

次の極限値を求めよ。

- (1)
- $a_n = 2n^2 + n$
- である数列の初項から第
- n
- 項までの和を
- S_n
- とするとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$$

- (2)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

(1)

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k^2 + k)$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2(2n+1) + 3)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(4n+5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \times \frac{n}{n} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{4n+5}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(4 + \frac{5}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times 1 \times 4$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}$$

$$= \frac{2(1+1)}{1+1}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+5^{2n}}{9^n}$

(2) $a \neq -1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1}$

(1)

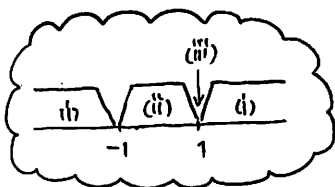
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+5^{2n}}{9^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+25^n}{9^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{9^n} + \left(\frac{25}{9} \right)^n \right)$$

$$= \underline{\underline{\infty}}$$

(2)



(i) $a < -1, 1 < a$ のとき $(a^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{a^n}}{1 + \frac{1}{a^n}} = 1$$

(ii) $-1 < a < 1$ のとき $(a^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1} = -1$$

(iii) $a = 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1}{1 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

(i) ~ (iii) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1} = \begin{cases} 1 & (a < -1, 1 < a \text{ のとき}) \\ -1 & (-1 < a < 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (1) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ を求めよ。
 (2) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}$ を求めよ。
 (3) a が正の実数のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(1) 解法1

$$(\text{分子}) = \sum_{k=1}^n (n+k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (n^2 + 2nk + k^2)$$

$$= \frac{(n^2 + 2n + n^2 + 2n^2)n}{2} + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= n^2(2n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n+1)(6n+n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$$

$$(\text{分母}) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

よ、

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \underline{\underline{7}}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})} \times \frac{(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2})}{(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}(n+1-n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

(3) (i) $0 < a < 1$ のとき

$$0 < a^n < 1 \quad \text{であり}$$

$$1 < 1 + a^n < 2$$

$$1^{\frac{1}{n}} < (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}$$

よ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$$

よ、

ハサミウチの原理によ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

(ii) $a = 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}}$$

$$= 1$$

(iii) $a > 1$ のとき

$$(1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = \left\{ a^n \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n + 1 \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= a \left\{ 1 + \left(\frac{1}{a} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}}$$

よ、

$$0 < \frac{1}{a} < 1 \quad \text{より}$$

$$0 < \left(\frac{1}{a} \right)^n < 1 \quad \text{であり}$$

$$1 < 1 + \left(\frac{1}{a} \right)^n < 2$$

$$1^{\frac{1}{n}} < \left\{ 1 + \left(\frac{1}{a} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}$$

よ、

$$a < (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} < a \cdot 2^{\frac{1}{n}}$$

よ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot 2^{\frac{1}{n}} = a$$

よ、

ハサミウチの原理によ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = a$$

(i) ~ (iii) よ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & (0 < a \leq 1 \text{ のとき}) \\ a & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 解法2

$$(\text{分子}) = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

よ、

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{1}{6} \cdot 2n(2n+1)(4n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} - 1 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(4n+1)}{n+1} - 1 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(4 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right\}$$

$$= 8 - 1$$

$$= \underline{\underline{7}}$$

(1) 解法3

$$(5式) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2 + (1+\frac{2}{n})^2 + \dots + (1+\frac{n}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + \dots + (\frac{n}{n})^2}$$

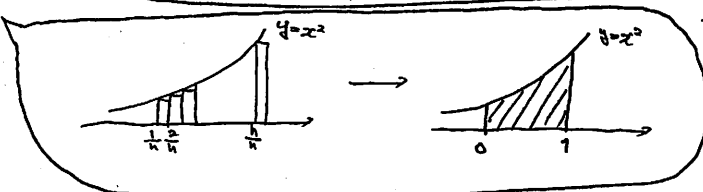
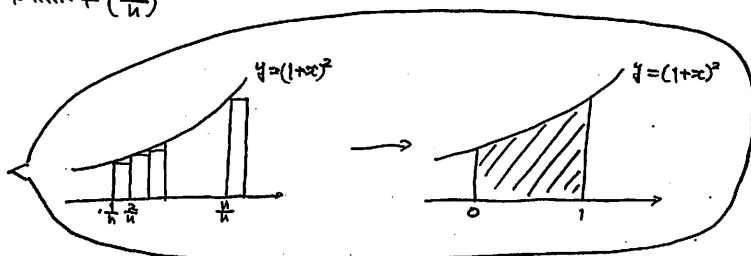
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (1+\frac{k}{n})^2}{\sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^2}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1+\frac{k}{n})^2}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^2}$$

$$= \frac{\int_0^1 (1+x)^2 dx}{\int_0^1 x^2 dx}$$

$$= \frac{[\frac{1}{3}(1+x)^3]_0^1}{[\frac{1}{3}x^3]_0^1}$$

$$= 8-1$$

$$= \underline{\underline{7}}$$



数列 $\{a_n\}$ は初項が a 、公比 r の等比数列とする。ただし、 $ar \neq 0$ とする。

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n}$ を求めよ。

(i) $-1 < r < 1$ のとき

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}, \quad T_n = \frac{a^2(1-r^{2n+2})}{1-r^2}$$

つまり

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{T_n} &= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \times \frac{(1-r)(1+r)}{a^2(1-r^2)(1+r^2)} \\ &= \frac{1+r}{a(1+r^{n+1})} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1+r}{a} \end{aligned}$$

(ii) $r < -1, 1 < r$ のとき

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}, \quad T_n = \frac{a^2(1-r^{2n+2})}{1-r^2}$$

つまり

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{T_n} &= \frac{1+r}{a(1+r^{n+1})} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0 \end{aligned}$$

(iii) $r = 1$ のとき

$$S_n = na, \quad T_n = na^2$$

つまり

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{na}{na^2} = \frac{1}{a} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{a}$$

(iv) $r = -1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-(-1)^{n+1})}{1-(-1)}, \quad T_n = na^2 \\ &= \frac{a(1-(-1)^{n+1})}{2} \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{T_n} &= \frac{a(1-(-1)^{n+1})}{2} \times \frac{1}{na^2} \\ &= \frac{1-(-1)^{n+1}}{2na} = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2na} \end{aligned}$$

ここで

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1 \quad \text{つまり}$$

$$0 \leq 1+(-1)^{n+1} \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1+(-1)^{n+1}}{2na} \leq \frac{1}{na}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na} = 0$$

よって、ハサミの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = 0$$

(i) ~ (iv) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = \begin{cases} \frac{1+r}{a} & (-1 < r < 1, r \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (r \leq -1, 1 < r \text{ のとき}) \\ \frac{1}{a} & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{\tan^{2n+1}x - \tan^n x + 1}{\tan^{2n+2}x + \tan^{2n}x + 1} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とする。 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

を求め、関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(i) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ $n \geq 4$

$$0 \leq \tan x < 1 \quad \text{である}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan^{2n+1}x - \tan^n x + 1}{\tan^{2n+2}x + \tan^{2n}x + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $x = \frac{\pi}{4}$ $n \geq 4$

$$\tan x = 1 \quad \text{である}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

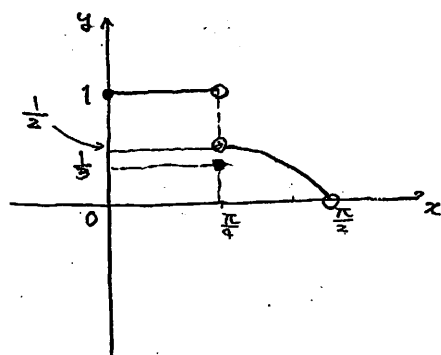
(iii) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ $n \geq 4$

$$\tan x > 1 \quad \text{である}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\tan^{n+2}x} + \frac{1}{\tan^{2n+2}x}}{1 + \frac{1}{\tan^{2n}x} + \frac{1}{\tan^{2n+2}x}} \\ &= \frac{\frac{1}{\tan x}}{1 + \frac{1}{\tan^2 x}} \\ &= \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} \\ &= \tan x \times \cos^2 x \\ &= \sin x \cos x \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \end{aligned}$$

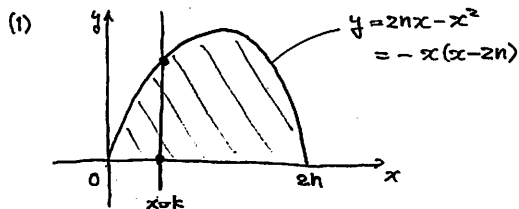
(i) ~ (iii) より

$y=f(x)$ のグラフの概形は下図の通り



自然数 n に対して関数 $y=2nx-x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域(境界を含む) R_n を考える。

- (1) 領域 R_n に含まれる格子点(x 座標と y 座標がともに整数である点)の数を S_n を求めよ。
- (2) 点 $A(0, 0)$, $B(2n, 0)$, および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域(境界を含む)に含まれる格子点の数 T_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。



$x=k$ のときの格子点は

$$y = 0, 1, 2, \dots, 2nk - k^2$$

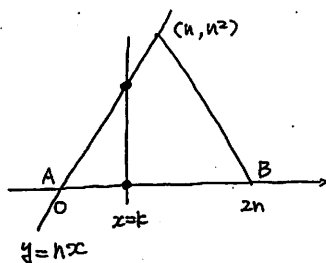
の $2nk - k^2 + 1$ (個)

よって

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{2n} (2nk - k^2 + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-k^2 + 2nk + 1) + 1 \\ &= -\frac{1}{6} 2n(2n+1)(4n+1) + \frac{(2n+1+4n^2+1)(2n)}{2} + 1 \\ &= -\frac{1}{3} n(2n+1)(4n+1) + n(4n^2+2n+2) + 1 \\ &= \frac{1}{3} (-8n^3 - 6n^2 - n + 12n^2 + 6n^2 + 6n + 3) \\ &= \frac{1}{3} (4n^3 + 5n^2 + 3n) \\ &= \frac{1}{3} (n + \frac{1}{2})(4n^2 - 2n + 6) \\ &= \frac{1}{3} (2n+1)(2n^2 - n + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \mid 4 \quad 0 \quad 5 \quad 3 \\ \hline \quad \quad -2 \quad 1 \quad -3 \\ \hline 4 \quad -2 \quad 6 \quad 0 \end{array}$$

- (2) $x=n$ のとき $y=n^2$ とする



$x=k$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) のときの格子点は

$$y = 0, 1, 2, \dots, nk$$

の $nk + 1$ (個)

よって

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (nk + 1) \times 2 + (n^2 + 1) \\ &= \frac{(1 + n^2 - n + 1)n}{2} \times 2 + n^2 + 1 \\ &= n^3 - n^2 + 2n + n^2 + 1 \\ &= \underline{\underline{n^3 + 2n + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{\frac{1}{3} (2n+1)(2n^2 - n + 3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})}{(2 + \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})} \\ &= \frac{3 \times 1}{2 \times 2} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

n を2以上の自然数とする。 x^{2n} を $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

すなわち、 x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$$

が成り立っているとす。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

$$x^{2n} = P_n(x) \left(x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$$

$$x^{2n} = P_n(x) \left(x - \frac{1}{n} \right) \left(x - \frac{n-1}{n} \right) + a_n x + b_n$$

$$x = \frac{1}{n} \quad \text{とすると}$$

$$\left(\frac{1}{n} \right)^{2n} = \frac{a_n}{n} + b_n \quad \text{--- ①}$$

$$x = \frac{n-1}{n} \quad \text{とすると}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{n} \right) a_n + b_n \quad \text{--- ②}$$

② - ① より

$$\left(1 - \frac{2}{n} \right) a_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{2n} - \left(\frac{1}{n} \right)^{2n}$$

十分大なる n に対して

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n-2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{2n} - \left(\frac{1}{n} \right)^{2n} \right\} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \left(\left(1 + \frac{1}{-n} \right)^{-n} \right)^{-2} - \left(\frac{1}{n} \right)^{2n} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1 \times (e^{-2} - 0) = e^{-2}$$

④ より

$$b_n = \left(\frac{1}{n} \right)^{2n} - \frac{a_n}{n}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0 - 0 = 0$$

よって

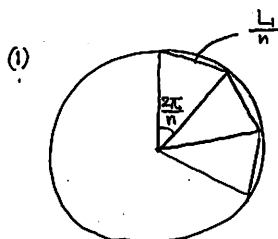
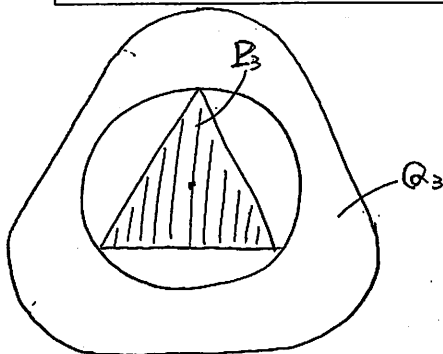
$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0}}$$

n は3以上の整数とし、 r は正の実数とする。周の長さが L の正 n 角形の周および内部からなる平面図形を P_n とし、その面積を A_n とする。また、 P_n からの距離が r 以下である点の全体が作る平面図形を Q_n とする。 $(Q_n$ は P_n を含むことに注意せよ。) Q_n の周の長さを L_n 、面積を S_n とする。

(1) A_n を L, n を用いて表せ。

(2) L_n と S_n を L, A_n, r を用いて表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(L_n)^2}$ を求めよ。



正 n 角形の外接円の半径 R

とすると

$$R \sin \frac{\pi}{n} = \frac{L}{2n}$$

$$\therefore R = \frac{L}{2n \sin \frac{\pi}{n}}$$

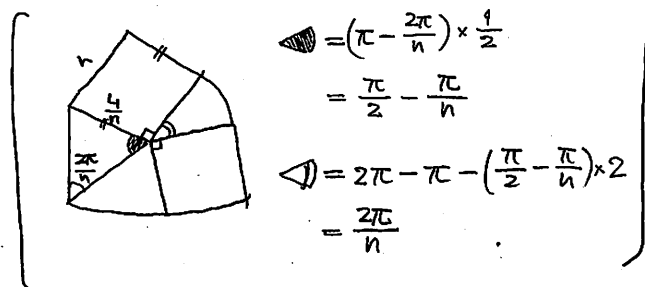
$$\therefore A_n = \left(\frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \right) \times n$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{L^2}{4n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \times 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \times n$$

$$= \frac{L^2 \cos \frac{\pi}{n}}{4n \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$$

(2)



$$\angle = \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

$$\angle = 2\pi - \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) \times 2$$

$$= \frac{2\pi}{n}$$

$$L_n = \frac{L}{n} \times n + \left(r \times \frac{2\pi}{n} \right) \times n$$

$$= \underline{\underline{L + 2\pi r}}$$

$$S_n = \left(r \times \frac{L}{n} \right) \times n + \left(\frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \times n + A_n$$

$$= \underline{\underline{Lr + \pi r^2 + A_n}}$$

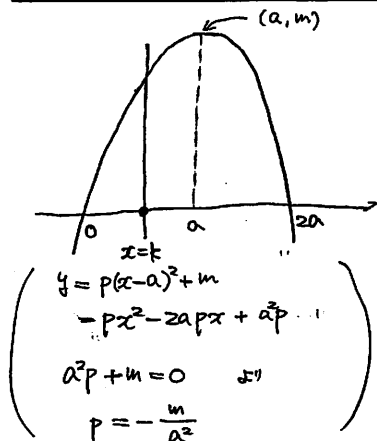
(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(L_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Lr + \pi r^2 + A_n}{(L + 2\pi r)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Lr + \pi r^2 + \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}}{(L + 2\pi r)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}} \times \frac{L^2}{4\pi} \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(L_n)^2} &= \frac{Lr + \pi r^2 + \frac{L^2}{4\pi}}{(L + 2\pi r)^2} \\ &= \frac{4\pi Lr + 4\pi^2 r^2 + L^2}{4\pi (L + 2\pi r)^2} \\ &= \frac{(L + 2\pi r)^2}{4\pi (L + 2\pi r)^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4\pi}}} \end{aligned}$$

a, m は自然数で a は定数とする。 xy 平面上の点 (a, m) を頂点とし、原点と点 $(2a, 0)$ を通る放物線を考える。この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m 、この領域の内部および境界線にある格子点の数を L_m とする。このとき、極限値 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{S_m}$ を求めよ。ただし、 xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである。



$$\begin{aligned} S_m &= \int_0^{2a} \left\{ -\frac{m}{a^2} x(x-2a) \right\} dx \\ &= -\frac{m}{a^2} \left\{ -\frac{1}{6} (2a)^3 \right\} \\ &= \frac{4am}{3} \end{aligned}$$

$x=k$ ($k=0, 1, 2, \dots, a$) における格子点は

$$y = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor -\frac{m}{a^2} k(k-2a) \right\rfloor$$

$$\text{の } \left\lfloor -\frac{m}{a^2} k(k-2a) \right\rfloor + 1 \text{ (個)}$$

よって

$$0 \leq -\frac{m}{a^2} k(k-2a) - \left\lfloor -\frac{m}{a^2} k(k-2a) \right\rfloor < 1$$

$$\text{より } -\frac{m}{a^2} k(k-2a) - 1 < \left\lfloor -\frac{m}{a^2} k(k-2a) \right\rfloor \leq -\frac{m}{a^2} k(k-2a)$$

$$-\frac{m}{a^2} k(k-2a) < \left\lfloor -\frac{m}{a^2} k(k-2a) \right\rfloor + 1 \leq -\frac{m}{a^2} k(k-2a) + 1$$

よって

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2a} \left\{ -\frac{m}{a^2} k(k-2a) \right\} \\ &= -\frac{m}{a^2} \sum_{k=1}^{2a} (k^2 - 2ak) \\ &= -\frac{m}{a^2} \left\{ \frac{1}{6} \times 2a \times (2a+1) \times (4a+1) - 2a \times \frac{1}{2} \times 2a \times (2a+1) \right\} \\ &= -\frac{m}{a^2} \times \frac{1}{6} (2a+1) \{ 8a+2 - 12a \} \\ &= -\frac{m}{6a} (2a+1) (-4a+2) \\ &= \frac{m}{3a} (2a+1) (2a-1) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{m}{3a} (2a+1) (2a-1) &< L_m \leq \frac{m}{3a} (2a+1) (2a-1) + 2a+1 \\ \frac{1}{4a^2} (2a+1) (2a-1) &< \frac{L_m}{S_m} \leq \frac{1}{4a^2} (2a+1) (2a-1) + \frac{3(2a+1)}{4am} \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3(2a+1)}{4am} = 0$$

よって、ハサミの原理により

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{S_m} = \frac{(2a+1)(2a-1)}{4a}$$