

次の極限値を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x})$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{l} -x = t \quad \text{とおく} \\ x \rightarrow -\infty \quad \text{の時} \quad t \rightarrow \infty \end{array} \right) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-2t + \sqrt{4t^2 + 3t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3t}{-2t - \sqrt{4t^2 + 3t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \sqrt{4 + \frac{3}{t}}} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos 2x)}{1 - \cos^2 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 2x} \times (1 + \cos 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right)^2 \times \frac{1}{4} \times (1 + \cos 2x) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{4} \times 2 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(5)

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

であり、十分大なる x に対して

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{よって}$$

ハサミの原理により

$$\underline{\underline{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0}}$$

(6)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{l} \frac{1}{x} = h \quad \text{とおく} \\ x \rightarrow \infty \quad \text{の時} \quad h \rightarrow +0 \end{array} \right) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x &= \lim_{h \rightarrow +0} (1 + 3h)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \left\{ (1 + 3h)^{\frac{1}{3h}} \right\}^3 \\ &= \underline{\underline{e^3}} \end{aligned}$$

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-e^{2x-2}}$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}}{\frac{\sin(x-a)}{x-a}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \\ f(x) = \sin x \quad \text{とおく} \\ f'(x) = \cos x \\ x-a = h \quad \text{とおく} \\ x \rightarrow a \quad \text{とき} \quad h \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{\sin h}{h}}$$

$$= \frac{f'(a)}{1}$$

$$= \underline{\underline{\cos a}}$$

(2) 解法1

$$\left[\begin{array}{l} x-1 = h \quad \text{とおく} \\ x \rightarrow 1 \quad \text{とき} \quad h \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-e^{2x-2}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1-e^{2h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{e^h-1} \times \frac{1}{e^h+1}$$

$$= -1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

解法2

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = e^x \quad \text{とおく} \\ f'(x) = e^x \\ x-1 = h \quad \text{とおく} \\ x \rightarrow 1 \quad \text{とき} \quad h \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-e^{2x-2}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1-e^{2h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1-e^h} \times \frac{1}{1+e^h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(h)-f(0)}{h}} \times \frac{-1}{1+e^h}$$

$$= \frac{1}{f'(0)} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

(1) 極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{x}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin[\log(x+1) - \log x]$ を求めよ。

(1)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = \theta \quad \theta < 0 \\ x \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow +0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{\sin \frac{x}{\pi}} \times \frac{\sin \frac{x}{\pi}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{\sin \frac{x}{\pi}} \times \frac{\sin \frac{x}{\pi}}{\frac{x}{\pi}} \times \frac{1}{\pi} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{\pi} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}} \end{aligned}$$

(3)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \quad t < 0 \\ x \rightarrow \infty \quad t \rightarrow +0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin[\log(x+1) - \log x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(\log(1+t))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(\log(1+t))}{\log(1+t)} \cdot \frac{\log(1+t)}{t} \\ &= 1 \times 1 \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

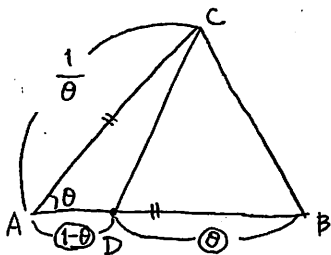
$0 < \theta < 1$ とする。三角形 ABC において、 $AB=AC=\frac{1}{\theta}$, $\angle BAC=\theta$

とする。また、辺 AB を $(1-\theta): \theta$ に内分する点を D とする。

(1) 三角形 BCD の面積を S とする。 $\lim_{\theta \rightarrow +0} S$ を求めよ。

(2) $\lim_{\theta \rightarrow +0} BC$ を求めよ。

(3) $\lim_{\theta \rightarrow +0} CD$ を求めよ。



$$(1) \quad S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \cdot \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2\theta^2}$$

$$S = \frac{\theta}{(1-\theta)+\theta} S(\triangle ABC)$$

$$= \frac{\sin \theta}{2\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} S = \frac{1}{2}$$

(2) **解法1**

$\triangle ABC$ で余弦定理より

$$BC^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{2-2\cos \theta}{\theta^2}$$

$$= \frac{2(1-\cos^2 \theta)}{\theta^2(1+\cos \theta)}$$

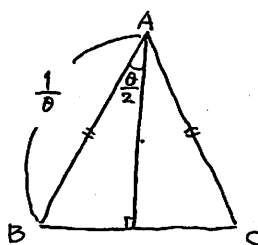
$$= \frac{2\sin^2 \theta}{\theta^2(1+\cos \theta)}$$

$$\therefore BC = \sqrt{\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \times \frac{2}{1+\cos \theta}}$$

$$\xrightarrow{\theta \rightarrow +0} \sqrt{1^2 \times \frac{2}{2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} BC = 1$$

解法2



$$BC = \left(\frac{1}{\theta} \cdot \sin \frac{\theta}{2}\right) \times 2$$

$$= \frac{2}{\theta} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

$$\xrightarrow{\theta \rightarrow +0} 1$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} BC = 1$$

(3) $\triangle ACD$ で余弦定理より

$$CD^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1-\theta}{\theta} \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{1+1-2\theta+\theta^2-2(1-\theta)\cos \theta}{\theta^2}$$

$$= \frac{2(1-\theta)(1-\cos \theta) + \theta^2}{\theta^2}$$

$$= \frac{2(1-\theta)(1-\cos^2 \theta)}{\theta^2(1+\cos \theta)} + 1$$

$$= \frac{2(1-\theta)}{1+\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 + 1$$

$$\therefore CD = \sqrt{\frac{2(1-\theta)}{1+\cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\theta \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2}{2} \cdot 1^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} CD = \sqrt{2}$$

(1) 次の極限が有限の値となるように定数 a, b を定め、そのときの極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2}$$

(2) a, b を実数の定数とする。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x - \sin 5x}{(ax)^b} = 4$ のとき、

$a = \square, b = \square$ である。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} \cdot x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より

$$4-a=0$$

$$a=4$$

このとき

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4+bx)}{x^2} \\ &= \frac{9-8x+7\cos 2x - (16+8bx+b^2x^2)}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx))} \\ &= \frac{-7-8(1+b)x + 7\cos 2x - b^2x^2}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx))} \\ &= \frac{-7(1-\cos 2x) - 8(1+b)x - b^2x^2}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx))} \\ &= \frac{-7 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4 - \frac{8(1+b)}{x} - b^2}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx)} \end{aligned}$$

このとき $x \rightarrow 0$ のとき有限確定値

となるためには

$$1+b=0 \quad \Leftrightarrow b=-1$$

このとき

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot 4 - 1}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4-x} \\ &= \frac{-\frac{7}{2} \cdot 1^2 \cdot 4 - 1}{4+4} \\ &= \frac{-15}{8} \end{aligned}$$

よって

$$a=4, b=-1, \text{ 極限値 } -\frac{15}{8}$$

(2)

$$\tan 5x - \sin 5x$$

$$= \frac{\sin 5x}{\cos 5x} - \sin 5x$$

$$= \frac{\sin 5x}{\cos 5x} (1 - \cos 5x)$$

$$= \frac{\sin^3 5x}{\cos 5x (1 + \cos 5x)} \quad \text{2°あり}$$

$$\frac{\tan 5x - \sin 5x}{(ax)^b} = \frac{\sin^3 5x}{\cos 5x (1 + \cos 5x)} \cdot \frac{1}{(ax)^b}$$

$$= \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^3 \times \frac{125x^3}{\cos 5x (1 + \cos 5x)} \cdot \frac{1}{(ax)^b}$$

$$= \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^3 \times \frac{1}{\cos 5x (1 + \cos 5x)} \times \frac{125}{a^b x^{b-3}}$$

2°あり $x \rightarrow 0$ のとき

$$\frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{\cos 5x (1 + \cos 5x)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

このとき、この式が 4 に収束するためには

$$b-3=0 \quad \text{より} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{a^b} = 4$$

$$\Leftrightarrow b=3 \quad \text{より} \quad a^3 = \frac{125}{8}$$

より

$$a = \frac{5}{2}, b=3$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos^2 x + (3b+2) \sin x - 2a + b + 1}{\sin^3 x + a \cos^2 x - a} = c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ a \cos^2 x + (3b+2) \sin x - 2a + b + 1 \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos^2 x + (3b+2) \sin x - 2a + b + 1}{\sin^3 x + a \cos^2 x - a} \cdot (\sin^3 x + a \cos^2 x - a)$$

$$= C \times 0$$

$$= 0 \quad \text{よ} \quad \text{す} \quad \text{す} \quad \text{す}$$

$$-a + b + 1 = 0$$

$$\text{よ} \quad b = a - 1$$

次に

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos^2 x + (3b+2) \sin x - 2a + b + 1}{\sin^3 x + a \cos^2 x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos^2 x + (3a-1) \sin x - a}{\sin^3 x + a \cos^2 x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1-\sin^2 x) + (3a-1) \sin x - a}{\sin^3 x + a(1-\sin^2 x) - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin^2 x + (3a-1) \sin x}{\sin^3 x - a \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin x + 3a-1}{\sin^2 x - a \sin x}$$

次に

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-a \sin x + 3a-1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin x + 3a-1}{\sin^2 x - a \sin x} \cdot (\sin^2 x - a \sin x)$$

$$= 0 \quad \text{よ} \quad \text{す} \quad \text{す} \quad \text{す}$$

$$3a-1=0$$

$$\text{よ} \quad a = \frac{1}{3} \quad \text{よ} \quad b = -\frac{2}{3}$$

次に

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} \sin x}{\sin^2 x - \frac{1}{3} \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3 \sin x - 1}$$

$$= 1 = c$$

よ

$$\underline{a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3}, c = 1}$$

- (1) a, b を実数とする。 $a < b$, $a = b$, $a > b$ のそれぞれの場合に、極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x^a + x^b)$ を求めよ。
- (2) a, b は $a^2 + b^2 \leq 1$ を満たす実数とする。 $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (2x^a + x^{\frac{a}{2}})$ を最小にする a, b , および、そのときの L の値を求めよ。

(1) 解法1

(i) $a < b$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x^a + x^b) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log (x^a + x^b)}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^b (x^{a-b} + 1)}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b \log x + \log (1 + x^{a-b})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ b + \frac{\log (1 + x^{a-b})}{\log x} \right\} \\ &= b \quad \left(\because a-b < 0 \text{ より } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{a-b} = 0 \right) \end{aligned}$$

(ii) $a = b$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x^a + x^a) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 2x^a}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 2 + a \log x}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log 2}{\log x} + a \right) \\ &= a \end{aligned}$$

(iii) $a > b$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x^a + x^b) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log (x^a + x^b)}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^a (1 + x^{b-a})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \log x + \log (1 + x^{b-a})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ a + \frac{\log (1 + x^{b-a})}{\log x} \right\} \\ &= a \quad \left(\because b-a < 0 \text{ より } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{b-a} = 0 \right) \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x^a + x^b) = \begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a \leq b) \end{cases}$$

(2) 解法1

(i) $a > \frac{b}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log (2x^a + x^{\frac{a}{2}})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^a (2 + x^{-a+\frac{a}{2}})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ a + \frac{\log (2 + x^{-a+\frac{a}{2}})}{\log x} \right\} = a \end{aligned}$$

(ii) $a = \frac{b}{2}$ のとき

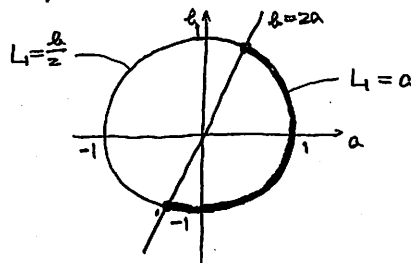
$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 3x^a}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + a \log x}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log 3}{\log x} + a \right) = a \end{aligned}$$

(iii) $a < \frac{b}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log (2x^a + x^{\frac{a}{2}})}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^{\frac{a}{2}} (2x^{a-\frac{a}{2}} + 1)}{\log x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a}{2} + \frac{\log (1 + 2x^{a-\frac{a}{2}})}{\log x} \right\} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

$$\begin{cases} b \leq 2a & \text{のとき} & L = a \\ b \geq 2a & \text{のとき} & L = \frac{b}{2} \end{cases}$$



$$\left(\begin{aligned} & a^2 + b^2 = 1 \text{ より } b = 2a \text{ のとき} \\ & (a^2, b^2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \\ & \therefore (a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned} \right)$$

$b \leq 2a$ のとき

$$\min L = \min a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$b \geq 2a$ のとき

$$\min L = \min \frac{b}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

よって

$$(a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \text{ のとき, } \min L = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(1) 解法2

十分大なる x に対して

(i) $a < \frac{1}{2}$ のとき

$$x^a < x^a + x^a < x^a + x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^a < x^a + x^a < 2x^a$$

$$\log x x^a < \log x (x^a + x^a) < \log x 2x^a$$

$$a < \log x (x^a + x^a) < \log x 2 + a$$

∴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x 2 + a) = a \quad \text{となる}$$

ハサミの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x (x^a + x^a) = a$$

(ii) $a = \frac{1}{2}$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x (x^a + x^a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log x 2x^a$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x 2 + a)$$

$$= a$$

(iii) $a > \frac{1}{2}$ のとき

(i) と同様

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x (x^a + x^a) = a$$

(i) ~ (iii) より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x (x^a + x^a) = \begin{cases} a & (a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ a & (a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) 解法2

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{のとき}$$

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

十分大なる x に対して

(i) $a < \frac{1}{2}$ のとき

$$x^a < x^{\frac{1}{2}} \quad \text{より} \quad 2x^a < 2x^{\frac{1}{2}} \quad \text{となる}$$

$$x^{\frac{1}{2}} < 2x^a + x^{\frac{1}{2}} < 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} < 2x^a + x^{\frac{1}{2}} < 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} < \log x (2x^a + x^{\frac{1}{2}}) < \log x 3 + \frac{1}{2}$$

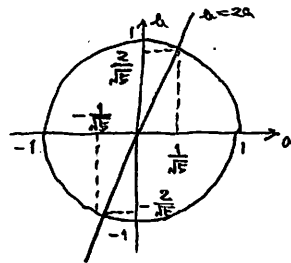
∴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x 3 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{となる}$$

ハサミの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x (2x^a + x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{つまり} \quad L = \frac{1}{2} > -\frac{1}{\sqrt{5}}$$



(ii) $a = \frac{1}{2}$ のとき

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \log x (2x^a + x^a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log x 3x^a$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x 3 + a)$$

$$= a \geq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(iii) $a > \frac{1}{2}$ のとき

(i) と同様

$$L = a > -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(i) ~ (iii) より

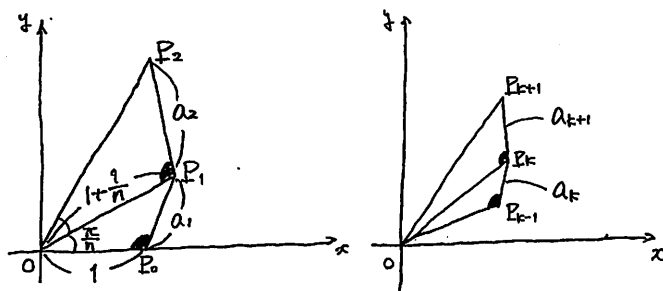
$$(a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ のとき} \quad \min L = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 $O, P_0, P_1, \dots, P_n$ があり、次の 2 つの条件を満たしている。

(A) $\angle P_{k-1}OP_k = \frac{\pi}{n}$ ($1 \leq k \leq n$), $\angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1$ ($2 \leq k \leq n$)

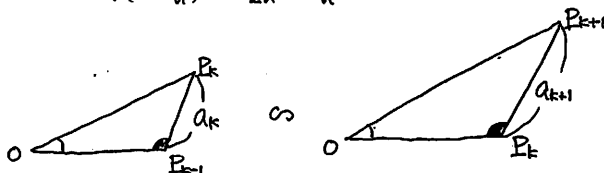
(B) 線分 OP_0 の長さは 1, 線分 OP_1 の長さは $1 + \frac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし、 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ を求めよ。



$\triangle OP_0P_1$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \times 1 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \\ &= 1 + 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \\ &= 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$



$$a_k : a_{k+1} = 1 : \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$a_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_k$$

よって 数列 $\{a_k\}$ は公比 $1 + \frac{1}{n}$ の等比数列 となる。

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{a_1 \{1 - (1 + \frac{1}{n})^n\}}{1 - (1 + \frac{1}{n})} \\ &= -a_1 n \{1 - (1 + \frac{1}{n})^n\} \\ &= n \sqrt{4\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 \pi^2 + 1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \sqrt{1 \times 1^2 \times \pi^2 + 1} \cdot (e - 1) \\ &= (e - 1) \sqrt{\pi^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = (e - 1) \sqrt{\pi^2 + 1}$$