

次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = (\log x)^2$ の、直線 $y=1$ との交点における接線の方程式を求めよ。
 (2) 曲線 $y = x - \frac{1}{x}$ の法線のうち、原点を通るものの方程式を求めよ。

(1)

$$(\log x)^2 = 1 \quad \text{と} \quad x > 0$$

$$\log x = \pm 1$$

$$x = e, \frac{1}{e}$$

接点 $(e, 1)$

$$y' = 2(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'(x=e) = \frac{2}{e}$$

$$\text{接線 } y-1 = \frac{2}{e}(x-e)$$

$$y = \frac{2}{e}x - 1$$

接点 $(\frac{1}{e}, 1)$

$$y'(x=\frac{1}{e}) = -2e$$

$$\text{接線 } y-1 = -2e(x-\frac{1}{e})$$

$$y = -2ex + 3$$

よって

$$\text{接線 } \begin{cases} y = \frac{2}{e}x - 1 \\ y = -2ex + 3 \end{cases}$$

(2)

接点 $(t, t - \frac{1}{t})$

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$$y'(x=t) = \frac{t^2+1}{t^2}$$

$$\text{法線 } y - (t - \frac{1}{t}) = -\frac{t^2}{t^2+1}(x-t)$$

$$y = -\frac{t^2}{t^2+1}x + \frac{t^3}{t^2+1} + t - \frac{1}{t} \quad \text{--- ①}$$

これが原点を通るとき

$$0 = \frac{t^3}{t^2+1} + \frac{t^2-1}{t}$$

$$0 = t^4 + (t^2-1)$$

$$t^4 = \frac{1}{2}$$

よって

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって ① は

$$y = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}x$$

$$y = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}x$$

$$\text{② } \underline{y = (1-\sqrt{2})x}$$

2 曲線 $y=e^{\frac{x}{3}}$, $y=a\sqrt{2x-2}+b$ が $x=3$ で接するとき, 定数 a , b の値を求めよ。

$$f(x) = e^{\frac{x}{3}}, \quad g(x) = a\sqrt{2x-2} + b$$

とおく。

$$f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}, \quad g'(x) = a \times \frac{1}{2}(2x-2)^{-\frac{1}{2}} \times 2$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2x-2}}$$

であり,

$x=3$ で接するとき

$$\begin{cases} f(3) = g(3) & \text{--- ①} \\ f'(3) = g'(3) & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$e = 2a + b$$

② より

$$\frac{1}{3}e = \frac{a}{2}$$

$$a = \frac{2}{3}e$$

$$\therefore b = e - \frac{4}{3}e = -\frac{e}{3}$$

つまり,

$$\underline{\underline{(a, b) = \left(\frac{2}{3}e, -\frac{e}{3}\right)}}$$

xy 平面上の曲線 $C: y=e^x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 点 (a, e^a) における C の接線の方程式を求めよ。また、点 (a, e^a) における C の法線 l_a の方程式を求めよ。
 (2) $a \neq 1$ とする。点 $(1, e)$ における C の法線 l_1 と、点 (a, e^a) における C の法線 l_a との交点の x 座標を a の式で表せ。
 (3) (2) で求めた a の式を $h(a)$ とするとき、 $\lim_{a \rightarrow 1} h(a)$ を求めよ。

(1)

接点 (a, e^a)

$$y' = e^x$$

$$y_{(x=a)} = e^a$$

$$\text{接線: } y - e^a = e^a(x - a)$$

$$\underline{y = e^a x + (1-a)e^a}$$

$$\text{法線 } l_a: y - e^a = -\frac{1}{e^a}(x - a)$$

$$\underline{y = -\frac{1}{e^a}x + e^a + \frac{a}{e^a}}$$

(2)

$$l_1: y = -\frac{1}{e}x + e + \frac{1}{e}$$

と l_a と直交して、

$$-\frac{1}{e}x + e + \frac{1}{e} = -\frac{1}{e^a}x + e^a + \frac{a}{e^a}$$

$$\left(\frac{1}{e^a} - \frac{1}{e}\right)x = e^a + \frac{a}{e^a} - e - \frac{1}{e}$$

$$\frac{1 - e^{a-1}}{e^a}x = \frac{e^{2a} + a - e^{a+1} - e^{a-1}}{e^a}$$

$$a \neq 1 \text{ より } e^{a-1} \neq 1 \text{ かつ } a \neq 0$$

$$\underline{\underline{x = \frac{e^{2a} + a - e^{a+1} - e^{a-1}}{1 - e^{a-1}}}}$$

(3)

$$h(a) = \frac{e^{2a} + a - e^{a+1} - e^{a-1}}{1 - e^{a-1}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because t \\ a-1=t \quad t \neq 0 \\ a \rightarrow 1 \quad a \neq 1 \quad t \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

$$h(a) = \frac{e^{2t+2} + (t+1) - e^{t+2} - e^t}{1 - e^t}$$

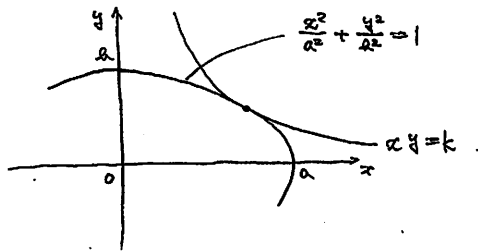
$$= \frac{e^{t+2}(e^t - 1) + (1 - e^t) + t}{1 - e^t}$$

$$= -e^{t+2} + 1 + \frac{t}{1 - e^t}$$

$$\xrightarrow{(t \rightarrow 0)} -e^2 + 1 - 1 = -e^2$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 1} h(a) = -e^2$$

2次曲線 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) と $xy = k$ ($k > 0$) が第1象限に共有点を持ち、その点における2つの曲線の接線が一致するとき、 k およびその共有点の座標 (x_1, y_1) を a, b を用いて表せ。



接点 (x_1, y_1)

とてき。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{が通るので}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \text{--- ①}$$

を満足しており、

$$\frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \quad \text{①} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}$$

$$xy = k \quad \text{が通るので}$$

$$x_1 y_1 = k \quad \text{--- ②}$$

を満足しており、

$$y dx + x dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{②} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y_1}{x_1}$$

よて

$$-\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} = -\frac{y_1}{x_1}$$

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

とてき

$$x_1 > 0, y_1 > 0, a > 0, b > 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{a}{b}$$

$$\text{よて} \quad y_1 = \frac{b}{a} x_1 \quad \text{--- ③}$$

①, ③ から y_1 を消去して

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{2x_1^2}{a^2} = 1$$

$$x_1^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$x_1 > 0, a > 0 \quad \text{より}$$

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{③ より} \quad y_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

② より

$$k = \frac{ab}{2}$$

以上により、

$$k = \frac{ab}{2}, \quad (x_1, y_1) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

平面上の3つの曲線 $y=9x^2+5x+3$, $y=-3x^2+x+\frac{5}{3}$,
 $y=5\log(x-a)-2$ について、次の問に答えよ。

- (1) 曲線 $y=9x^2+5x+3$ と $y=-3x^2+x+\frac{5}{3}$ の両方に接する直線の方程式を求めよ。
 (2) 上の3つの曲線に接する直線が存在するような定数 a の値を求めよ。

(1)

接点 $(s, 9s^2+5s+3)$ とおくと

$$y' = 18x+5$$

$$y'(x=s) = 18s+5$$

$$\text{接線: } y - (9s^2+5s+3) = (18s+5)(x-s)$$

$$y = (18s+5)x - 9s^2+3 \quad \text{--- ①}$$

接点 $(t, -3t^2+t+\frac{5}{3})$ とおくと

$$y' = -6x+1$$

$$y'(x=t) = -6t+1$$

$$\text{接線: } y - (-3t^2+t+\frac{5}{3}) = (-6t+1)(x-t)$$

$$y = (-6t+1)x + 3t^2 + \frac{5}{3} \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} = \text{②} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{cases} 18s+5 = -6t+1 \\ -9s^2+3 = 3t^2+\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3s - \frac{2}{3} \\ t^2 = -3s^2 + \frac{4}{3} \end{cases}$$

よ)

$$(-3s - \frac{2}{3})^2 = -3s^2 + \frac{4}{3}$$

$$9s^2 + 4s + \frac{4}{9} = -3s^2 + \frac{4}{3}$$

$$12s^2 + 4s = 0$$

$$4s(3s+1) = 0$$

$$s = 0, -\frac{1}{3}$$

$$\text{よって } (s, t) = (0, -\frac{2}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$(s, t) = (0, -\frac{2}{3}) \text{ とき ① は}$$

$$y = 5x+3$$

$$(s, t) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ とき ① は}$$

$$y = -x+2$$

つまり)

$$\underline{y = 5x+3, y = -x+2}$$

(2)

接点 $(u, 5\log(u-a)-2)$ とおくと

$$y' = \frac{5}{x-a}$$

$$y'(x=u) = \frac{5}{u-a}$$

$$\text{接線: } y - (5\log(u-a)-2) = \frac{5}{u-a}(x-u)$$

$$y = \frac{5}{u-a}x - \frac{5u}{u-a} + 5\log(u-a) - 2$$

$$= \frac{5}{u-a}x - \frac{7u-2a}{u-a} + 5\log(u-a)$$

こゝへ

(1) で得られた直線と一致する a で

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \frac{5}{u-a} = 5 & \text{--- ③} \\ -\frac{7u-2a}{u-a} + 5\log(u-a) = 3 & \text{--- ④} \end{cases}$$

のとき

③ より

$$u-a=1 \quad \text{つまり } u=a+1$$

④ に代入して

$$-\frac{7(a+1)-2a}{1} + 5\log 1 = 3$$

$$-5a-7=3$$

$$a=-2$$

$$\text{このとき } u=-1$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \frac{5}{u-a} = -1 & \text{--- ⑤} \\ -\frac{7u-2a}{u-a} + 5\log(u-a) = 3 & \text{--- ⑥} \end{cases}$$

のとき

⑤ より

$$u-a=-5$$

よって ⑥ で (真数) > 0 つまり $u-a > 0$ に不合理

(i), (ii) より

$$\underline{a=-2}$$

$f(x) = 2^{-x} \cos x$ とし、曲線 $C: y = f(x)$ と正の整数 n に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(n\pi, f(n\pi))$ における C の接線、法線と x 軸の交点をそれぞれ A, B とする。 A, B の座標を求めよ。
 (2) (1) で求めた点 A, B と点 P の3点でできる $\triangle ABP$ の面積 T_n を n を用いて表せ。
 (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ の和を求めよ。

(1)

$$f(n\pi) = 2^{-n\pi} \cos n\pi = (-1)^n \cdot 2^{-n\pi}$$

で"あり。

$$\text{接点 } P(n\pi, (-1)^n 2^{-n\pi})$$

$$f(x) = 2^{-x} (-\log 2) \cos x + 2^{-x} (-\sin x)$$

$$= \{ -(\log 2) \cos x - \sin x \} 2^{-x}$$

$$f'(n\pi) = \{ -(\log 2) \cos n\pi - \sin n\pi \} 2^{-n\pi}$$

$$= \{ -(\log 2) (-1)^n \} 2^{-n\pi}$$

$$= (\log 2) (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi}$$

$$\text{接線: } y - (-1)^n 2^{-n\pi} = (\log 2) (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi} (x - n\pi)$$

$$y = 0 \text{ とし}$$

$$(\log 2) (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi} (x - n\pi) = (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi}$$

$$x - n\pi = \frac{1}{\log 2}$$

$$\text{よって } x = n\pi + \frac{1}{\log 2}$$

$$\text{法線: } y - (-1)^n 2^{-n\pi} = -\frac{1}{(\log 2) (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi}} (x - n\pi)$$

$$y = 0 \text{ とし}$$

$$-\frac{1}{(\log 2) (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi}} (x - n\pi) = (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n\pi}$$

$$x - n\pi = -(\log 2) \cdot 4^{-n\pi}$$

$$\text{よって } x = n\pi - (\log 2) \cdot 4^{-n\pi}$$

737).

$$\underline{A(n\pi + \frac{1}{\log 2}, 0), B(n\pi - (\log 2) 4^{-n\pi}, 0)}$$

(2)

$$n\pi + \frac{1}{\log 2} > n\pi - (\log 2) \cdot 4^{-n\pi}$$

よ)

$$T_n = \frac{1}{2} \times \left\{ \left(n\pi + \frac{1}{\log 2} \right) - \left(n\pi - (\log 2) 4^{-n\pi} \right) \right\} \times \left| (-1)^n \cdot 2^{-n\pi} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\log 2} + (\log 2) \cdot 4^{-n\pi} \right) \times 2^{-n\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{\log 2}{4^{n\pi}} \right) \times \frac{1}{2^{n\pi+1}}$$

(3)

$$T_n = \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{\log 2}{4^{n\pi}} \right) \cdot \frac{1}{2^{n\pi+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n\pi+1} \log 2} + \frac{\log 2}{2^{2n\pi+1}}$$

こゝで

$$\text{数列 } \left\{ \frac{1}{2^{n\pi+1} \log 2} \right\}, \left\{ \frac{\log 2}{2^{2n\pi+1}} \right\} \text{ は}$$

$$\text{公比がそれぞれ } \frac{1}{2^\pi}, \frac{1}{2^{2\pi}}$$

の等比数列であり。

$$\left| \frac{1}{2^\pi} \right| < 1, \left| \frac{1}{2^{2\pi}} \right| < 1$$

よって、無限級数の和も収束し。

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{2^{\pi+1} \log 2}}{1 - \frac{1}{2^\pi}} + \frac{\frac{\log 2}{2^{2\pi+1}}}{1 - \frac{1}{2^{2\pi}}}$$

$$= \frac{1}{(2^{\pi+1} - 2) \log 2} + \frac{\log 2}{2^{2\pi+1} - 2}$$

$$= \frac{1}{2(2^\pi - 1) \log 2} + \frac{\log 2}{2(2^{2\pi} - 1)}$$

$$= \frac{1}{2(2^\pi - 1) \log 2} + \frac{\log 2}{2(2^\pi - 1)(2^{2\pi} + 2^\pi + 1)}$$

$$= \frac{2^{2\pi} + 2^\pi + 1 + (\log 2)^2}{2(2^\pi - 1)(2^{2\pi} + 2^\pi + 1) \log 2}$$

a は正の実数とする。 xy 平面の y 軸上に点 $P(0, a)$ をとる。

関数 $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ のグラフを C とする。 C 上の点 Q で次の条件を満たすもの

が原点 $O(0, 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件: Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

接点 $Q(t, \frac{t^2}{t^2+1})$ とおく

$$y' = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'(x=t) = \frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$(\text{直線 } PQ \text{ の傾き}) = \frac{\frac{t^2}{t^2+1} - a}{t - 0}$$

$$= \frac{t}{t^2+1} - \frac{a}{t}$$

条件を満たすとき

$$\frac{t}{t^2+1} - \frac{a}{t} = - \frac{(t^2+1)^2}{2t}$$

$$\frac{a}{t} = \frac{t}{t^2+1} + \frac{(t^2+1)^2}{2t}$$

$$a = \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{(t^2+1)^2}{2}$$

$$a = \frac{2t^2 + (t^2+1)^3}{2(t^2+1)}$$

$$a = \frac{t^6 + 3t^4 + 5t^2 + 1}{2(t^2+1)}$$

$$t^2 = x \quad \text{とおくと} \quad (x > 0)$$

$$2a = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 1}{x+1}$$

$$y = 2a \quad \text{と} \quad y = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 1}{x+1}$$

グラフを $x > 0$ で共有点

をもつとよい。

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 1}{x+1}$$

とみると

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 5)(x+1) - (x^3 + 3x^2 + 5x + 1) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^2} > 0 \quad (\because x > 0)$$

よって

$f(x)$ は増加関数。

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{より}$$

$$f(x) > 1$$

よって

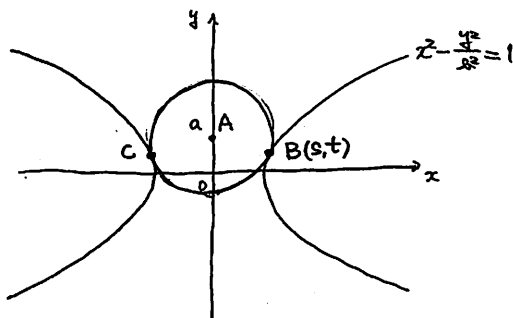
$$2a > 1$$

$$\textcircled{a} \quad a > \frac{1}{2}$$

$a > 0, b > 0$ とする。点 $A(0, a)$ を中心とする半径 r の円が、
双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と 2 点 $B(s, t), C(-s, t)$ で接しているとする。た
だし、 $s > 0$ とする。ここで、双曲線と円が点 P で接するとは、 P が双曲線と
円の共有点であり、かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接
線が一致することである。

(1) r, s, t を、 a と b を用いて表せ。

(2) $\triangle ABC$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求
めよ。



(1)

接点 $B(s, t)$

$$2x dx - \frac{2y}{b^2} dy = 0$$

$$\frac{2y}{b^2} dy = 2x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = b^2 \frac{x}{y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=s, y=t} = b^2 \frac{s}{t}$$

$$(\text{直線 } AB \text{ の傾き}) = \frac{t-a}{s}$$

であり、円と双曲線は点 B で接するので

$$b^2 \frac{s}{t} = -\frac{s}{t-a}$$

$a > 0$ より $s \neq 0$ なので

$$b^2(t-a) = -t$$

$$(1+b^2)t = ab^2$$

$$\textcircled{1} t = \frac{ab^2}{1+b^2}$$

点 $B(s, t)$ は双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上

にあるので

$$s^2 - \frac{t^2}{b^2} = 1$$

$$s^2 - \frac{a^2 b^2}{(1+b^2)^2} = 1$$

$$s^2 = 1 + \frac{a^2 b^2}{(1+b^2)^2}$$

$$s^2 = \frac{a^2 b^2 + (1+b^2)^2}{(1+b^2)^2}$$

$s > 0$ より

$$s = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + (1+b^2)^2}}{1+b^2}$$

$$AB = r \text{ より}$$

$$s^2 + (t-a)^2 = r^2$$

$$\frac{a^2 b^2 + (1+b^2)^2}{(1+b^2)^2} + \left(\frac{ab^2}{1+b^2} - a \right)^2 = r^2$$

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 + (1+b^2)^2}{(1+b^2)^2} + \left(\frac{-a}{1+b^2} \right)^2$$

$$r^2 = \frac{a^2(1+b^2) + (1+b^2)^2}{(1+b^2)^2}$$

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + 1}{1+b^2}$$

$r > 0$ より

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 1}{1+b^2}}$$

$$\text{よって } (r, s, t) = \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 1}{1+b^2}}, \frac{\sqrt{a^2 b^2 + (1+b^2)^2}}{1+b^2}, \frac{ab^2}{1+b^2} \right)$$

(2)

$\triangle ABC$ が正三角形 となるためには

$$2s = r$$

より

$$\frac{2\sqrt{a^2 b^2 + (1+b^2)^2}}{1+b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 1}{1+b^2}}$$

$$2\sqrt{a^2 b^2 + (1+b^2)^2} = \sqrt{1+b^2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$4(a^2 b^2 + (1+b^2)^2) = (1+b^2)(a^2 + b^2 + 1)$$

$$4a^2 b^2 + 4(1+b^2)^2 = (1+b^2)a^2 + (1+b^2)^2$$

$$(1-3b^2)a^2 = 3(1+b^2)^2$$

これを満たす a が存在するためには

$$1-3b^2 > 0$$

$$b^2 - \frac{1}{3} < 0$$

$b > 0$ とあわせて

$$0 < b < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

このとき

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 1}{1+b^2}}$$

も存在する

よって

$$0 < b < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a を正の定数とし、曲線 $y = ae^{-\frac{x^2}{2}}$ を C とする。 ℓ は原点 O を通る直線で、 C との交点を P とするとき、 P の x 座標は正であり、また、 ℓ は点 P における C の接線と垂直に交わるとする。

(1) このような直線 ℓ が引けるために a がとりうる値の範囲を求めよ。

また、このとき、点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C の接線が x 軸と交わる点を Q とする。 a が (1) で求めた範囲を動くとき、 $\triangle POQ$ の面積の最小値と、そのときの a の値を求めよ。

(1)

接点 $P(t, ae^{-\frac{t^2}{2}})$ とおく。

$$y' = ae^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)$$

$$= -ax e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y'(x=t) = -ate^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{法線 } \ell: y - ae^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{at} (x - t)$$

これが原点 O を通るから

$$-ae^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{a}$$

$$a^2 = e^{t^2} \quad \text{--- ①}$$

これが $t > 0$ で実数解をもつとよく

$$y = a^2 \quad \text{と} \quad y = e^{t^2} \quad \text{が交わる}$$

共有点をもつとよい。

$$f(t) = e^{t^2} \quad \text{とおく}$$

$$f'(t) = 2tet^2 > 0$$

より $f(t)$ は増加関数。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$$

とあわせて。

$$f(t) > f(0) = 1$$

$$\text{よって} \quad \underline{a > 1}$$

ここで ① より

$$t^2 = \log a^2 = 2 \log a$$

$t > 0$ より

$$t = \sqrt{2 \log a}$$

このとき

$$ae^{-\frac{t^2}{2}} = a(e^{t^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a(a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1$$

よって

$$\underline{P(\sqrt{2 \log a}, 1)}$$

(2)

接点 $P(\sqrt{2 \log a}, 1)$

$$y'(x = \sqrt{2 \log a}) = -\sqrt{2 \log a}$$

$$\text{接線: } y - 1 = -\sqrt{2 \log a} (x - \sqrt{2 \log a})$$

$$y = -\sqrt{2 \log a} x + 2 \log a + 1.$$

$$y = 0 \quad \text{と} \quad 17.$$

$$\sqrt{2 \log a} x = 2 \log a + 1$$

$$a > 1 \quad \text{なら} \quad \log a \neq 0 \quad \text{より}$$

$$x = \sqrt{2 \log a} + \frac{1}{\sqrt{2 \log a}}$$

$$\text{つまり} \quad Q\left(\sqrt{2 \log a} + \frac{1}{\sqrt{2 \log a}}, 0\right)$$

$$\text{よって} \quad S(\triangle POQ) = \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{2 \log a} + \frac{1}{\sqrt{2 \log a}}\right) \times 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 \log a} + \frac{1}{\sqrt{2 \log a}}\right)$$

$$\text{ここで} \quad \sqrt{2 \log a} > 0 \quad \text{より} \quad \frac{1}{\sqrt{2 \log a}} > 0$$

なので (相加) $\geq$ (相乗) より

$$\sqrt{2 \log a} + \frac{1}{\sqrt{2 \log a}} \geq 2 \sqrt{\sqrt{2 \log a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \log a}}} = 2$$

$$\text{②} \quad S(\triangle POQ) \geq 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ \sqrt{2 \log a} = \frac{1}{\sqrt{2 \log a}} \quad \text{より} \\ 2 \log a = 1 \\ \log a = \frac{1}{2} \\ a = e^{\frac{1}{2}} \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\min S(\triangle POQ) = 1 \quad (a = \sqrt{e} \text{ のとき})}$$