

$a_1=1, 4a_{n+1}-3a_n-2=0$ のとき

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
 (2) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。

(1)

$$4a_{n+1} - 3a_n - 2 = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2 = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}(a_n - 2)$$

$$a_n - 2 = (a_1 - 2) \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\underline{\underline{a_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\alpha &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)$$

$$= 2n - \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 2n - 4 \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

$$\underline{\underline{= 4\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 4}}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 - \frac{4}{n} \right\}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

$a_1=1, a_2=\frac{7}{3}, 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$ によって定義される数列 $\{a_n\}$
 $(n=1, 2, 3, \dots)$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

$$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$$

$$a_{n+2}-\frac{4}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n=0$$

$$a_{n+2}+(-1-\frac{1}{3})a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n=0$$

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n) & \text{--- ①} \\ a_{n+2}-\frac{1}{3}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\textcircled{2} \quad a_{n+1}-a_n=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ --- ③}$$

② より

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n=(a_2-\frac{1}{3}a_1) \times 1^{n-1}$$

$$\textcircled{3} \quad a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n=2 \text{ --- ④}$$

④ - ③ より

$$\frac{2}{3}a_n=2-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n=3-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3}}}$$

$a_1=3, a_{n+1}=\frac{5a_n-4}{2a_n-1} \ (n=1, 2, 3, \dots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。
 (1) すべての自然数 n に対し、 $a_n > 2$ であることを示せ。
 (2) $b_n = \frac{1}{a_n-2}$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
 (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(1) (証明)

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 = 3 > 2$$

となり、成り立つ。

(ii) $n=k \ (k=1, 2, 3, \dots)$ のとき

成り立つと仮定する。

つまり $a_k > 2$ が成り立つ。

このとき

$$a_{k+1}-2 = \frac{5a_k-4}{2a_k-1} - 2$$

$$= \frac{a_k-2}{2a_k-1} > 0$$

よって $a_{k+1} > 2$

つまり、 $n=k$ のとき成り立てば、

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より

すべての $n \in \mathbb{N}$ で、 $a_n > 2$ は成り立つ。 ■

(2)

$$a_{n+1}-2 = \frac{a_n-2}{2a_n-1}$$

$$a_{n+1}-2 = \frac{a_n-2}{2(a_n-2)+3}$$

両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-2} = 2 + \frac{3}{a_n-2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{よって } b_n = \frac{1}{a_n-2} \text{ とおくと} \\ b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}-2} = 1 \end{array} \right]$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 2$$

$$\rightarrow -1 = 3 \times (-1) + 2$$

$$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

$$b_n + 1 = (b_1 + 1) \times 3^{n-1}$$

$$\underline{\underline{b_n = 2 \times 3^{n-1} - 1}}$$

(3)

(a) より

$$\frac{1}{a_n-2} = 2 \times 3^{n-1} - 1$$

$$a_n = \frac{1}{2 \times 3^{n-1} - 1} + 2$$

よって

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2}}$$

$$a_1=5, b_1=8, a_{n+1}=2a_n-\frac{1}{2}b_n, b_{n+1}=5a_n-\frac{3}{2}b_n$$

($n=1, 2, 3, \dots$) で定められる2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ において,

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とすれば $\alpha + \beta$ の値は である。

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

$$2a_n - \frac{1}{2}b_n + \alpha(5a_n - \frac{3}{2}b_n) = \beta(a_n + \alpha b_n)$$

$$(5\alpha + 2)a_n + (-\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2})b_n = \beta a_n + \alpha\beta b_n$$

$$\begin{cases} 5\alpha + 2 = \beta \\ -\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2} = \alpha\beta \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2} = \alpha(5\alpha + 2)$$

$$-3\alpha - 1 = 10\alpha^2 + 4\alpha$$

$$10\alpha^2 + 7\alpha + 1 = 0$$

$$(2\alpha + 1)(5\alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{5}, 1)$$

与漸化式より

$$\begin{cases} a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{2}b_n) \quad \text{--- ①} \\ a_{n+1} - \frac{1}{5}b_{n+1} = a_n - \frac{1}{5}b_n \quad \text{--- ②} \end{cases}$$

①より

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = (a_1 - \frac{1}{2}b_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{--- ③}$$

②より

$$a_n - \frac{1}{5}b_n = a_1 - \frac{1}{5}b_1$$

$$a_n - \frac{1}{5}b_n = \frac{17}{5} \quad \text{--- ④}$$

④ - ③より

$$\frac{3}{10}b_n = \frac{17}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{34}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

③より

$$a_n - \frac{17}{3} + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{17}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

∴

$$\begin{cases} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{17}{3} \\ \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{34}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{17}{3} + \frac{34}{3} = \frac{51}{3} = \underline{\underline{17}}$$

a と b を $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b < 1$ を満たす定数とする。数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + b) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$c = 1 - \sqrt{1-b}$ とおく。

(1) $0 \leq a_n \leq 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $a_{n+1} - c = \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ が成り立つことを示せ。

(1) (証明)

(i) $n=1$ のとき

$0 \leq a_1 \leq 1$ より 成り立つ。

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき

成り立つと仮定する。

つまり $0 \leq a_k \leq 1$ が成り立つ。

このとき $0 \leq a_k^2 \leq 1$ かつ $0 \leq b < 1$ より

$$0 \leq a_k^2 + b < 2$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(a_k^2 + b) < 1$$

よって $0 \leq a_{k+1} < 1$

つまり、 $n=k$ のとき成り立つとは

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より

すべての $n \in \mathbb{N}$ で $0 \leq a_n \leq 1$ は成り立つ。 ■

(2) (証明)

$$\frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$$

$$= \frac{1}{2}(a_n^2 - c^2)$$

$$= \frac{1}{2}\{a_n^2 - (1 - \sqrt{1-b})^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(a_n^2 - 1 + 2\sqrt{1-b} - 1 + b)$$

$$= \frac{1}{2}(a_n^2 + b) - 1 + \sqrt{1-b}$$

$$= a_{n+1} - c$$

よって

$$a_{n+1} - c = \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$$

は成り立つ。 ■

(3) (証明)

$$c = 1 - \sqrt{1-b} \text{ は } 0 \leq c < 1 \text{ を満たし。}$$

$$0 \leq a_n \leq 1 \text{ より}$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(a_n + c) < 1$$

よって

$$|a_{n+1} - c| = \frac{1}{2}(a_n + c)|a_n - c|$$

$$|a_{n+1} - c| < k|a_n - c|$$

(ただし $0 \leq k < 1$ を満たす。)

$$|a_n - c| < k|a_{n-1} - c|$$

これを繰り返して用いて

$$|a_n - c| < |a_1 - c| \cdot k^{n-1}$$

$$|a_n - c| < |a - c| k^{n-1}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - c| k^{n-1} = 0 \text{ となる}$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - c| = 0$$

つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ が成り立つ。} \blacksquare$$

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2\cos\frac{\pi}{4}, \quad a_n = 2a_{n-1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

(1) 一般項 $b_n = a_n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を求めよ。(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n}$ を求めよ。(1) **解法1**

$$b_n = a_n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= 2a_{n-1} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= a_{n-1} \sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$= a_{n-2} \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

$$= \dots$$

$$= a_1 \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

解法2

$$b_n = a_n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= 2a_{n-1} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= a_{n-1} \sin\frac{\pi}{2^n} = b_{n-1}$$

$$\therefore b_n = b_{n-1} \quad \text{より}$$

$$b_n = b_1$$

$$\left[\begin{aligned} b_1 &= a_1 \sin\frac{\pi}{4} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \sin\frac{\pi}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \right]$$

$$\therefore \underline{\underline{b_n = 1}}$$

(2) (1) より

$$a_n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}} \times \frac{2}{\pi}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{2}{\pi}$$

よって

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{2}{\pi}}}$$

c, p は定数とする。漸化式 $a_1 = c, a_{n+1} = 4a_n + p^n + 9$ ($n \geq 1$) で定義される数列 $\{a_n\}$ に対して、 $b_n = \frac{a_n}{4^{n-1}}$ ($n \geq 1$) とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $b_{n+1} - b_n$ を n, p の式で表せ。
- (2) $c = -2, p = 4$ のとき、 a_n を n の式で表せ。
- (3) $p = 3$ のとき、 a_n を n と c の式で表せ。
- (4) $p = 3$ のとき、数列 $\left\{\frac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$ が収束するように c の値を定めよ。また、そのときの極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^{n-1}}$ を求めよ。

(1)

$$a_{n+1} = 4a_n + p^n + 9$$

より

$$\frac{a_{n+1}}{4^n} = \frac{a_n}{4^{n-1}} + \frac{p^n + 9}{4^n}$$

$$\left(\begin{array}{l} \therefore b_n = \frac{a_n}{4^{n-1}} \quad \text{とおく。} \\ b_1 = a_1 = c \end{array} \right)$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{p^n + 9}{4^n}$$

つまり

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{p}{4}\right)^n + \frac{9}{4^n}$$

(2)

$$c = -2, p = 4 \text{ のとき}$$

$$b_1 = -2, \quad b_{n+1} - b_n = 1 + \frac{9}{4^n}$$

$$b_2 - b_1 = 1 + \frac{9}{4}$$

$$b_3 - b_2 = 1 + \frac{9}{4^2}$$

$$b_4 - b_3 = 1 + \frac{9}{4^3}$$

$$+) \quad b_n - b_{n-1} = 1 + \frac{9}{4^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$b_n - b_1 = (n-1) + \frac{9}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\}$$

(これは $n=1$ でも成り立つ)

$$b_n + 2 = n - 1 + 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\}$$

$$b_n = n - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{4^{n-1}} = n - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n = n \cdot 4^{n-1} - 3$$

(3)

$$p = 3 \text{ のとき}$$

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{9}{4^n}$$

$$b_2 - b_1 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}$$

$$b_3 - b_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4^2}$$

$$b_4 - b_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{9}{4^3}$$

$$+) \quad b_n - b_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{9}{4^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$$b_n - b_1 = \frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right\} + \frac{9}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\}$$

(これは $n=1$ でも成り立つ)

$$b_n - c = 3 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right\} + 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\}$$

$$b_n = c + 6 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{4^{n-1}} = c + 6 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$a_n = (c+6) \cdot 4^{n-1} - 3^n - 3$$

(4)

$$p = 3 \text{ のとき}$$

$$\frac{a_n}{3^{n-1}} = (c+6) \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 3 - \frac{1}{3^{n-2}}$$

数列 $\left\{\frac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$ が収束するためには

$$c+6 = 0$$

$$\text{つまり } c = -6$$

よって

$$\frac{a_n}{3^{n-1}} = -3 - \frac{1}{3^{n-2}}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} = -3$$

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が

$$a_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

解法1

$$n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1) \quad \text{--- ①}$$

$$\rightarrow (n-1)(n-3)a_n = S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$n(n-2)a_{n+1} - (n^2 - 4n + 3)a_n = a_n \quad (n \geq 2)$$

$$n(n-2)a_{n+1} = (n^2 - 4n + 4)a_n$$

$$n(n-2)a_{n+1} = (n-2)^2 a_n$$

$n \geq 3$ $n \neq 2$

$$n a_{n+1} = (n-2) a_n$$

$$(n-1) n a_{n+1} = (n-2)(n-1) a_n$$

よって

$$(n-2)(n-1) a_n = 1 \times 2 \times a_2$$

$$\odot a_n = \frac{2a_2}{(n-2)(n-1)}$$

$$S_n = \sum_{k=3}^n \frac{2a_2}{(k-2)(k-1)} + a_1 + a_2$$

$$= 2a_2 \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) + a_1 + a_2$$

$$= 2a_2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) \right\} + a_1 + a_2$$

$$= 2a_2 \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) + a_1 + a_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \text{① } n=1 \text{ と } 17 \\ 1 \times (-1) \times a_2 = S_1 \\ -a_2 = a_1 \\ a_2 = -a_1 = -1 \end{array} \right)$$

$$S_n = 2a_2 \left(1 - \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \quad \text{よって}$$

$$2a_2 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

よって

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ -1 & (n=2) \\ \frac{1}{(n-2)(n-1)} & (n \geq 3) \end{cases}$$

解法2

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad \text{よって}$$

$$n(n-2)(S_{n+1} - S_n) = S_n$$

$$n(n-2)S_{n+1} = (n-1)^2 S_n$$

$n \geq 3$ $n \neq 2$

$$\frac{n}{n-1} S_{n+1} = \frac{n-1}{n-2} S_n$$

$$\odot \frac{n-1}{n-2} S_n = \frac{2}{1} S_3$$

$$S_n = \frac{2(n-2)}{n-1} S_3$$

$$= \frac{2(1 - \frac{2}{n})}{1 - \frac{1}{n}} S_3$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2S_3 = 1$$

$$\text{よって } S_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } S_n = \frac{n-2}{n-1} \quad (n \geq 3) \quad \text{--- ②}$$

$n \geq 4$ $n \neq 3$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{n-2}{n-1} - \frac{n-3}{n-2}$$

$$= \frac{(n-2)^2 - (n-3)(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{(n^2 - 4n + 4) - (n^2 - 4n + 3)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \quad \text{--- ③}$$

① $n=1$ と 17.

$$1 \times (-1) \times a_2 = S_1$$

$$-a_2 = a_1$$

$$a_2 = -a_1 = -1$$

② $n=3$ と 17.

$$S_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{③ } n=3 \text{ と } 17. \\ a_3 = \frac{1}{2} \quad \text{よって一致する} \end{array} \right)$$

よって

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ -1 & (n=2) \\ \frac{1}{(n-1)(n-2)} & (n \geq 3) \end{cases}$$