

関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} + ax^n + b}{x^{2n} + 2}$ が $x=1$ で連続となるように、 a, b の値を定めよ。

$x=1$ の近傍において

$x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} + ax^n + b}{x^{2n} + 2} \\ &= \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$x > 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^{2n}}}{1 + \frac{2}{x^{2n}}} \\ &= x^2 \xrightarrow{(x \rightarrow 1)} 1 \end{aligned}$$

$x=1$ のとき

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + b}{1 + 2} \\ &= \frac{1+a+b}{3} \end{aligned}$$

$x=1$ で連続となるためには

$$\frac{b}{2} = 1 = \frac{1+a+b}{3}$$

よって

$$\underline{\underline{a=0, b=2}}$$

方程式 $2^x - 3x - 5 = 0$ は $4 < x < 5$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

(証明)

$$f(x) = 2^x - 3x - 5$$

とおくと、 $f(x)$ は連続であり、

$$\begin{cases} f(4) = 16 - 12 - 5 = -1 < 0 \\ f(5) = 32 - 15 - 5 = 12 > 0 \end{cases}$$

より

$4 < x < 5$ の範囲に $f(x) = 0$ は
少なくとも1つの実数解をもつ。 ■

関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{2n+1} - x^2 + bx + c}{x^{2n} + 1}$ について、次の問いに答えよ。

ただし、 a, b, c は定数で、 $a > 0$ とする。

- (1) 関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a, b, c の条件を求めよ。
- (2) 定数 a, b, c が (1) で求めた条件を満たすとき、関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を a を用いて表せ。
- (3) 定数 a, b, c が (1) で求めた条件を満たし、関数 $f(x)$ の最大値が $\frac{5}{4}$ であるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

(1)

(i) $|x| > 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x} - \frac{1}{x^{2n+2}} + \frac{b}{x^{2n+1}} + \frac{c}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}}$$

$$= \frac{a}{x}$$

(ii) $|x| < 1$ のとき

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

(iii) $x = 1$ のとき

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1 + b + c}{1 + 1}$$

$$= \frac{a + b + c - 1}{2}$$

(iv) $x = -1$ のとき

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a - 1 - b + c}{1 + 1}$$

$$= \frac{-a - b + c - 1}{2}$$

$x = 1, -1$ で連続となるべく。

$$\begin{cases} x=1 \text{ で連続となるためには} \\ a = -1 + b + c = \frac{a + b + c - 1}{2} \\ x=-1 \text{ で連続となるためには} \\ -a = -1 - b + c = \frac{-a - b + c - 1}{2} \end{cases}$$

これをすべて満たすには

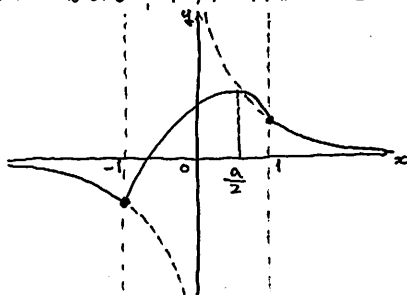
$$\underline{a = b \text{ かつ } c = 1}$$

(2)

(i) のとき

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & (|x| > 1 \text{ のとき}) \\ -x^2 + ax + 1 & (|x| < 1 \text{ のとき}) \\ a & (x = 1 \text{ のとき}) \\ -a & (x = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a > 0$ なので、 $f(x)$ の概形は下図の通り



(i) $0 < \frac{a}{2} \leq 1$ のとき (i.e. $0 < a \leq 2$ のとき)

$$\text{Max} = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + 1$$

(ii) $\frac{a}{2} \geq 1$ のとき (i.e. $a \geq 2$ のとき)

$$\text{Max} = f(1) = a$$

(i), (ii) より

$$\begin{cases} 0 < a \leq 2 & \text{のとき} & \text{Max} = \frac{a^2}{4} + 1 & (x = \frac{a}{2}) \\ a \geq 2 & \text{のとき} & \text{Max} = a & (x = 1) \end{cases}$$

(3)

(i) $0 < a \leq 2$ のとき

$$\text{Max} = \frac{5}{4} \text{ より}$$

$$\frac{a^2}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$a^2 = 1$$

$$0 < a \leq 2 \text{ より } a = 1$$

$$\text{このとき } b = 1, c = 1$$

(ii) $a \geq 2$ のとき

$$\text{Max} = \frac{5}{4} \text{ より}$$

$$a = \frac{5}{4}$$

これは $a \geq 2$ に不合理

(i), (ii) より

$$\underline{(a, b, c) = (1, 1, 1)}$$

n は自然数, a, b を $|a|+|b| \leq 1$ を満たす実数とし, $f(x) = ax^{2n} + b$ とおく。方程式 $f(x) = x$ の解で, $-1 \leq x \leq 1$ の範囲にあるものが存在することを示せ。

(証明)

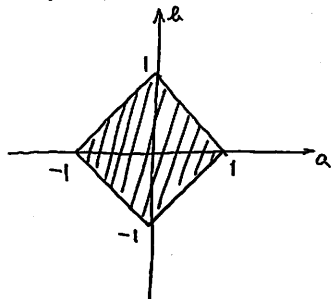
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x \\ &= ax^{2n} + b - x \\ &= ax^{2n} - x + b \end{aligned}$$

とかく,

$$\begin{cases} g(-1) = a + 1 + b = a + b + 1 \\ g(1) = a - 1 + b = a + b - 1 \end{cases}$$

そこで

$|a|+|b| \leq 1$ を満たす (a, b) の存在領域 D は
下図の通り, ただし, 境界を含む。



$$a + b = k \quad \text{とおくと}$$

$$b = -a + k \quad (\text{傾き } -1, \text{ 切片 } k \text{ の直線})$$

これが 領域 D と 共有点をもつように動くので

$$-1 \leq k \leq 1$$

つまり

$$-1 \leq a + b \leq 1$$

よって

$$\begin{cases} 0 \leq a + b + 1 \leq 2 \\ -2 \leq a + b - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq g(-1) \leq 2 \\ -2 \leq g(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$g(-1) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad g(1) \leq 0$$

を満たす a で

$$g(x) = 0 \quad \text{は} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{の範囲に少なくとも}$$

1つは解をもつ。

よって

$$f(x) = x \quad \text{は} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{の範囲に少なくとも}$$

1つは解をもつ。 ■

a を実数とする。関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = 1 - x + x^2 + a[x] - 2x[x] + [x]^2$$

ただし、実数 x に対し、記号 $[x]$ は $n \leq x < n+1$ を満たす整数 n を表す。

たとえば $[0]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\frac{5}{2}]=2$ である。

- (1) $0 \leq x < 1$ の範囲において、 $f(x)$ を x の整式で表せ。
- (2) $1 \leq x < 2$ の範囲において、 $f(x)$ を a を用いた x の整式で表せ。
- (3) $f(x)$ が $x=1$ で連続であるように、 a の値を定めよ。
- (4) $f(x+1) - f(x)$ を a を用いて表せ。ただし、 $[x+1] = [x] + 1$ であることは証明せずに用いてよい。
- (5) a を (3) で定めた値とする。 n を正の整数とすると、 $\int_0^n f(x) dx$ を n を用いて表せ。

(1)

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } [x] = 0$$

$$\text{よって } f(x) = 1 - x + x^2$$

(2)

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき } [x] = 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(x) &= 1 - x + x^2 + a - 2x + 1 \\ &= a + 2 - 3x + x^2 \end{aligned}$$

(3)

$f(x)$ が $x=1$ で連続となるためには

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) \quad \text{よって}$$

$$1 = a$$

$$\text{よって } a = 1$$

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x + x^2 + a[x] - 2x[x] + [x]^2 \\ f(x+1) &= 1 - (x+1) + (x+1)^2 + a[x+1] - 2(x+1)[x+1] + [x+1]^2 \\ &= 1 - x - 1 + x^2 + 2x + 1 + a([x] + 1) - 2(x+1)([x] + 1) + ([x] + 1)^2 \\ &= x^2 + x + 1 + a[x] + a + (-2x - 2)[x] - 2x - 2 + [x]^2 + 2[x] + 1 \\ &= x^2 - x + a + [x]^2 + (-2x + a)[x] \end{aligned}$$

よって

$$f(x+1) - f(x) = a - 1$$

(5)

(3), (4) より

$$f(x+1) - f(x) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad f(x+1) = f(x)$$

よって $f(x)$ は 周期 1 の周期関数である。

よって

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= n \int_0^1 f(x) dx \\ &= n \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx \\ &= n \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{5}{6}n \end{aligned}$$

- (1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ を求めよ。
 (2) 上で定めた関数 $f(x)$ がすべての x について連続であるように、 a, b の値を定めよ。

(1)

(i) $|x| > 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-1}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} \\ = 1 - \frac{1}{x}$$

(ii) $|x| < 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} \\ = ax^2 + bx$$

(iii) $x = 1$ のとき

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1 + a + b}{1 + 1} \\ = \frac{a + b}{2}$$

(iv) $x = -1$ のとき

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1 + a - b}{1 + 1} \\ = \frac{a - b + 2}{2}$$

(i) ~ (iv) より

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & (|x| > 1 \text{ のとき}) \\ ax^2 + bx & (|x| < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{a+b}{2} & (x = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{a-b+2}{2} & (x = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$x = 1, -1$ で連続になるとよい。

$$\begin{cases} x = 1 \text{ のとき連続になるときは} \\ 0 = a + b = \frac{a+b}{2} \\ x = -1 \text{ のとき連続になるときは} \\ 2 = a - b = \frac{a-b+2}{2} \end{cases}$$

これを満たすのは

$$\underline{a = 1, b = -1}$$

k を自然数とする。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(\cos x)^{n-1} - (\cos x)^{n+k-1}]$ がすべての実数 x

に対して収束するとき、次の問いに答えよ。

(1) k の条件を求めよ。

(2) 上の級数の和を $f(x)$ とおくと、関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続でないことを示せ。

(1)

$$\begin{aligned} \text{部分和 } S_n &= \sum_{\ell=1}^n \{ (\cos x)^{\ell-1} - (\cos x)^{\ell+k-1} \} \\ &= \sum_{\ell=1}^n (\cos x)^{\ell-1} \{ 1 - (\cos x)^k \} \end{aligned}$$

$0 \leq x < 2\pi$ で考えてよ。

(i) $x=0$ のとき、 $\cos 0 = 1$ であり、

$$S_n = 0 \quad \text{となり、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

(ii) $x=\pi$ のとき $\cos \pi = -1$ であり、

$$S_n = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} \{ 1 - (-1)^k \}$$

これが収束するためには

k が偶数 となるよ。

(iii) $x \neq 0, \pi$ のとき $-1 < \cos x < 1$ であり、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\{ 1 - (\cos x)^k \} \{ 1 - (\cos x)^n \}}{1 - \cos x} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1 - (\cos x)^k}{1 - \cos x} \quad (\text{収束}) \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

k が偶数

(2) (証明)

$x=0$ の近傍で

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \frac{1 - (\cos x)^k}{1 - \cos x} & (x \neq 0) \end{cases}$$

$x \neq 0$ で

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - (\cos x)^k}{1 - \cos x} \\ &= 1 + \cos x + \cos^2 x + \cdots + (\cos x)^{k-1} \\ &\xrightarrow{(x \rightarrow 0)} 1 + 1 + \cdots + 1 = k \neq 0 \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

となり、

$f(x)$ は $x=0$ で連続でない。

実数全体で定義された関数 $f(x)$ は連続で、次の条件 (A), (B) を満たすとする。

(A) すべての x に対し、 $f(x+2)=f(x)$ である。

(B) $f(0)=0, f'(x)=\begin{cases} 2x & (0 < x < 1) \\ a & (1 < x < 2) \end{cases}$ ただし、 a は定数とする。

(1) a の値を求め、 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 不等式 $0 \leq y \leq f(x), x \geq 0, y \geq x-k$ が表す部分の面積を $S(k)$ とおく。 k が自然数のときの $S(k)$ を求めよ。

(3) $S(k)=4$ となる k の値を求めよ。

(1)

(i) $0 < x < 1$ a とし

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int 2x dx \\ &= x^2 + C_1 \end{aligned}$$

$x=0$ で連続なため

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= f(0) \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } f(x) = x^2$$

(ii) $1 < x < 2$ a とし

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int a dx \\ &= ax + C_2 \end{aligned}$$

$x=2$ で連続なため

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2) = f(0)$$

$$2a + C_2 = 0 \quad \text{--- ①}$$

また、 $x=1$ で連続なため

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$$

$$1 = a + C_2 \quad \text{--- ②}$$

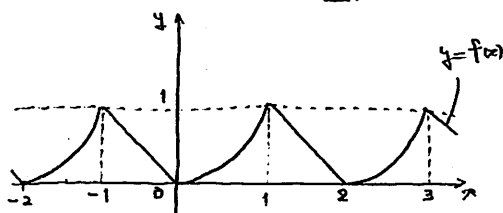
①, ② より

$$a = -1, C_2 = 2$$

iii, (ii) より

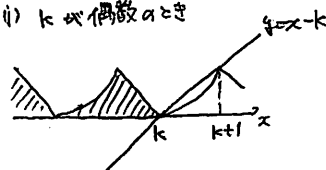
$$a = -1, f(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ -x+2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$y=f(x)$ のグラフは下図の通り。



(2)

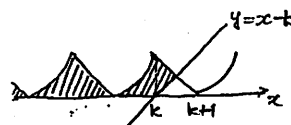
(i) k が偶数のとき



$f(x)$ は周期 2 の周期関数なので

$$\begin{aligned} S(k) &= \left(\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times \frac{k}{2} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{k}{2} \\ &= \frac{5k}{12} \end{aligned}$$

(ii) k が奇数のとき



$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{5}{6} \times \frac{k-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5k-5}{12} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{5k+2}{12} \end{aligned}$$

(i), (ii) より

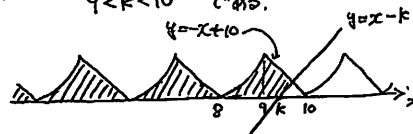
$$S(k) = \begin{cases} \frac{5k}{12} & (k \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{5k+2}{12} & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(3)

①より

$$S(9) = \frac{47}{12} < 4, S(10) = \frac{50}{12} > 4$$

なので $9 < k < 10$ とある。



$y=-x+10$ と $y=x-k$ の交点は

$$-x+10 = x-k$$

$$2x = k+10$$

$$x = \frac{k+10}{2}$$

$$\therefore \text{したがって } y = \frac{k+10}{2} - k = \frac{10-k}{2}$$

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{5}{6} \times 5 - \frac{1}{2} \times (10-k) \times \frac{10-k}{2} \\ &= \frac{25}{6} - \frac{(10-k)^2}{4} = 4 \end{aligned}$$

$$\frac{(10-k)^2}{4} = \frac{1}{6}$$

$$(k-10)^2 = \frac{2}{3}$$

$$k = 10 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$9 < k < 10$ より

$$k = 10 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$