x\neq-\frac{1}{a})$ とおくと

$f(f(x))\geqq f(x)$ より

$f(t)\geqq t$ $(t\neq-\frac{1}{a})$

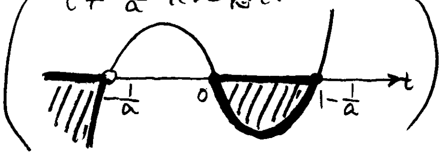
$\dfrac{at}{1+at}\geqq t$

$at(1+at)\geqq t(1+at)^2$

$t(1+at)\{a-(1+at)\}\geqq 0$

$t(at+1)(at+1-a)\leqq 0$

$t\neq-\frac{1}{a}$ に注意して



$t\leqq-\frac{1}{a}$ ，$0\leqq t\leqq 1-\frac{1}{a}$

$f(x)\leqq-\frac{1}{a}$ ，$0\leqq f(x)\leqq 1-\frac{1}{a}$

ここで

$f(x)=\dfrac{ax}{1+ax}$

$=\dfrac{(ax+1)-1}{ax+1}$

$=\dfrac{-1}{ax+1}+1$

漸近線：$x=-\frac{1}{a}$ ，$y=1$

（$y=f(x)$ で $y=-\frac{1}{a}$ として

$\dfrac{ax}{1+ax}=-\dfrac{1}{a}$

$a^2x=-1-ax$

$(a^2+a)x=-1$

$a^2+a=a(a+1)\neq0$ より

$x=-\dfrac{1}{a(a+1)}$

$y=f(x)$ で $y=1-\frac{1}{a}$ として

$\dfrac{ax}{1+ax}=1-\dfrac{1}{a}$

$a^2x=(a-1)(1+ax)$

$a^2x=a-1+(a^2-a)x$

$ax=a-1$

$a\neq0$ より

$x=1-\dfrac{1}{a}$ ）

よって

$-\dfrac{1}{a}<x<-\dfrac{1}{a(a+1)}$ ，$0\leqq x\leqq 1-\dfrac{1}{a}$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B69]

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。関数 $y=f(x)$ のグラフが y 軸と平行なある直線に関して対称であるとする。

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ が満たす関係式を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ は2つの2次関数の合成関数になっていることを示せ。 (2006 京都府立医科大)

(1)

対称軸：$x=p$ とおくと。

x 軸方向に $-p$ だけ平行移動して

$$y=(x+p)^4+a(x+p)^3+b(x+p)^2+c(x+p)+d$$

$$\begin{aligned}
&=x^4+4px^3+6p^2x^2+4p^3x+p^4\\
&\quad+ax^3+3apx^2+3ap^2x+ap^3\\
&\quad+bx^2+2bpx+bp^2\\
&\quad+cx+cp\\
&\quad+d
\end{aligned}$$

$$=x^4+(4p+a)x^3+(6p^2+3ap+b)x^2+(4p^3+3ap^2+2bp+c)x+(ap^3+bp^2+cp+d)=g(x)$$

とおくと

$$g(-x)=x^4-(4p+a)x^3+(6p^2+3ap+b)x^2-(4p^3+3ap^2+2bp+c)x+(ap^3+bp^2+cp+d)$$

$y=g(x)$ のグラフは y 軸に関して対称なので

$g(-x)=g(x)$ を満たし。

これは x についての恒等式より

$$\begin{cases}4p+a=-(4p+a)\\ 4p^3+3ap^2+2bp+c=-(4p^3+3ap^2+2bp+c)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}4p+a=0 & \text{——①}\\ 4p^3+3ap^2+2bp+c=0 & \text{——②}\end{cases}$$

① より $p=-\dfrac{a}{4}$

② に代入して

$$-\frac{a^3}{16}+\frac{3a^3}{16}-\frac{ab}{2}+c=0$$

$$\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c=0$$

$$a^3-4ab+8c=0$$

よって，a,b,c,d が満たす関係式は

$a^3-4ab+8c=0$ かつ d は任意

(2)（証明）

2つの2次関数を

$$\begin{cases}u(x)=x^2+px+q\\ v(x)=x^2+rx+s\end{cases}$$

とおくと

$$(u\circ v)(x)=u(v(x))$$

$$\begin{aligned}
&=(v(x))^2+p(v(x))+q\\
&=(x^2+rx+s)^2+p(x^2+rx+s)+q\\
&=x^4+r^2x^2+s^2+2rx^3+2rsx+2sx^2+px^2+prx+ps+q\\
&=x^4+2rx^3+(r^2+2s+p)x^2+(2rs+pr)x+(s^2+ps+q)
\end{aligned}$$

$(u\circ v)(x)=f(x)$ が x についての恒等式として

$$\begin{cases}a=2r\\ b=r^2+2s+p\\ c=2rs+pr\\ d=s^2+ps+q\end{cases}$$

このとき

$$\begin{aligned}
&a^3-4ab+8c\\
&=8r^3-8r(r^2+2s+p)+8(2rs+pr)\\
&=8r^3-8r^3-16rs-8pr+16rs+8pr\\
&=0
\end{aligned}$$

であり

d は任意であるので

$f(x)=(u\circ v)(x)$

$u(x)$ と $v(x)$ は2次関数

とできる。■