

次の関数の極値を求め、そのグラフをかけ。

(1) $y = (1 + \cos x) \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

(2) $y = (x+1)e^x$ [必要なら $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい]

(1)

$$y = (1 + \cos x) \sin x$$

$$y' = -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cos x$$

$$= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$$

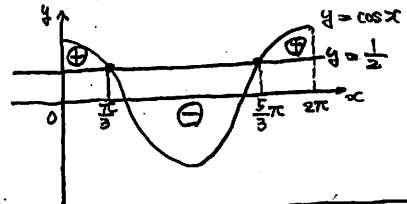
$$= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$$= 2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$

y' の符号!

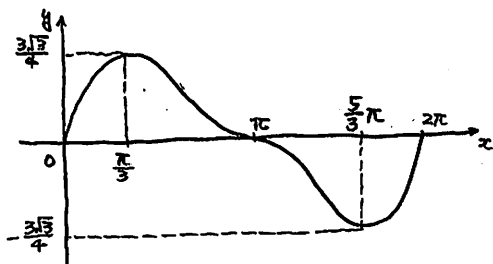


x	$0 \dots \frac{\pi}{3} \dots \pi \dots \frac{5\pi}{3} \dots 2\pi$
y'	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
y	$0 \nearrow \frac{3\sqrt{3}}{4} \searrow 0 \searrow -\frac{3\sqrt{3}}{4} \nearrow 0$

極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ($x = \frac{\pi}{3}$)

極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ($x = \frac{5\pi}{3}$)

グラフの概形は下図の通り



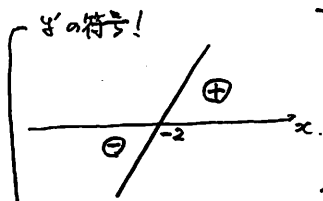
(2)

$$y = (x+1)e^x$$

$$y' = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x$$

$$= (x+2)e^x$$

y' の符号!



$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

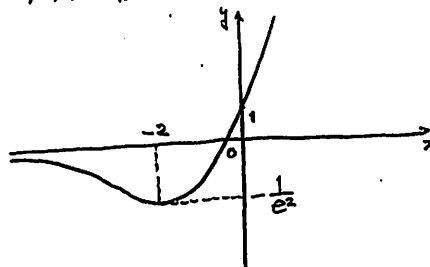
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + e^x) = 0$$

x	$(-\infty) \dots -2 \dots (\infty)$
y'	$- \quad 0 \quad +$
y	$(0) \searrow -\frac{1}{e^2} \nearrow (\infty)$

極大値 なし

極小値 $-\frac{1}{e^2}$ ($x = -2$)

グラフの概形は下図の通り



(1) 曲線 $y = x^4 - 4x^3 - 4x + 1$ は2つの変曲点をもつ。その座標を求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 9}$ のグラフの漸近線の方程式を求めよ。

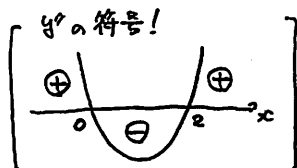
(1)

$$y = x^4 - 4x^3 - 4x + 1$$

$$y' = 4x^3 - 12x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x - 2)$$



変曲点 $(0, 1), (2, -23)$

(2)

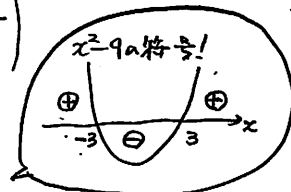
$$y = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 9}$$

$$= 2 + \frac{5x + 17}{x^2 - 9}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2 - 9 \overline{) 2x^2 + 5x - 1} \\ \underline{2x^2 - 18} \\ 5x + 17 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\frac{5}{x} + \frac{17}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} \right)$$

$$= 2$$



$$\left(\begin{array}{l} x = 3 \text{ のとき} \\ 2x^2 + 5x - 1 = 32 \\ x = -3 \text{ のとき} \\ 2x^2 + 5x - 1 = 2 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 3+0} y = \infty & \lim_{x \rightarrow 3-0} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3+0} y = -\infty & \lim_{x \rightarrow -3-0} y = \infty \end{array} \right.$$

よ)

漸近線 $y = 2, x = 3, x = -3$

関数 $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$ について、次の問いに答えよ。

ただし、 α, β は定数とする。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ が $x=1$ で極値をとるための α, β の条件を求めよ。

(3) $f(x)$ が $x=1$ で極値をとり、さらに点 $(4, f(4))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点となるように α, β の値を定め、関数 $y=f(x)$ の極値と、その曲線の変曲点をすべて求めよ。

(1)

$$f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x + \alpha)e^{-x} + (x^2 + \alpha x + \beta)(-e^{-x})$$

$$= (-x^2 + (-\alpha + 2)x + \alpha + \beta)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x - \alpha + 2)e^{-x} + (-x^2 + (-\alpha + 2)x + \alpha + \beta)(-e^{-x})$$

$$= (x^2 + (\alpha - 4)x - 2\alpha + \beta + 2)e^{-x}$$

(2)

$x=1$ で極値をとるためには

$$f'(1) = 0 \quad \text{が必要}$$

$$(-1 - \alpha + 2 + \alpha - \beta)e^{-1} = 0$$

$$-\beta + 1 = 0$$

$$\beta = 1$$

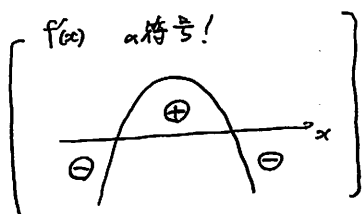
このとき

$$f(x) = (x^2 + \alpha x + 1)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + (-\alpha + 2)x + \alpha + 1)e^{-x}$$

$$= -(x^2 + (\alpha - 2)x - \alpha - 1)e^{-x}$$

$$= -(x + \alpha - 1)(x - 1)e^{-x}$$



$f'(x)$ が $x=1$ の前後で符号変化を起すためには

$$-\alpha + 1 \neq 1$$

つまり $\alpha \neq 0$ 。

⊙

$$\alpha \neq 0 \text{ かつ } \beta = 1$$

(3)

$x=1$ で極値をとるため

$$\alpha \neq 0 \text{ かつ } \beta = 1 \text{ である。}$$

このとき

$$f''(x) = (x^2 + (\alpha - 4)x - 2\alpha + 3)e^{-x}$$

ここで、点 $(4, f(4))$ が変曲点となるため

$$f''(4) = 0$$

$$(16 + 4(\alpha - 4) - 2\alpha + 3)e^{-4} = 0$$

$$2\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

このとき

$$f(x) = (x^2 - \frac{3}{2}x + 1)e^{-x}$$

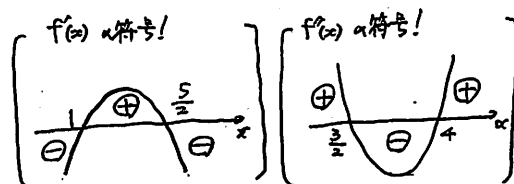
$$f'(x) = (-x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{2})e^{-x}$$

$$= -(x - \frac{5}{2})(x - 1)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - \frac{11}{2}x + 6)e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 - 11x + 12)e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}(2x - 3)(x - 4)e^{-x}$$



x	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...	$\frac{5}{2}$	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+		+	0	-	-	
$f''(x)$	+		+	0	-		-	0	+
$f(x)$				$\frac{1}{2e}$		$\frac{1}{e\sqrt{e}}$		$\frac{7}{2e^2\sqrt{e}}$	

よって

$$(\alpha, \beta) = (-\frac{3}{2}, 1)$$

$$\text{極大値 } \frac{7}{2e^2\sqrt{e}} \quad (x = \frac{5}{2})$$

$$\text{極小値 } \frac{1}{2e} \quad (x = 1)$$

$$\text{変曲点 } (\frac{3}{2}, \frac{1}{e\sqrt{e}}), (4, \frac{11}{e^4})$$

a を実数とする。関数 $f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ が極値をもたないように、 a の値の範囲を定めよ。

解法1

$$f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x$$

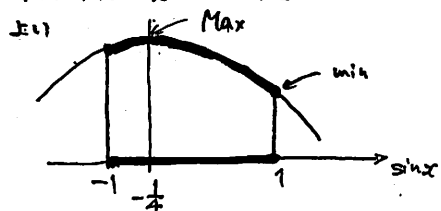
$$= a - \sin x + (1 - 2\sin^2 x)$$

$$= -2\sin^2 x - \sin x + a + 1$$

$$= -2\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 + a + \frac{9}{8}$$

ここで $-1 \leq \sin x \leq 1$ において

$f'(x)$ の符号変化が起こらないと



$$\begin{cases} \text{Max } f'(x) = a + \frac{9}{8} & (\sin x = -\frac{1}{4} \text{ とき}) \\ \text{min } f'(x) = a - 2 & (\sin x = 1 \text{ とき}) \end{cases}$$

より

$$a + \frac{9}{8} \leq 0 \quad \text{or} \quad a - 2 \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{a \leq -\frac{9}{8}, 2 \leq a}$$

解法2

$$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x$$

$$= -2\sin^2 x - \sin x + a + 1$$

$f(x)$ が極値をもたないのは、

すべて x について $f'(x) \geq 0$

または

すべて x について $f'(x) \leq 0$

が成り立つとき。

つまり

$$\text{すべて } x \text{ について } 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq a$$

または

$$\text{すべて } x \text{ について } 2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq a$$

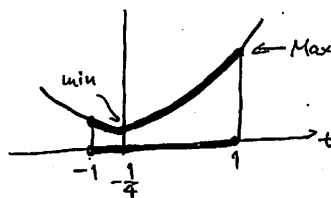
が成り立つときである。

$$\sin x = t \quad \text{とおくと} \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \text{であり}$$

$$g(t) = 2t^2 + t - 1$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

よって



$$\begin{cases} \text{Max } g(t) = 2 & (t = 1) \\ \text{min } g(t) = -\frac{9}{8} & (t = -\frac{1}{4}) \end{cases}$$

よって

$$\underline{a \leq -\frac{9}{8}, 2 \leq a}$$

解法3

$$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x$$

$$f''(x) = -\cos x - 2\sin 2x$$

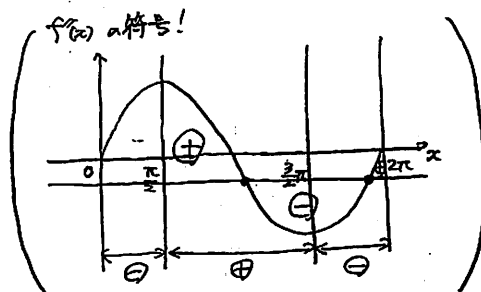
$$= -\cos x - 4\sin x \cos x$$

$$= -\cos x (1 + 4\sin x)$$

$$= -4\cos x \left(\sin x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

周期 2π であるので

$0 \leq x < 2\pi$ で考える



$$\sin x = -\frac{1}{4} \text{ を満たす角 } \alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$$

とすると

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	α	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	β	...	2π
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$a+1$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$	$a+\frac{9}{8}$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$a+\frac{9}{8}$	$\searrow$	$a+1$

$$\begin{cases} f'(x) = a - \sin x + \cos 2x \\ = a - \sin x + 1 - 2\sin^2 x \\ = a + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{8} \\ = a + \frac{9}{8} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \text{Max } f(x) = a + \frac{9}{8} \\ \text{min } f(x) = a - 2 \end{cases}$$

$$\text{すべて } x \text{ について } f(x) \geq 0$$

または

$$\text{すべて } x \text{ について } f(x) \leq 0$$

が成り立つときである

$$a + \frac{9}{8} \leq 0 \quad \text{or} \quad a - 2 \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{a \leq -\frac{9}{8}, 2 \leq a}$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + 7x + 3, \quad g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1} \text{ とする.}$$

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ はただ1つの実数解をもち、その実数解 α は $-2 < \alpha < 0$ を満たすことを示せ。
- (2) 曲線 $y = g(x)$ の漸近線を求めよ。
- (3) α を用いて関数 $y = g(x)$ の増減を調べ、そのグラフをかけ。
ただし、グラフの凹凸を調べる必要はない。

(1) (証明)

$$f(x) = x^3 + x^2 + 7x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 7$$

$$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{3} > 0$$

よ) $f(x)$ は増加関数

また、 $f(x)$ は連続であり

$$\begin{cases} f(-2) = -8 + 4 - 14 + 3 = -15 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

$$\text{から } f(-2) < 0 \text{ かつ } f(0) > 0$$

を満たす α で

$$f(\alpha) = 0 \text{ はただ1つの実数解をもち}$$

$$\text{その実数解 } \alpha \text{ は } -2 < \alpha < 0 \text{ を満たす.}$$

(2)

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

$$= x + \frac{-4x + 2}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x + 2}{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よ) 漸近線 $y = x$

(3)

$$g'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

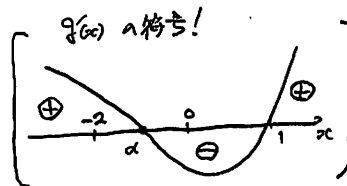
$$= \frac{3x^4 - 3 - 2x^4 + 6x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2 - 4x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 7x + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

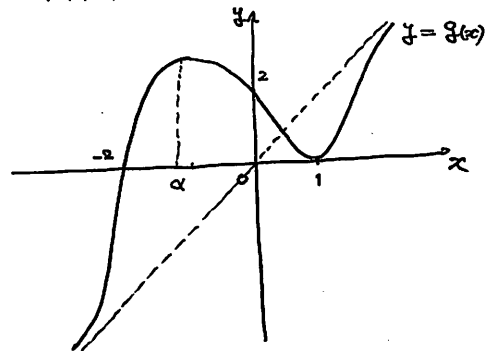
$$= \frac{(x-1)f(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 6 & -4 & -3 \\ & & 1 & 1 & 7 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 7 & 3 & 0 \end{array}$$



x	$(-\infty) \cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$(-\infty) \nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	(∞)

よ) $g(x)$ の概形は下図の通り



xy平面上に $x=2\cos 2\theta$, $y=2\cos 3\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) と媒介変数表示された曲線Cを考える。

(1) $t=\cos \theta$ において、 x と y を t の式で表せ。

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 y を x の式で表せ。また、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ において、 y を x の式で表せ。

(3) 曲線Cの概形をかけ。

(1)

$$x=2\cos 2\theta$$

$$=2(2\cos^2 \theta -1)$$

$$=4t^2-2$$

$$y=2\cos 3\theta$$

$$=2(4\cos^3 \theta -3\cos \theta)$$

$$=8t^3-6t$$

$$\therefore \begin{cases} x=4t^2-2 \\ y=8t^3-6t \end{cases}$$

(2)

$$(i) 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$0 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \therefore \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$x=4t^2-2$$

$$\therefore t^2 = \frac{x+2}{4}$$

$$t \geq 0 \quad \therefore \quad t = \frac{\sqrt{x+2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= 8 \times \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{8} - 6 \times \frac{\sqrt{x+2}}{2} \\ &= (x+2)\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+2} \\ &= (x-1)\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

$$(ii) \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 0 \quad \therefore \quad -1 \leq t \leq 0$$

$$t^2 = \frac{x+2}{4}$$

$$\therefore t = -\frac{\sqrt{x+2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= 8 \times \left(-\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{8} \right) - 6 \times \left(-\frac{\sqrt{x+2}}{2} \right) \\ &= -(x-1)\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

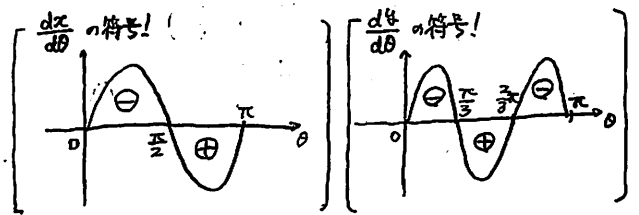
(i), (ii) より

$$y = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ -(x-1)\sqrt{x+2} & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) 解法1

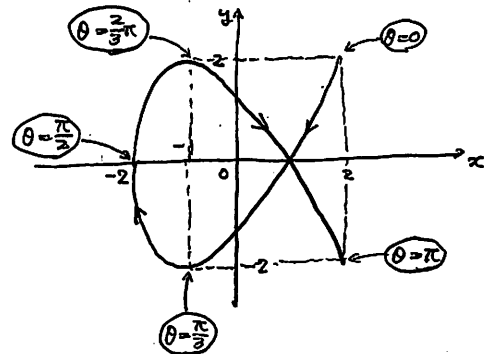
$$\frac{dx}{d\theta} = -4\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -6\sin 3\theta$$



θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$	(0)	-	-	0	+	+	(0)		
$\frac{dy}{d\theta}$	(0)	-	0	+	+	0	-	(0)	
(x, y)	(2, 2)		(-1, 2)		(-2, 0)		(-1, -2)		(2, -2)

Cの概形は下図の通り



解法2

$$(i) 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$0 \leq 2\theta \leq \pi \quad \therefore \quad -1 \leq \cos 2\theta \leq 1$$

$$\textcircled{1} -2 \leq 2\cos 2\theta \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$y = (x-1)\sqrt{x+2} \quad \therefore$$

$$y' = 1\sqrt{x+2} + (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

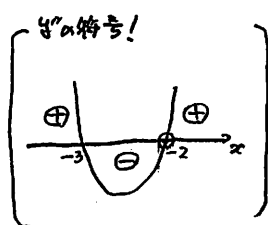
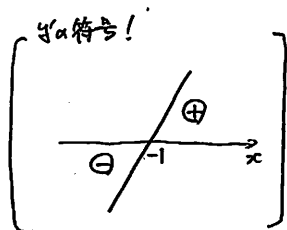
$$= \frac{2(x+2) + x-1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$$

$$y'' = \frac{3}{2} \times \frac{1\sqrt{x+2} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{2(x+2) - (x+1)}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{3(x+3)}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$$



x	-2	$\dots$	-1	$\dots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

(i) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき

$\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$ より $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$

③ $-2 \leq \cos 2\theta \leq 2$

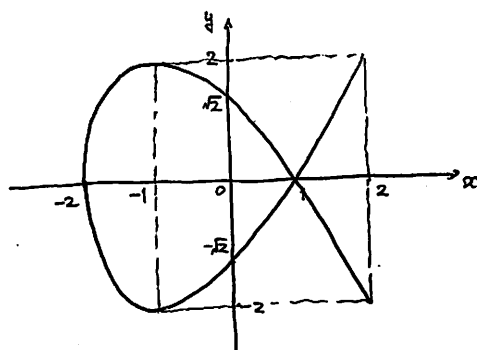
つまり $-2 \leq x \leq 2$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときと

x 軸に関して対称である。

(i), (ii) より

C の概形は 下図 へ通り



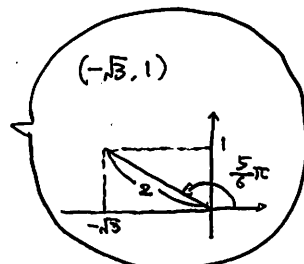
関数 $f(x) = e^{-\sqrt{3}x} \sin x$ が $x \geq 0$ の範囲で極大値をとる x の値を小さいものから順に $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ の和を求めよ。

$$f(x) = e^{-\sqrt{3}x} \sin x$$

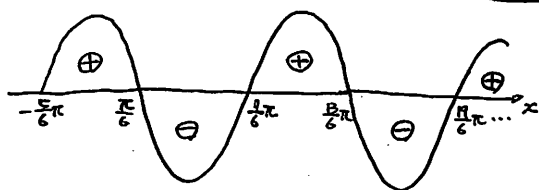
$$f'(x) = -\sqrt{3} e^{-\sqrt{3}x} \sin x + e^{-\sqrt{3}x} \cos x$$

$$= e^{-\sqrt{3}x} \left(\underbrace{-\sqrt{3} \sin x}_{\text{㊶}} + \underbrace{\cos x}_{\text{㊷}} \right)$$

$$= 2e^{-\sqrt{3}x} \sin \left(x + \frac{5}{6}\pi \right)$$



$f'(x)$ の符号!



$$a_1 = \frac{\pi}{6}, a_2 = \frac{5\pi}{6}, a_3 = \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$\therefore a_n = \frac{\pi}{6} + (n-1)2\pi$$

$$= 2n\pi - \frac{11}{6}\pi$$

$$f(a_n) = e^{-\sqrt{3}(2n\pi - \frac{11}{6}\pi)} \sin(2n\pi - \frac{11}{6}\pi)$$

$$= e^{\frac{11\sqrt{3}}{6}\pi - 2\sqrt{3}\pi n} \sin(-\frac{11}{6}\pi)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{11\sqrt{3}}{6}\pi - 2\sqrt{3}\pi n}$$

数列 $\{f(a_n)\}$ は初項 $\frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$

公比 $e^{-2\sqrt{3}\pi}$ の等比数列をなし.

$$|e^{-2\sqrt{3}\pi}| < 1 \quad \text{なので}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ は収束し、その和は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) &= \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}}{1 - e^{-2\sqrt{3}\pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}}{2(1 - e^{-2\sqrt{3}\pi})} \end{aligned}$$

a は定数とする。関数 $f(x) = -\sin x \cos x + a \sin x + (2a-1)x$ について

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ が $0 < x < \pi$ において極大値と極小値をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。
- (3) $y=f(x)$ のグラフが $0 < x < \pi$ の範囲に変曲点をもち、その変曲点における接線の傾きが1であるように、定数 a の値を定めよ。

(1)

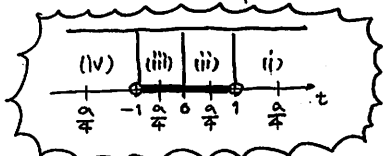
$$f(x) = -\sin x \cos x + a \sin x + (2a-1)x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x) + a \cos x + 2a-1 \\ &= -\cos^2 x + \sin^2 x + a \cos x + 2a-1 \\ &= -2\cos^2 x + a \cos x + 2a-1 \end{aligned}$$

(2) **解法1**

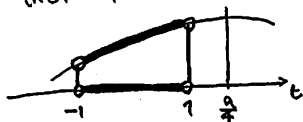
$$\left(\begin{array}{l} \cos x = t \quad \text{とおくと} \quad 0 < x < \pi \text{ で} \\ t \text{ と } x \text{ は 1対1対応であり} \quad -1 < \cos x < 1 \\ \text{つまり} \quad -1 < t < 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2t^2 + at + 2a \\ &= -2\left(t - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 + 2a = g(t) \end{aligned}$$



(i) $1 \leq \frac{a}{4}$ $a \geq 4$ のとき

(i.e. $4 \leq a$ のとき)



したがって

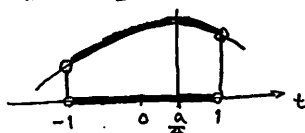
$$g(t) = 0 \text{ がない}$$

異なる2つの実数解をもつことはない

よって 不合理

(ii) $0 \leq \frac{a}{4} < 1$ $0 \leq a < 4$ のとき

(i.e. $0 \leq a < 4$ のとき)



$$\begin{cases} g\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{8}a^2 + 2a \\ g(1) = 3a-2 \end{cases}$$

よって

$$3a-2 < 0 < \frac{1}{8}a^2 + 2a$$

となるよ (1).

$$3a-2 < 0 \quad \text{よって} \quad a < \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{8}a^2 + 2a > 0 \quad \text{よって}$$

$$a^2 + 16a > 0$$

$$a(a+16) > 0$$

$$a < -16, 0 < a$$

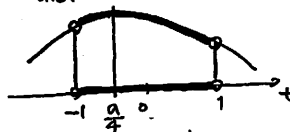
$$\text{よって} \quad a < -16, 0 < a < \frac{2}{3}$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq a < 4 \quad \text{よって}$$

$$0 < a < \frac{2}{3}$$

(iii) $-1 < \frac{a}{4} \leq 0$ $a \leq 0$ のとき

(i.e. $-4 < a \leq 0$ のとき)



$$\begin{cases} g\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{8}a^2 + 2a \\ g(1) = a-2 \end{cases}$$

よって

$$a-2 < 0 < \frac{1}{8}a^2 + 2a$$

となるよ (1).

$$a-2 < 0 \quad \text{よって} \quad a < 2$$

$$\frac{1}{8}a^2 + 2a > 0 \quad \text{よって} \quad a < -16, 0 < a$$

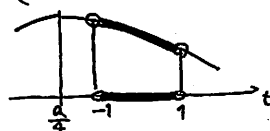
よって

$$a < -16, 0 < a < 2$$

よって $-4 < a \leq 0$ は不合理

(iv) $\frac{a}{4} \leq -1$ $a \leq -4$ のとき

(i.e. $a \leq -4$ のとき)



したがって

$$g(t) = 0 \text{ がない}$$

異なる2つの実数解をもつことはない

よって 不合理

(i) ~ (iv) より

$$\underline{0 < a < \frac{2}{3}}$$

(2) 解法2

($\cos x = t$ とおくと $0 < x < \pi$ で
 t と x は 1対1対応であり $-1 < t < 1$)

$$f'(x) = -2t^2 + at + 2a = 0$$

といて

$$a(t+2) = 2t^2$$

$t+2 \neq 0$ より

$$a = \frac{2t^2}{t+2}$$

$$y = a \text{ と } y = \frac{2t^2}{t+2} \text{ が 1つずつ}$$

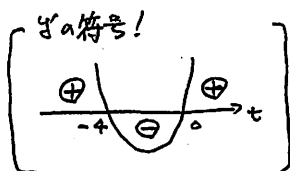
共有点を考えるとよい.

$$y = \frac{2t^2}{t+2} \quad t \rightarrow 117$$

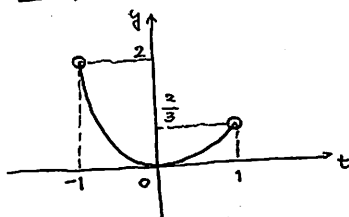
$$y' = \frac{4t(t+2) - 2t^2 \cdot 1}{(t+2)^2}$$

$$= \frac{2t^2 + 8t}{(t+2)^2}$$

$$= \frac{2t(t+4)}{(t+2)^2}$$



t	(-1) ... 0 ... (1)
y'	- ... 0 +
y	(2) \searrow 0 \nearrow (\frac{2}{3})



よって $\underline{0 < a < \frac{2}{3}}$

(3)

$$f'(x) = -2\cos^2 x + a\cos x + 2a$$

$$f''(x) = -4\cos x(-\sin x) - a\sin x$$

$$= 4\sin x \cos x - a\sin x$$

$$= \sin x (4\cos x - a)$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{といて}$$

$$\sin x = 0 \text{ or } \cos x = \frac{a}{4}$$

$0 < x < \pi$ で 変曲点を 2つ求めるには

$$\cos x = \frac{a}{4} \quad \text{--- ①}$$

$$-1 < \frac{a}{4} < 1$$

$$-4 < a < 4$$

① を満たす $x = \alpha$ とすると $\cos \alpha = \frac{a}{4}$

$f'(\alpha) = 1$ が必要であり.

$$-2\cos^2 \alpha + a\cos \alpha + 2a = 1$$

$$-\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + 2a = 1$$

$$a^2 + 16a - 8 = 0$$

$$a = -8 \pm 6\sqrt{2}$$

$$-4 < a < 4 \quad \text{より}$$

$$a = -8 + 6\sqrt{2}$$

逆に a とおき

$f''(x)$ は $x = \alpha$ で 符号が変化する a である

点 $(\alpha, f(\alpha))$ は 変曲点 といえる

よって $\underline{a = -8 + 6\sqrt{2}}$

関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1}$ とする。

(1) $0 < x < 1$ ならば, $0 < f(x) < 1$ となることを示せ。

(2) $f(x) - x = 0$ となる x をすべて求めよ。

(3) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1, 2, \dots$) とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(1) (証明)

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2x^2+1} \right) > 0$$

よ, $0 < f(x) < 1$ となる。

$$1 - f(x) = 1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2x^2+1} \right) \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2x^2+1} - \frac{1}{3} \right) > 0$$

$$(\text{①}) \quad 0 < x < 1 \quad \text{より}$$

よ, $0 < x < 1$ ならば

$$0 < f(x) < 1 \quad \text{が成り立つ。}$$

(2)

$$f(x) - x = \frac{3x^2}{2x^2+1} - x$$

$$= \frac{-2x^3 + 3x^2 - x}{2x^2+1}$$

$$= \frac{-x(2x^2 - 3x + 1)}{2x^2+1}$$

$$= \frac{-x(x-1)(2x-1)}{2x^2+1}$$

$$\text{よ, } f(x) - x = 0 \quad \text{より}$$

$$x = 0, \frac{1}{2}, 1$$

(3)

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{ならば}$$

$$\frac{3}{2} < 2x^2+1 < 3$$

よ,

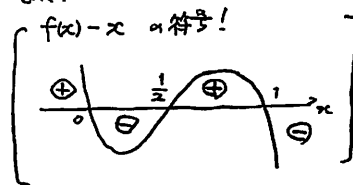
$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2x^2+1} > \frac{1}{3}$$

$$-1 < -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2x^2+1} \right) < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2x^2+1} \right) < 1$$

$$\text{よ, } \frac{1}{2} < f(x) < 1$$

また,



よ,

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{ならば} \quad f(x) - x > 0$$

よ,

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{ならば} \quad x < f(x) < 1$$

よ,

数列 $\{a_n\}$ は増加列である。

$$1 - a_{n+1} = 1 - f(a_n)$$

$$= 1 - \frac{3a_n^2}{2a_n^2+1}$$

$$= \frac{-a_n^2+1}{2a_n^2+1}$$

$$= \frac{1+a_n}{2a_n^2+1} \cdot (1-a_n) \quad \text{--- ①}$$

よ,

$$g(x) = \frac{1+x}{2x^2+1}$$

よ,

$$g(x) = \frac{1(2x^2+1) - (1+x) \cdot 4x}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x + 1}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)^2+3}{(2x^2+1)^2} < 0 \quad (\text{②}) \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

よ, $g(x)$ は減少関数である。

$$g\left(\frac{1}{2}\right) > g(x) \geq g(a_n) > g(1)$$

よ,

$$1 > g(x) \geq \frac{1+a_n}{2a_n^2+1} > \frac{2}{3}$$

① よ,

$$1 - a_{n+1} \leq g(x) (1 - a_n)$$

よ,

$$0 < 1 - a_n \leq \{g(x)\}^{n-1} (1 - a_1)$$

$$0 < g(x) < 1 \quad \text{よ,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{g(x)\}^{n-1} = 0$$

よ, $1 - a_n \rightarrow 0$ の原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = 0$$

よ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$