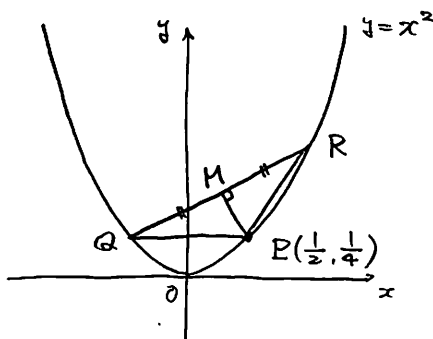


座標平面上の1点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の2点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を、3点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、 $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。



線分 QR の中点 $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

とおく。

$$\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{QR} \quad \text{よ} \quad \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$$

∵

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM} \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}, \frac{2(\alpha^2+\beta^2)-1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= (-\alpha, -\alpha^2) + (\beta, \beta^2) \\ &= (\beta-\alpha, \beta^2-\alpha^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\beta^2-\alpha^2-(\beta-\alpha)}{2} + \frac{2(\beta^2-\alpha^2)-(2(\alpha^2+\beta^2)-1)}{4} = 0$$

$$2(\beta^2-\alpha^2) - 2(\beta-\alpha) + 2(\beta^2-\alpha^2) - (2\alpha^2+2\beta^2-1) = 0$$

$$2(\beta^2-\alpha^2) + (\beta^2-\alpha^2) - 2(\beta-\alpha) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \quad \text{よ} \quad$$

$$2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha+\beta) - 2 = 0 \quad \text{--- ①}$$

∵

点 G は $\triangle PQR$ の重心 よ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{3} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + (\alpha, \alpha^2) + (\beta, \beta^2)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}, \alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

よ

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3} \left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right) \\ Y = \frac{1}{3} \left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 3X - \frac{1}{2} \\ \alpha^2+\beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \quad \text{よ}$$

$$3Y - \frac{1}{4} = \left(3X - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\alpha\beta$$

$$2\alpha\beta = 9X^2 - 3X + \frac{1}{4} - 3Y + \frac{1}{4}$$

$$\alpha\beta = \frac{9}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{3}{2}Y + \frac{1}{4}$$

α と β は 2 次方程式

$$t^2 - (3X - \frac{1}{2})t + \left(\frac{9}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{3}{2}Y + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ である ∴ 判別式 $D > 0$ よ

$$\left(3X - \frac{1}{2}\right)^2 - (18X^2 - 6X - 6Y + 1) > 0$$

$$9X^2 - 3X + \frac{1}{4} - 18X^2 + 6X + 6Y - 1 > 0$$

$$6Y > 9X^2 - 3X + \frac{3}{4}$$

$$Y > \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8} \quad \text{--- ②}$$

① よ

$$2\left(3X - \frac{1}{2}\right)\left(3Y - \frac{1}{4}\right) + \left(3X - \frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

$$18XY - \frac{3}{2}X - 3Y + \frac{1}{4} + 3X - \frac{1}{2} = 0$$

$$18XY + \frac{3}{2}X - 3Y - \frac{1}{4} = 0$$

$$24XY + 2X - 4Y - 3 = 0$$

$$4(6X - 1)Y = -2X + 3$$

$$\begin{cases} \text{∵ } X = \frac{1}{6} \text{ と } Y = \frac{8}{3} \text{ と} \\ 0 = \frac{8}{3} \text{ とは } \text{不合理} \end{cases}$$

$$X \neq \frac{1}{6} \quad \text{よ}$$

$$Y = \frac{-2X+3}{24X-4}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}}{24X-4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{2}{18X-3} - \frac{1}{12} \quad \text{--- ③}$$

$$\frac{-\frac{1}{12}}{24X-4} = \frac{-2X+3}{24X-4} - \frac{1}{12}$$

②, ③ より

$$\frac{2}{18x-3} - \frac{1}{12} > \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$$

$$\frac{-2x+3}{24x-4} > \frac{12x^2-4x+1}{8}$$

$$\frac{-2x+3}{6x-1} > \frac{12x^2-4x+1}{2}$$

$$(-2x+3) \cdot 2 \cdot (6x-1) > (12x^2-4x+1)(6x-1)^2$$

$$(6x-1) \{ (12x^2-4x+1)(6x-1) + 2(2x-3) \} < 0$$

$$(6x-1)(12x^3-36x^2+10x-1+4x-6) < 0$$

$$(6x-1)(12x^3-36x^2+14x-7) < 0$$

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 12 & -36 & 14 & -7 \\ & 36 & 0 & 7 & \\ \hline & 12 & 0 & 14 & 0 \end{array} \right]$$

$$(6x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(12x^2+14) < 0$$

$$12x^2+14 > 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$$

よって $G(x, y)$ は

$$y = \frac{2}{18x-3} - \frac{1}{12} \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$$

を満たす

つまり、点 G の軌跡は

$$\underline{\underline{\text{双曲線弧} : y = \frac{2}{18x-3} - \frac{1}{12} \quad \left(\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}\right)}}$$

各項が実数である無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対し, 関数

$$f_n(x) = \frac{a_n x - b_n}{(2^{n+1} - 2)x - (2^{n+1} - 1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし, $a_1=0$, $b_1=1$ とする。 $n=1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x)) \quad \left(x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}-2} \right)$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $f_2(x)$ と a_2 , b_2 を求めよ。
- (2) $t = f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = \dots$ を満たす実数 t をすべて求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$$(1) \quad f_1(x) = \frac{a_1 x - b_1}{(2^2 - 2)x - (2^2 - 1)} = \frac{-1}{2x - 3}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(f_1(x)) & f_2(x) &= \frac{a_2 x - b_2}{(2^3 - 2)x - (2^3 - 1)} \\ &= \frac{-1}{2f_1(x) - 3} & &= \frac{a_2 x - b_2}{6x - 7} \quad \text{--- ②} \\ &= \frac{-1}{\frac{-2}{2x-3} - 3} \\ &= \frac{-2x+3}{-2-6x+9} \\ &= \frac{-2x+3}{-6x+7} \\ &= \frac{2x-3}{6x-7} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

①, ② より

$$\underline{a_2 = 2, b_2 = 3}$$

$$(2) \quad f_1(t) = t \quad \text{より}$$

$$\frac{-1}{2t-3} = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \text{かつ } t \neq \frac{3}{2}$$

$$(2t-1)(t-1) = 0 \quad \text{かつ } t \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } t = \frac{1}{2}, 1 \quad (\text{必要})$$

逆にこのとき, $f_n(t) = t$ となることを
数学的帰納法により示す。

$$(i) \quad n=1 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$f_1(t) = t$$

が成り立つことは明らか。

$$(ii) \quad n=k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad \alpha \text{ とき成り立つと仮定する}$$

$$\text{つまり } f_k(t) = t \quad \text{が成り立つ。}$$

$$n=k+1 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$f_{k+1}(t) = f_k(f_1(t))$$

$$= f_k(t)$$

$$= t$$

$$\text{よって } n=k \quad \alpha \text{ とき成り立つは}$$

$$n=k+1 \quad \alpha \text{ ときも成り立つ。}$$

$$(i), (ii) \quad \text{より}$$

$$\text{すべて } n \in \mathbb{N} \quad \text{で } f_n(t) = t \quad \text{は成り立つ。}$$

$$\text{よって } \underline{t = \frac{1}{2}, 1}$$

$$(3) \quad f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = f_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{より}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a_{n+1} - b_{n+1}}{(2^{n+2} - 2)\frac{1}{2} - (2^{n+2} - 1)} = \frac{\frac{1}{2}a_n - b_n}{(2^{n+1} - 2)\frac{1}{2} - (2^{n+1} - 1)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a_{n+1} - b_{n+1}}{2^{n+1} - 2^{n+2}} = \frac{\frac{1}{2}a_n - b_n}{2^n - 2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - 2b_n$$

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = 2(a_n - 2b_n)$$

$$\text{よって } a_n - 2b_n = (a_1 - 2b_1) \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n - 2b_n = -2^n \quad \text{--- ②}$$

$$f_{n+1}(1) = f_n(1) \quad \text{より}$$

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(2^{n+2} - 2) - (2^{n+2} - 1)} = \frac{a_n - b_n}{(2^{n+1} - 2) - (2^{n+1} - 1)}$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$$

$$\text{よって } a_n - b_n = a_1 - b_1$$

$$a_n - b_n = -1 \quad \text{--- ③}$$

$$② \quad a_n - 2b_n = -2^n$$

$$③ \times 2 \quad \begin{array}{r} 2a_n - 2b_n = -2 \\ -a_n \quad \quad = -2^n + 2 \end{array} \quad (-)$$

$$a_n = 2^n - 2$$

$$② \quad a_n - 2b_n = -2^n$$

$$③ \quad \begin{array}{r} a_n - b_n = -1 \\ -b_n \quad \quad = -2^n + 1 \end{array} \quad (-)$$

$$b_n = 2^n - 1$$

$$\text{f.7} \quad \underline{\underline{a_n = 2^n - 2, \quad b_n = 2^n - 1}}$$

$p = \sqrt{5} + 1$ とし, $f(x) = px(1-x)$, $g(x) = f(f(x))$ とする。

(1) $f\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ と $g\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ の値を求めよ。

(2) 4次方程式 $g(x) = x$ を解け。

以下の問いでは(2)で求めた4次方程式の解を大きい順に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。

(3) $\gamma < x < \beta$ ならば $\beta < f(x) < \alpha$ となることを示せ。

(4) $\gamma < a_1 < \beta$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。このとき

$$a_{2n+1} < a_{2n-1} < \beta < a_{2n} < a_{2n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} (1) \quad f\left(1 - \frac{1}{p}\right) &= p\left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} \\ &= 1 - \frac{1}{p} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(1 - \frac{1}{p}\right) &= f\left(f\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) \\ &= f\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

(2) $g(x) = x$ より

$$f(f(x)) = x$$

すなわち

$$f(x) = y \quad \text{と} \quad x < y$$

$$f(y) = x$$

より

$$\begin{cases} px(1-x) = y & \text{--- ①} \\ py(1-y) = x & \text{--- ②} \end{cases}$$

① - ② より

$$(px - px^2) - (py - py^2) = y - x$$

$$p(x-y) - p(x^2 - y^2) = -(x-y) \quad \text{--- ③}$$

(i) $x = y$ のとき ① は

$$px(1-x) = x$$

$$x(p - px - 1) = 0$$

$$x = 0, \frac{p-1}{p}$$

$$x = 0, 1 - \frac{1}{p}$$

$$\text{よって } (x, y) = (0, 0), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}, \frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$$

(ii) $x \neq y$ のとき ③ は

$$p - p(x+y) = -1$$

$$x+y = \frac{p+1}{p}$$

① + ② より

$$(px - px^2) + (py - py^2) = x + y$$

$$p(x+y) - p(x^2 + y^2) = x + y$$

$$x^2 + y^2 = (x+y) \cdot \frac{p-1}{p} = \frac{p^2-1}{p^2}$$

$$(x+y)^2 - 2xy = \frac{p^2-1}{p^2}$$

$$\frac{p^2+2p+1}{p^2} - 2xy = \frac{p^2-1}{p^2}$$

$$xy = \frac{p+1}{p^2}$$

x, y は

$$t^2 - \frac{p+1}{p}t + \frac{p+1}{p^2} = 0$$

の2解であり

$$\frac{p+1}{p} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{p+1}{p^2} = \frac{2+\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2+2\sqrt{5}}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{8}$$

より

$$t^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{4}t + \frac{1+\sqrt{5}}{8} = 0$$

$$8t^2 - 2(3+\sqrt{5})t + (1+\sqrt{5}) = 0$$

$$t = \frac{3+\sqrt{5} \pm \sqrt{14+6\sqrt{5}-8-8\sqrt{5}}}{8}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5} \pm \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{8}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5} \pm (\sqrt{5}-1)}{8}$$

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}$$

$$\text{よて } \{x, y\} = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$

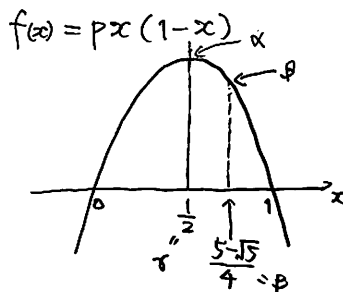
(i), (ii) より

$$\underline{x = 0, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

$$(3) \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, d = 0$$

である。このとき題意を示す。

(証明)



$\gamma < x < \beta$ のとき 単調減少 であり

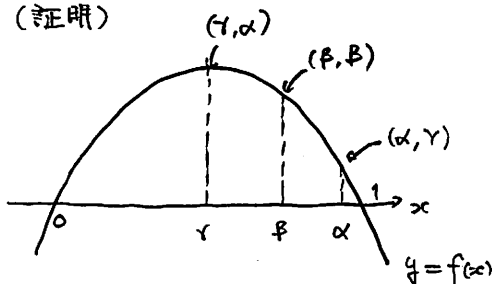
$$\begin{aligned} (2) \text{ より } f(\beta) &= \alpha \\ f(\gamma) &= \alpha \end{aligned}$$

を満足す。

$$\text{よて } f(\beta) < f(x) < f(\gamma)$$

$$\text{すなわち } \beta < f(x) < \alpha \text{ が成り立つ。}$$

(4) (証明)



(2), (3) より

$$\gamma < x < \beta \text{ のとき } \beta < f(x) < \alpha$$

$$\beta < x < \alpha \text{ のとき } \gamma < f(x) < \beta$$

また、

$$g(x) - x = -p^3 x(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\text{よて } \gamma < x < \beta \text{ のとき } g(x) < x$$

$$\beta < x < \alpha \text{ のとき } g(x) > x$$

$$\gamma < a_1 < \beta \text{ である。}$$

$$\gamma < a_{2k-1} < \beta, \beta < a_{2k} < \alpha$$

を満足す。

$$g(a_{2k-1}) < a_{2k-1} \text{ より}$$

$$f(f(a_{2k-1})) < a_{2k-1}$$

$$f(a_{2k}) < a_{2k-1}$$

$$a_{2k+1} < a_{2k-1}$$

また、

$$g(a_{2k}) > a_{2k} \text{ より}$$

$$f(f(a_{2k})) > a_{2k}$$

$$f(a_{2k+1}) > a_{2k}$$

$$a_{2k+2} > a_{2k}$$

よって (1) より

$$a_{2k+1} < a_{2k-1} < \beta < a_{2k} < a_{2k+2}$$

が成り立つ。 ■

$$f(x) = \frac{8x+21}{3x+8} \text{ とおく。}$$

- (1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ。
 (2) $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 2$ であることを示せ。
 (3) $x \geq 2, y \geq 2$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。
 (4) $x \geq 2$ ならば $|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し、これを用いて $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を1つ求めよ。

(1) (証明)

$$\begin{aligned} f(\sqrt{7}) &= \frac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8} \\ &= \frac{\sqrt{7}(8+3\sqrt{7})}{3\sqrt{7}+8} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

(2) (証明)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8x+21}{3x+8} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{6(3x+8)} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } x \geq 0 \text{ より} \\ 3x+8 \geq 8 \\ -\frac{1}{6(3x+8)} \geq -\frac{1}{48} \end{array} \right)$$

$$f(x) \geq \frac{8}{3} - \frac{1}{48} = \frac{127}{48} > 2$$

よって $f(x) > 2$ が成り立つ。

(3) (証明)

$x \geq 2$ で $f(x)$ は連続かつ微分可能
 であり

$$f'(x) = -\frac{1}{6} \times \left\{ -\frac{3}{(3x+8)^2} \right\} = \frac{1}{2(3x+8)^2}$$

$x \leq y$ においても一般性を失わず、

平均値の定理より

$$f(x) - f(y) = (x-y) f'(c) \quad \text{かつ } x \leq c \leq y$$

ある c が存在する。

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| |f'(c)|$$

ここで $c \geq 2$ かつ $f(x)$ は減少関数なので

$$f'(c) \leq f'(c) = \frac{1}{2 \times 14^2} < \frac{1}{100}$$

$$\text{よって } |f'(c)| < \frac{1}{100}$$

$$\text{よって } |f(x) - f(y)| < \frac{|x-y|}{100} \quad \text{が成り立つ。}$$

(4) (証明)

$$(2) \text{ より } x \geq 2 \text{ のとき } f(x) \geq 2$$

(3) より

$$|f(f(x)) - f(\sqrt{7})| \leq \frac{|f(x) - \sqrt{7}|}{100}$$

$$\begin{aligned} |f(f(x)) - \sqrt{7}| &\leq \frac{|f(x) - f(\sqrt{7})|}{100} \\ &\leq \frac{1}{100} \times \frac{|x - \sqrt{7}|}{100} \end{aligned}$$

よって $x \geq 2$ のとき

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000} \quad \text{が成り立つ。}$$

$$f(2) = \frac{37}{14} \quad \text{であり}$$

$$f(f(2)) = \frac{8 \times \frac{37}{14} + 21}{3 \times \frac{37}{14} + 8} = \frac{590}{223}$$

よって

$$\left| \frac{590}{223} - \sqrt{7} \right| \leq \frac{|2 - \sqrt{7}|}{10000} = \frac{\sqrt{7} - 2}{10000}$$

ここで

$$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \text{より} \quad 0 < \sqrt{7} - 2 < 1$$

$$\text{よって } \frac{\sqrt{7} - 2}{10000} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

$$\text{よって } r = \frac{590}{223}$$

不等式 $\sqrt{a^2 - x^2} > ax - a$ を解け。ただし、 a は定数で、 $a \neq 0$ とする。

$$\sqrt{a^2 - x^2} > ax - a$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} > a(x-1)$$

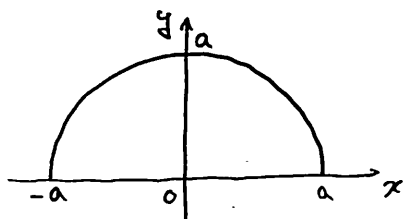
$$\textcircled{1} \ y = \sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 \quad \because \ y \geq 0$$

$$\textcircled{2} \ y = ax - a = a(x-1)$$

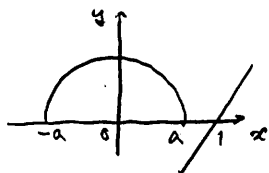
であり。

(I) $a > 0$ のとき $\textcircled{1}$ は

原点中心、半径 a の半円を表し。

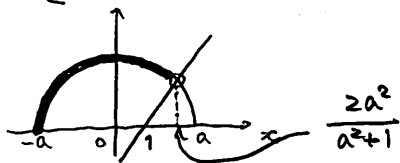


(i) $0 < a < 1$ のとき。



解は $-a \leq x \leq a$

(ii) $a \geq 1$ のとき。



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を連立して。

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a(x-1)$$

$x > 1$ のとき両辺2乗して。

$$a^2 - x^2 = a^2(x^2 - 2x + 1)$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 2a^2x = 0$$

$$x \{ (a^2 + 1)x - 2a^2 \} = 0$$

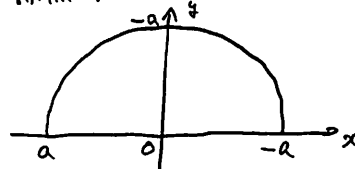
$x \neq 0$ より

$$x = \frac{2a^2}{a^2 + 1}$$

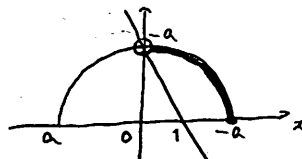
解は $-a \leq x < \frac{2a^2}{a^2 + 1}$

(II) $a < 0$ のとき $\textcircled{1}$ は

原点中心、半径 $-a$ の半円を表し。

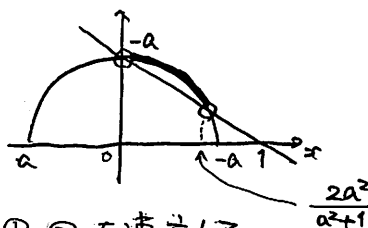


(i) $1 \leq -a$ (i.e. $a \leq -1$) のとき



解は $0 < x \leq -a$

(ii) $-a \leq 1$ (i.e. $-1 \leq a < 0$) のとき



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を連立して

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a(x-1)$$

$x < 1$ のとき両辺2乗して整理すると

$$x \{ (a^2 + 1)x - 2a^2 \} = 0$$

$$\textcircled{2} \ x = \frac{2a^2}{a^2 + 1}$$

解は $0 < x < \frac{2a^2}{a^2 + 1}$

以上により

$$\begin{cases} -a \leq x < \frac{2a^2}{a^2 + 1} & (a \geq 1 \text{ のとき}) \\ -a \leq x \leq a & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ 0 < x < \frac{2a^2}{a^2 + 1} & (-1 \leq a < 0 \text{ のとき}) \\ 0 < x \leq -a & (a < -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$-1 < x < 1$ を定義域とする関数 $f_p(x) = \frac{x-p}{1-px}$, $f_q(x) = \frac{x-q}{1-qx}$ ($-1 < p < 1$, $-1 < q < 1$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 定義域内のすべての x に対して、 $-1 < f_q(x) < 1$ を示せ。
- (2) 定義域内のすべての x に対して、 $f_p(f_q(x)) = \frac{x-r}{1-rx}$ を満たすとき、 r を p と q を用いて表し、 $-1 < r < 1$ を示せ。ただし、 $f_p(f_q(x))$ は $f_p(y) = \frac{y-p}{1-py}$ に $y = f_q(x)$ を代入したものを意味するものとする。
- (3) 定義域内のすべての x に対して、 $f_p(f_q(x)) = f_q(x)$ を満たす p を求めよ。

(1) (証明)

$$\begin{aligned} 1 - f_q(x) &= 1 - \frac{x-q}{1-qx} \\ &= \frac{1-qx-x+q}{1-qx} \\ &= \frac{(1+q)(1-x)}{1-qx} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_q(x) - (-1) &= \frac{x-q}{1-qx} + 1 \\ &= \frac{x-q+1-qx}{1-qx} \\ &= \frac{(1-q)(1+x)}{1-qx} > 0 \end{aligned}$$

よって $-1 < x < 1$ のとき

$$-1 < f_q(x) < 1 \quad \text{が成り立つ。}$$

$$(pq+1-p-q+r)x^2 = pq+1-p-q+r$$

$$(pq+1-p-q+r)(x+1)(x-1) = 0$$

すべての x に対して成り立つためには

$$pq+1-p-q+r = 0$$

$$(pq+1)r = p+q$$

$$pq+1 \neq 0 \quad \text{より}$$

$$r = \frac{p+q}{pq+1}$$

(証明)

$$1-r = 1 - \frac{p+q}{pq+1}$$

$$= \frac{pq+1-p-q}{pq+1}$$

$$= \frac{(1-p)(1-q)}{pq+1} > 0$$

$$(2) \quad f_p(f_q(x)) = \frac{f_q(x)-p}{1-pf_q(x)}$$

$$= \frac{\frac{x-q}{1-qx} - p}{1 - p \cdot \frac{x-q}{1-qx}}$$

$$= \frac{x-q-p+pqx}{1-qx-px+pq}$$

$$= \frac{(1+pq)x - (p+q)}{(1+pq) - (p+q)x}$$

$$f_p(f_q(x)) = \frac{x-r}{1-rx}$$

よって

$$\frac{(1+pq)x - (p+q)}{(1+pq) - (p+q)x} = \frac{x-r}{1-rx}$$

$$-(1+pq)rx^2 + (1+pq+pr+qr)x - (p+q)$$

$$= -(p+q)x^2 + (1+pq+pr+qr)x - (1+pq)r$$

$$r - (-1) = \frac{p+q}{pq+1} + 1$$

$$= \frac{p+q+pq+1}{pq+1}$$

$$= \frac{(1+p)(1+q)}{pq+1} > 0$$

よって $-1 < r < 1$ が成り立つ。 ■

(3) 解法1

$$f_p(f_q(x)) = f_q(x)$$

$$\frac{f_q(x) - p}{1 - pf_q(x)} = f_q(x)$$

$$f_q(x) - p = f_q(x) - p\{f_q(x)\}^2$$

$$p\{f_q(x)\}^2 = p$$

$$p\{f_q(x)+1\}\{f_q(x)-1\} = 0$$

すべての x に対して 成り立つためには

$$\underline{\underline{p=0}}$$

解法2

$$f_p(f_q(x)) = f_q(x)$$

$$\frac{x-r}{1-rx} = \frac{x-q}{1-qx}$$

$$-qx^2 + (qr+1)x - r = -rx^2 + (qr+1)x - q$$

$$(-q+r)x^2 - (-q+r) = 0$$

$$(-q+r)(x+1)(x-1) = 0$$

すべての x に対して 成り立つためには

$$q = r$$

$$q = \frac{p+q}{pq+1}$$

$$pq^2 + q = p + q$$

$$p(q^2 - 1) = 0$$

$$q^2 \neq 1 \quad \text{よって} \quad \underline{\underline{p=0}}$$

実数の閉区間 $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ を定義域および値域とする関数

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & (0 \leq x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ -2x + \frac{3}{2} & (\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \text{ のとき}) \\ 2x - \frac{3}{2} & (\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。この関数の2回の合成を $f_2(x) = f(f(x))$ 、また3回の合成を $f_3(x) = f(f_2(x)) = f(f(f(x)))$ とする。

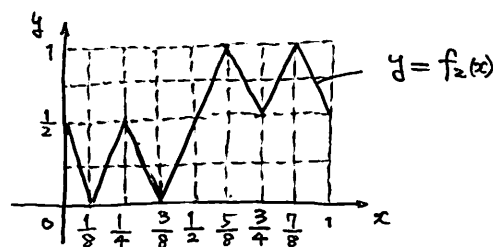
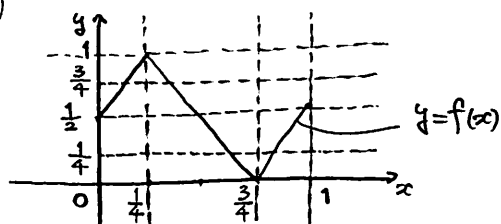
- (1) x が閉区間 $[0, 1]$ を動くとき、 $y = f_2(x)$ および $y = f_3(x)$ のグラフの概形をかけ。

さらに4以上の自然数 n に対して、関数 $f(x)$ の n 回の合成を $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ とする。また、 $f_1(x) = f(x)$ とおく。いま閉区間 $[0, 1]$ 内の点 c を1つ決め、順に値 $f_1(c)$, $f_2(c)$, $f_3(c)$, $\dots$ を見ていく。このとき $f_1(c) = c$ であれば c を周期1の点とよぶ。 c が周期1の点ではなく、かつ $m \geq 2$ として m 回の合成でその値が初めて c になるとき、つまり条件 $f_j(c) \neq c$ ($j=1, 2, \dots, m-1$) かつ $f_m(c) = c$ が満たされるとき、 c を周期 m の点とよぶ。

- (2) 閉区間 $[0, 1]$ 内の周期1の点の個数を求めよ。また周期2の点の個数を求めよ。

- (3) m を3以上の奇数としたとき、周期 m の点の個数を求めよ。

(1)



$$0 \leq x \leq \frac{1}{8} \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = -2\left(2x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = -4x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = 2\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 4x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{8} \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = 2\left(-2x + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = -4x + \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{8} \leq x \leq \frac{5}{8} \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = -2\left(-2x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 4x - \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = 2\left(-2x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -4x + \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = 2\left(2x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = 4x - \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{8} \leq x \leq 1 \text{ のとき}$$

$$f_2(x) = -2\left(2x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = -4x + \frac{9}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{16} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = -2\left(-4x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = 8x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16} \leq x \leq \frac{1}{8} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = 2\left(-4x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -8x + \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{16} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = 2\left(4x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 8x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{16} \leq x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = -2\left(4x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = -8x + \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{16} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = -2\left(-4x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 8x - \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{16} \leq x \leq \frac{3}{8} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = 2\left(-4x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -8x + \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{8} \leq x \leq \frac{7}{16} \text{ のとき}$$

$$f_3(x) = 2\left(4x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = 8x - \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{16} \leq x \leq \frac{9}{16} \text{ とき}$$

$$f_3(x) = -2\left(4x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = -8x + \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{16} \leq x \leq \frac{5}{8} \text{ とき}$$

$$f_3(x) = 2\left(4x - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = 8x - \frac{9}{2}$$

$$\frac{5}{8} \leq x \leq \frac{11}{16} \text{ とき}$$

$$f_3(x) = 2\left(-4x + \frac{7}{2}\right) - \frac{3}{2} = -8x + \frac{11}{2}$$

$$\frac{11}{16} \leq x \leq \frac{3}{4} \text{ とき}$$

$$f_3(x) = -2\left(-4x + \frac{7}{2}\right) + \frac{3}{2} = 8x - \frac{11}{2}$$

$$\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{16} \text{ とき}$$

$$f_3(x) = -2\left(4x - \frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} = -8x + \frac{13}{2}$$

$$\frac{13}{16} \leq x \leq \frac{7}{8} \text{ とき}$$

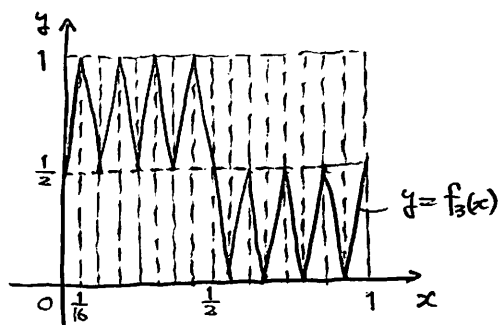
$$f_3(x) = 2\left(4x - \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} = 8x - \frac{13}{2}$$

$$\frac{7}{8} \leq x \leq \frac{15}{16} \text{ とき}$$

$$f_3(x) = 2\left(-4x + \frac{9}{2}\right) - \frac{3}{2} = -8x + \frac{15}{2}$$

$$\frac{15}{16} \leq x \leq 1 \text{ とき}$$

$$f_3(x) = -2\left(-4x + \frac{9}{2}\right) + \frac{3}{2} = 8x - \frac{15}{2}$$



(2) 周期 1 の点とは

$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフの交点の個数に一致し、(1) より

1 個

周期 2 の点とは

$y = f_2(x)$ と $y = x$ のグラフの交点の個数から、周期 1 の点の個数を除くとよい。(1) より

$$7 - 1 = \underline{\underline{6 \text{ (個)}}}$$

(3)

$$y = f_2(x) \text{ のグラフより}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ とき} & 0 \leq f_2(x) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ とき} & \frac{1}{2} \leq f_2(x) \leq 1 \end{cases}$$

m が 3 以上の奇数とするとき、

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ とき} & \frac{1}{2} \leq f_m(x) \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ とき} & 0 \leq f_m(x) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

となることを数学的帰納法により示す。

(証明)

(i) $m = 3$ のとき

(1) より 明らか

(ii) $m = k$ ($k = 3, 5, 7, \dots$) のとき

成り立つと仮定する

$$\text{つまり} \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ とき} & \frac{1}{2} \leq f_k(x) \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ とき} & 0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

が成り立つ。

このとき

$$f_{k+2}(x) = f_2(f_k(x)) \text{ より}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq f_k(x) \leq 1 \text{ とき} & \frac{1}{2} \leq f_{k+2}(x) \leq 1 \\ 0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{2} \text{ とき} & 0 \leq f_{k+2}(x) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

(*) と合わせて

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ とき} & \frac{1}{2} \leq f_{k+2}(x) \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ とき} & 0 \leq f_{k+2}(x) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

よって $m = k$ のとき成り立てば

$m = k + 2$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より

3 以上のすべての奇数 m について

成り立つ。

よって $y = f_m(x)$ と $y = x$ のグラフの

交点は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に限る。

これは周期 1 の点である。

つまり 周期 m の点 は 0 個