

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=2, \quad a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_5 を求めよ。
 (2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。
 (3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し、その和を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad a_2 &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{a_1}} & a_3 &= 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})} \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} & &= 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})} \\ &= 1 + 2 & &= 1 + 6 \\ &= 3 & &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3})} & a_5 &= 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4})} \\ &= 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7})} & &= 1 + \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43})} \\ &= 1 + 42 & &= 1 + 1807 \\ &= 43 & &= \underline{\underline{1807}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \quad \text{とおく}$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - S_n}$$

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{1 - S_n}$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1 - S_n$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$\text{よって} \quad S_{n-1} = 1 - \frac{1}{a_n - 1}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)}$$

よって

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$$

つまり

$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1}}$$

(3) (証明)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n^2 - 2a_n + 1 \\ &= (a_n - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

より 数列 $\{a_n\}$ は増加数列である。

よって $a_n > n$ ($n \geq 2$) であることを示す。

(i) $n=2$ のとき

(1) より $a_2 > 2$ は成り立つ。

(ii) $n=k$ ($k=2, 3, 4, \dots$) のとき
成り立つと仮定する。

つまり $a_k > k$ が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k(a_k - 1) + 1 \\ &> k(k-1) + 1 \\ &= k^2 - k + 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} \text{よって} \\ (k^2 - k + 1) - (k+1) \\ &= k^2 - 2k \\ &= k(k-2) \geq 0 \end{aligned} \right]$$

$$a_{k+1} > k^2 - k + 1 \geq k+1$$

$$\text{よって} \quad a_{k+1} > k+1$$

よって $n=k$ のとき成り立つは

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より

すべての n ($n \geq 2$) に対し $a_n > n$ は成り立つ。

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

(2) で

$$S_n = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

つまり

$$\underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = 1}} \quad (\text{収束})$$

正の整数 n, p, q について、等式 $(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} = a_n \sqrt{p} + b_n \sqrt{q}$ を考える。

- (1) ある正の整数 a_n, b_n が上の等式を満たすことを示せ。
- (2) $\sqrt{pq}$ が整数でないとき、(1) の a_n, b_n はただ1通りに定まることを示せ。
- (3) $\sqrt{pq}$ が整数でないとき、(1) の a_n, b_n に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

(1) (証明)

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 = 1, b_1 = 1$$

よると、与等式は成り立つ。

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき

与等式を満たすと仮定する。

つまり a_k, b_k は与等式を満たす正の整数である。

このとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} \sqrt{p} + b_{k+1} \sqrt{q} &= (\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2k+1} \\ &= (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 (\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2k-1} \\ &= (p+q+2\sqrt{pq}) (a_k \sqrt{p} + b_k \sqrt{q}) \\ &= \{ (p+q)a_k + 2q b_k \} \sqrt{p} + \{ 2p a_k + (p+q)b_k \} \sqrt{q} \end{aligned}$$

よって、

p, q, a_k, b_k は正の整数だから

$$\begin{cases} a_{k+1} = (p+q)a_k + 2q b_k \\ b_{k+1} = 2p a_k + (p+q)b_k \end{cases}$$

よると、これらも正の整数であり、

与等式を満たす。

よって $n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より

すべての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。

(2) (証明)

2通りに表せると仮定する。

つまり

$$a_n \sqrt{p} + b_n \sqrt{q} = a'_n \sqrt{p} + b'_n \sqrt{q}$$

なる a_n, a'_n, b_n, b'_n が存在する。

$$(a_n - a'_n) \sqrt{p} = (b'_n - b_n) \sqrt{q}$$

$$(a_n - a'_n) \sqrt{pq} = (b'_n - b_n) q$$

$a_n \neq a'_n$ より

$$\sqrt{pq} = \frac{b'_n - b_n}{a_n - a'_n} \times q$$

よって

$$a_n, a'_n, b_n, b'_n, q \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$\frac{b'_n - b_n}{a_n - a'_n} \times q \in \mathbb{Q}$$

一方、 $\sqrt{pq}$ は整数でないため無理数。

これは (無理数) $\neq$ (有理数) に矛盾する。

よって (1) の a_n, b_n はただ1通りに定まる。

(3) (i), (ii) より

$$\begin{cases} a_{n+1} = (p+q)a_n + 2q b_n \\ b_{n+1} = 2p a_n + (p+q)b_n \end{cases}$$

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta (a_n + \alpha b_n)$$

$$(p+q)a_n + 2q b_n + 2p\alpha a_n + (p+q)\alpha b_n = \beta a_n + \alpha\beta b_n$$

$$(p+q+2p\alpha)a_n + (2q + p\alpha + q\alpha)b_n = \beta a_n + \alpha\beta b_n$$

$$\begin{cases} p+q+2p\alpha = \beta & \text{--- ①} \\ 2q + p\alpha + q\alpha = \alpha\beta & \text{--- ②} \end{cases}$$

①, ② より

$$2q + p\alpha + q\alpha = p\alpha + q\alpha + 2p\alpha^2$$

$$\alpha^2 = \frac{q}{p} \quad \text{③} \quad \alpha = \pm \sqrt{\frac{q}{p}}$$

よって

$$(\alpha, \beta) = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}, p+q+2\sqrt{pq} \right), \left(-\sqrt{\frac{q}{p}}, p+q-2\sqrt{pq} \right)$$

$$a_n + \alpha b_n = (a_1 + \alpha b_1) \beta^{n-1}$$

$$a_n + \alpha b_n = (1 + \alpha) \beta^{n-1} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} a_n + \sqrt{\frac{q}{p}} b_n = (1 + \sqrt{\frac{q}{p}}) (\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2(n-1)} \\ a_n - \sqrt{\frac{q}{p}} b_n = (1 - \sqrt{\frac{q}{p}}) (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2(n-1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n + \sqrt{\frac{q}{p}} b_n = \frac{1}{\sqrt{p}} (\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} & \text{--- ④} \\ a_n - \sqrt{\frac{q}{p}} b_n = \frac{1}{\sqrt{p}} (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n-1} & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

(④+⑤) $\div 2$ より

$$a_n = \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n-1}}{2\sqrt{p}}$$

(④-⑤) $\div 2\sqrt{\frac{q}{p}}$ より

$$b_n = \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} - (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n-1}}{2\sqrt{q}}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n-1}}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n-1} - (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n-1}} \times \sqrt{\frac{q}{p}} \\ &= \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \right)^{2n-1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \right)^{2n-1}} \times \sqrt{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \sqrt{\frac{q}{p}} \quad \left(\text{⑥} \quad \left| \frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \right| < 1 \text{ より} \right)$$

つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

N を 3 以上の自然数とする。1 から N までの数字が書かれた N 枚のカードを用意し、A と B の 2 人で次のようなゲームを行う。まず A は、1 から N までの数のうちから 1 つ選びそれを K とし、その数は B に知らせずにおく。その後、次の試行を何度も繰り返す。

B は N 枚のカードから無作為に 1 枚引いて A にその数を伝え、A は引かれた数字が K より大きければ「上」、 K 以下であれば「以下」と B に答え、B はその答から K の範囲を絞り込む。引いたカードは元へ戻す。

このとき、 n 回以下の試行で B が K を確定できる確率を $P_N(n)$ で表す。

- (1) $K=1$ のとき、 $P_3(1)$, $P_3(2)$, $P_3(3)$ を求めよ。
- (2) $K=2$ のとき、 $P_3(1)$, $P_3(2)$, $P_3(3)$ を求めよ。
- (3) $K=1, 2, \dots, N$ について $P_N(n)$ を求めよ。
- (4) 自然数 c に対して、極限値 $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(cN)$ を求めよ。

(1)

 $K=1, N=3$ のとき

1回で確定できるためには

B が 2 を取り出すとよい。

$$\text{よて } P_3(1) = \frac{1}{3}$$

2回で確定できるためには

B が 少なくとも 1 回は 2 を取り出すとよい。

$$\text{よて } P_3(2) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

3回で確定できるためには

B が 少なくとも 1 回は 2 を取り出すとよい。

$$\text{よて } P_3(3) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

(2)

 $K=2, N=3$ のとき

1回で確定することはできない。

$$\text{よて } P_3(1) = 0$$

2回で確定できるためには

B が 2 と 3 を取り出すとよい。

$$\text{よて } P_3(2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

3回で確定できるためには

B が 2 と 3 を 少なくとも 1 回ずつ取り出すとよい。

余事象「B が 2 を取り出さない、または 3 を取り出さない」

なので

$$\begin{aligned} P_3(3) &= 1 - \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right\} \\ &= 1 - \left(\frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{1}{27} \right) \\ &= 1 - \frac{15}{27} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

(3)

① $K=l$ ($2 \leq l \leq N-1$) のときB が $l, l+1$ を 少なくとも 1 回ずつ取り出すとよい。

余事象「B が l を取り出さない、または $l+1$ を取り出さない」

なので

$$\begin{aligned} P_N(n) &= 1 - \left\{ \left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \right\} \\ &= 1 - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \end{aligned}$$

(ii) $K=1$ のとき

B が 2 を 少なくとも 1 回取り出すとよい。

$$\text{よて } P_N(n) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

(iii) $K=N$ のときB が N を 少なくとも 1 回取り出すとよい。

$$\text{よて } P_N(n) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

(i) ~ (iii) より

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n & (K=2, 3, \dots, N-1 \text{ のとき}) \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n & (K=1, N \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4)

① $K=1, N$ のとき

$$\begin{aligned} P_N(cN) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{cN} \\ &= 1 - \left\{ \left(1 + \frac{1}{-N}\right)^{-N} \right\}^{-c} \\ &\xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 1 - e^{-c} \end{aligned}$$

(ii) $K=2, 3, 4, \dots, N-1$ のとき

$$\begin{aligned} P_N(cN) &= 1 - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{cN} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{cN} \\ &= 1 - 2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{-N}\right)^{-N} \right\}^{-c} + \left\{ \left(1 + \frac{2}{-N}\right)^{-N} \right\}^{-c} \\ &\xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 1 - 2e^{-c} + e^{-2c} \\ &= (1 - e^{-c})^2 \end{aligned}$$

(i), (ii) より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(cN) = \begin{cases} 1 - e^{-c} & (K=1, N \text{ のとき}) \\ (1 - e^{-c})^2 & (K=2, 3, 4, \dots, N-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z \leq n, -x+y-z \leq n, x-y-z \leq n, -x-y+z \leq n$$

を満たす xyz 空間の点 $P(x, y, z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。

$z=k$ で固定すると

$$\begin{cases} x+y \leq n-k \\ -x+y \leq n+k \\ x-y \leq n+k \\ -x-y \leq n-k \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \leq n-k \\ x-y \geq -n-k \\ x-y \leq n+k \\ x+y \geq -n+k \end{cases}$$

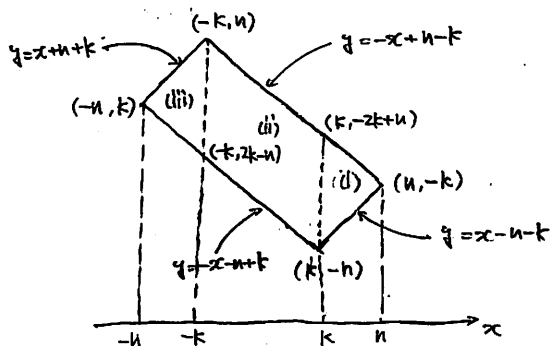
よ)

$$\begin{cases} -(n-k) \leq x+y \leq n-k \\ -(n+k) \leq x-y \leq n+k \end{cases}$$

これを満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在するためには
 $n-k \geq 0$ かつ $n+k \geq 0$

つまり $-n \leq k \leq n$ が必要

よって



(i) $x = l$ ($l = k, k+1, k+2, \dots, n$) のとき

格子点 は

$$y = l - n - k, l - n - k + 1, \dots, -l + n - k$$

$$\begin{aligned} & \text{の } (-l + n - k) - (l - n - k - 1) \\ &= -2l + 2n + 1 \text{ (個) 存在し.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=k}^n (-2l + 2n + 1) \\ &= \frac{(-2k + 2n + 1 + 1)(n - k + 1)}{2} \end{aligned}$$

$$= (-k + n + 1)(n - k + 1)$$

$$= (-k + n + 1)^2$$

(ii) $x = l$ ($l = -k+1, -k+2, \dots, k-1$) のとき

格子点 は

$$y = -l - n + k, -l - n + k + 1, \dots, -l + n - k$$

$$\begin{aligned} & \text{の } (-l + n - k) - (-l - n + k - 1) \\ &= 2n - 2k + 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{l=-k+1}^{k-1} (2n - 2k + 1)$$

$$= (-2k + 2n + 1)(2k - 1)$$

よ、

$z=k$ における格子点の個数 $g(k)$ は

$$\begin{aligned} g(k) &= 2 \{ (-k + n + 1)^2 + \{ 2n - (2k - 1) \} (2k - 1) \} \\ &= 2 \{ k^2 + (-2n - 2)k + (n + 1)^2 \} + 2n(2k - 1) - (2k - 1)^2 \\ &= 2k^2 + (-4n - 4)k + 2n^2 + 4n + 2 + 4nk - 2n - 4k^2 + 4k - 1 \\ &= -2k^2 + 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

よ、

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=-n}^n g(k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (2k^2) + \sum_{k=-n}^n (2n^2 + 2n + 1) \\ &= -\frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) + (2n^2 + 2n + 1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3} (2n+1) \{ -2n^2 - 2n + 6n^2 + 6n + 3 \} \\ &= \frac{1}{3} (2n+1) (4n^2 + 4n + 3) \end{aligned}$$

$$\frac{f(n)}{n^3} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{3} \times 2 \times 4 = \frac{8}{3}$$

よ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = \frac{8}{3}$$

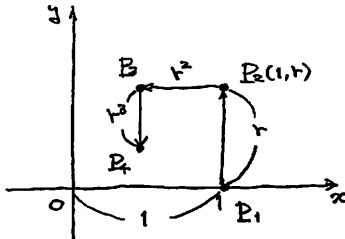
$0 < r < 1$ を満たす実数 r について、座標平面上に、2 点 $P_1(1, 0)$ と $P_2(1, r)$ がある。これから点 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ ($n=2, 3, 4, \dots$) を次の規則に従って定める。

点 P_{n-1} から点 P_n に向かう方向を時計の針の回転と逆の向きに 90° 回転し、その方向に点 P_n から距離 r^n だけ進んだ点を P_{n+1} とする。

(1) 点 P_4, P_5 の座標を、 r を用いて表せ。

(2) $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ とするとき、点 $P(x, y)$ の座標を、 r を用いて表せ。

(3) 実数 r が $0 < r < 1$ の範囲を動くとき、(2) の点 P の軌跡を座標平面上に図示せよ。



(1)

P_n を表す複素数 w_n とおくと、

$$w_{n+2} - w_{n+1} = (w_{n+1} - w_n) \times r\lambda$$

より、

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (w_2 - w_1) \cdot (r\lambda)^{n-1} \\ &= \{ (1+r\lambda) - 1 \} (r\lambda)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad w_{n+1} - w_n = (r\lambda)^n$$

$$w_2 - w_1 = r\lambda$$

$$w_3 - w_2 = (r\lambda)^2$$

$$w_4 - w_3 = (r\lambda)^3$$

$$+) \quad w_n - w_{n-1} = (r\lambda)^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$w_n - w_1 = \frac{r\lambda \{ 1 - (r\lambda)^{n-1} \}}{1 - r\lambda}$$

(=これは $n=1$ でも成り立つ)

$$w_n - 1 = \frac{r\lambda \{ 1 - (r\lambda)^{n-1} \}}{1 - r\lambda}$$

$$\textcircled{2} \quad w_n = 1 + \frac{r\lambda \{ 1 - (r\lambda)^{n-1} \}}{1 - r\lambda}$$

より

$$w_4 = 1 + r\lambda \cdot \frac{1 - (r\lambda)^3}{1 - r\lambda}$$

$$= 1 + r\lambda \{ 1 + r\lambda + (r\lambda)^2 + (r\lambda)^3 \}$$

$$= 1 + r\lambda (1 + r\lambda + r^2\lambda^2)$$

$$= 1 + r\lambda - r^2\lambda^2 - r^3\lambda^3$$

$$= (1 - r^2) + (r - r^3)\lambda$$

$$\text{つまり} \quad P_4(1 - r^2, r - r^3)$$

$$w_5 = 1 + r\lambda \cdot \frac{1 - (r\lambda)^4}{1 - r\lambda}$$

$$= 1 + r\lambda \{ 1 + r\lambda + (r\lambda)^2 + (r\lambda)^3 + (r\lambda)^4 + (r\lambda)^5 + (r\lambda)^6 \}$$

$$= 1 + r\lambda - r^2\lambda^2 - r^3\lambda^3 + r^4\lambda^4 + r^5\lambda^5 - r^6\lambda^6$$

$$= (1 - r^2 + r^4 - r^6) + (r - r^3 + r^5 - r^7)\lambda$$

$$\text{つまり} \quad P_5(1 - r^2 + r^4 - r^6, r - r^3 + r^5 - r^7)$$

(2)

$$w_n = 1 + \frac{r\lambda \{ 1 - (r\lambda)^{n-1} \}}{1 - r\lambda}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1 + \frac{r\lambda}{1 - r\lambda}$$

$$= 1 + \frac{r\lambda - r^2}{1 + r^2}$$

$$= \frac{1}{1 + r^2} + \frac{r}{1 + r^2}\lambda$$

$$\text{よって} \quad P\left(\frac{1}{1 + r^2}, \frac{r}{1 + r^2}\right)$$

(3)

$$X = \frac{1}{1 + r^2}, Y = \frac{r}{1 + r^2}$$

よって

$$\frac{Y}{X} = r$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 < r < 1 \quad \text{より} \\ 0 < \frac{Y}{X} < 1 \\ X > 0 \quad \text{より} \\ 0 < Y < X \end{array} \right)$$

よって

$$X = \frac{1}{1 + \frac{Y^2}{X^2}}$$

$$X = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$$

$X \neq 0$ より

$$X^2 + Y^2 = X \quad \text{--- ①}$$

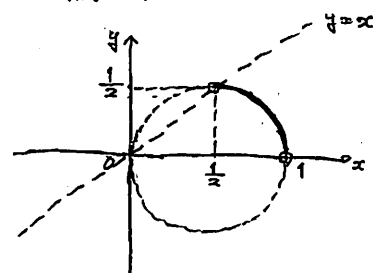
$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \text{で } Y = X \quad \text{とすると} \\ 2X^2 = X \\ X(2X - 1) = 0 \\ X = 0, \frac{1}{2} \\ \text{よって 交点 } (0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right)$$

$P(x, y)$ は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{かつ } 0 < y < x \quad \text{を満たす}$$

よって 点 P の軌跡は 下図の通り。



α は $0 < |\alpha| < 1$ を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列

$z_1, z_2, z_3, \dots$ を, $z_1=0, z_2=1$ および

$$\begin{cases} z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1}) & (n=1, 2, 3, \dots) \\ z_{2n+2} - z_{2n+1} = \overline{\alpha}(z_{2n+1} - z_{2n}) & (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める。ただし、虚数とは虚部が0でない複素数のことであり、また、 $\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-2}) \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

(2) 偶数番目の点の列 $z_2, z_4, z_6, \dots$ および奇数番目の点の列

$z_1, z_3, z_5, \dots$ は、それぞれ同一直線上にあることを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0$ を満たす複素数 w を求めよ。

(1) (証明)

$$z_{2n+2} - z_{2n+1} = \overline{\alpha}(z_{2n+1} - z_{2n})$$

$$= \overline{\alpha} \cdot \alpha(z_{2n} - z_{2n-1})$$

$$= |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-1}) \quad \text{--- ①}$$

$$z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1})$$

$$= \alpha \cdot \overline{\alpha}(z_{2n-1} - z_{2n-2})$$

$$= |\alpha|^2(z_{2n-1} - z_{2n-2}) \quad \text{--- ②}$$

$$\textcircled{1} \quad z_{2n+2} - z_{2n+1} = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-1})$$

$$\textcircled{2} \quad z_{2n+1} - z_{2n} = |\alpha|^2(z_{2n-1} - z_{2n-2}) \quad (+)$$

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-2}) \quad \text{--- ③}$$

(2) (証明)

与漸化式 $n=1$ と 2

$$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1)$$

$$z_3 - 1 = \alpha(1 - 0)$$

$$z_3 = 1 + \alpha$$

$$z_4 - z_3 = \overline{\alpha}(z_3 - z_2)$$

$$z_4 - (1 + \alpha) = \overline{\alpha}(1 + \alpha - 1)$$

$$z_4 = 1 + \alpha + |\alpha|^2$$

$$z_{2n} - z_{2n-2} \neq 0 \quad (n \geq 2) \quad \text{よ}$$

⑤ よ

$$\frac{z_{2n+2} - z_{2n}}{z_{2n} - z_{2n-2}} = |\alpha|^2 \in \mathbb{R}$$

よ、3点 $z_{2n+2}, z_{2n}, z_{2n-2}$

は一直線上にある。

また、(1) と同様

$$z_{2n+3} - z_{2n+1} = |\alpha|^2(z_{2n+1} - z_{2n-1}) \quad \text{--- ④}$$

$$z_{2n+1} - z_{2n-1} \neq 0 \quad (n \geq 1) \quad \text{よ}$$

$$\frac{z_{2n+3} - z_{2n+1}}{z_{2n+1} - z_{2n-1}} = |\alpha|^2$$

よ、3点 $z_{2n+3}, z_{2n+1}, z_{2n-1}$

は一直線上にある。

(3)

③ よ

$$z_{2n+2} - z_{2n} = (z_4 - z_2)(|\alpha|^2)^{n-1}$$

$$z_{2n+2} - z_{2n} = (\alpha + |\alpha|^2) |\alpha|^{2n-2}$$

$$z_4 - z_2 = \alpha + |\alpha|^2$$

$$z_6 - z_4 = (\alpha + |\alpha|^2) |\alpha|^2$$

$$z_8 - z_6 = (\alpha + |\alpha|^2) |\alpha|^4$$

$$+ \quad z_{2n} - z_{2n-2} = (\alpha + |\alpha|^2) |\alpha|^{2n-4} \quad (n \geq 2)$$

$$z_{2n} - z_2 = \frac{(\alpha + |\alpha|^2) \{1 - (|\alpha|^2)^{n-1}\}}{1 - |\alpha|^2}$$

($n=1$ のとき $\alpha + |\alpha|^2$ となる)

$$z_{2n} = 1 + \frac{(\alpha + |\alpha|^2)(1 - |\alpha|^{2n-2})}{1 - |\alpha|^2}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1 + \frac{\alpha + |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

$$= \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2}$$

④ よ

$$z_{2n+3} - z_{2n+1} = (z_3 - z_1)(|\alpha|^2)^n$$

$$z_{2n+3} - z_{2n+1} = (1 + \alpha) |\alpha|^{2n}$$

$$z_3 - z_1 = 1 + \alpha$$

$$z_5 - z_3 = (1 + \alpha) |\alpha|^2$$

$$z_7 - z_5 = (1 + \alpha) |\alpha|^4$$

$$+ \quad z_{2n+1} - z_{2n-1} = (1 + \alpha) |\alpha|^{2n-2} \quad (n \geq 1)$$

$$z_{2n+1} - z_1 = \frac{(1 + \alpha) \{1 - (|\alpha|^2)^n\}}{1 - |\alpha|^2}$$

$$z_{2n+1} = \frac{(1 + \alpha)(1 - |\alpha|^{2n})}{1 - |\alpha|^2}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2}$$

$$\text{よ、} w = \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2}$$

よ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0$$

つまり

$$w = \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2}$$

実数 x に対し、 $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ と表す。

- (1) 実数 x と自然数 n に対し、 $\left[\frac{x}{n}\right]n \leq x < n + \left[\frac{x}{n}\right]n$ が成り立つことを示せ。
- (2) 実数 x と自然数 n に対し、 $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ が成り立つことを示せ。
- (3) 整数 p に対し、 $a_1 = p$, $a_{n+1} = \left[\frac{a_n}{n+1}\right]$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項と極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(1) (証明)

$$0 \leq \frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] < 1$$

より

$$\left[\frac{x}{n}\right] \leq \frac{x}{n} < 1 + \left[\frac{x}{n}\right]$$

よって

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \leq x < n + \left[\frac{x}{n}\right]n \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明1)

$$x = nq + r \quad (0 \leq r < n)$$

とおく

$$(i) [x] = nq + [r]$$

$$\frac{[x]}{n} = q + \frac{[r]}{n}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because r < n \\ 0 \leq [r] < n \\ \text{より} \\ 0 \leq \frac{[r]}{n} < 1 \end{array} \right)$$

よって

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = q$$

(ii)

$$\frac{x}{n} = q + \frac{r}{n}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because r < n \\ 0 \leq \frac{r}{n} < 1 \end{array} \right)$$

よって

$$\left[\frac{x}{n}\right] = q$$

(i), (ii) より

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] \quad \text{が成り立つ。}$$

(証明2)

$$(i) \text{より} \quad \left[\frac{x}{n}\right]n \leq x < n + \left[\frac{x}{n}\right]n$$

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \text{ は整数 である}$$

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \leq [x] < n + \left[\frac{x}{n}\right]n$$

$$\left[\frac{x}{n}\right] \leq \frac{[x]}{n} < 1 + \left[\frac{x}{n}\right]$$

$$\therefore \left[\frac{x}{n}\right] \text{ は整数 である}$$

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] \quad \text{が成り立つ。}$$

(3)

$$a_2 = \left[\frac{a_1}{2}\right] = \left[\frac{p}{2}\right]$$

$$a_3 = \left[\frac{a_2}{3}\right] = \left[\frac{\left[\frac{p}{2}\right]}{3}\right] \stackrel{(2)}{=} \left[\frac{\frac{p}{2}}{3}\right] = \left[\frac{p}{6}\right]$$

$$a_4 = \left[\frac{a_3}{4}\right] = \left[\frac{\left[\frac{p}{6}\right]}{4}\right] \stackrel{(2)}{=} \left[\frac{\frac{p}{6}}{4}\right] = \left[\frac{p}{24}\right]$$

$$\text{より} \quad a_n = \left[\frac{p}{n!}\right] \quad \text{となることを}$$

数学的帰納法によって示す。

(証明)

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 = [p] = p$$

となり、成り立つ。

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき成り立つと仮定する。

$$\text{つまり} \quad a_k = \left[\frac{p}{k!}\right] \quad \text{が成り立つ。}$$

よって

$$a_{k+1} = \left[\frac{a_k}{k+1}\right] = \left[\frac{\left[\frac{p}{k!}\right]}{k+1}\right] \stackrel{(2)}{=} \left[\frac{\frac{p}{k!}}{k+1}\right] = \left[\frac{p}{(k+1)!}\right]$$

よって $n=k$ のとき成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より

$$\text{すべて } n \in \mathbb{N} \quad \text{で} \quad a_n = \left[\frac{p}{n!}\right] \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\textcircled{3} \quad a_n = \left[\frac{p}{n!}\right]$$

(i) $p \geq 1$ のとき

十分大なる n に対して

$$0 < \frac{p}{n!} < 1 \quad \text{より} \quad a_n = 0$$

(ii) $p=0$ のとき

$$a_n = 0$$

(iii) $p \leq -1$ のとき

十分大なる n に対して

$$-1 < \frac{p}{n!} < 0 \quad \text{より} \quad a_n = -1$$

(i) ~ (iii) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & (p \geq 0) \\ -1 & (p \leq -1) \end{cases}$$