

関数 $y = \frac{x-3}{x^2+1}$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+1} \quad \text{とおく}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x-3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ の符号!

x	$(-\infty)$	$\dots$	$3-\sqrt{10}$	$\dots$	$3+\sqrt{10}$	$\dots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	(0)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\alpha = 3 - \sqrt{10} \quad \text{とおく}$$

$$-\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 0 \quad \text{より}$$

$$\alpha^2 = 6\alpha + 1$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-3}{\alpha^2+1}$$

$$= \frac{\alpha-3}{6\alpha+2}$$

$$= \frac{-\sqrt{10}}{20-6\sqrt{10}}$$

$$= \frac{-\sqrt{10}}{2(10-3\sqrt{10})}$$

$$= \frac{-\sqrt{10}(10+3\sqrt{10})}{2(100-90)}$$

$$= \frac{-10\sqrt{10}-30}{20}$$

$$= -\frac{3+\sqrt{10}}{2}$$

$$\beta = 3 + \sqrt{10} \quad \text{とおく}$$

$$-\beta^2 + 6\beta + 1 = 0 \quad \text{より}$$

$$\beta^2 = 6\beta + 1$$

$$f(\beta) = \frac{\beta-3}{\beta^2+1}$$

$$= \frac{\beta-3}{6\beta+2}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{20+6\sqrt{10}}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2(10+3\sqrt{10})}$$

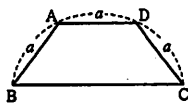
$$= \frac{\sqrt{10}(10-3\sqrt{10})}{2(100-90)}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{10}}{2}$$

よって

$$\begin{cases} \text{Max } f(x) = \frac{-3+\sqrt{10}}{2} & (x = 3+\sqrt{10} \text{ において}) \\ \text{min } f(x) = -\frac{3+\sqrt{10}}{2} & (x = 3-\sqrt{10} \text{ において}) \end{cases}$$

等脚台形 ABCD において、各辺の長さは
 $BA=AD=DC=a$ (一定) とし、底辺 BC
 の長さは任意である。このとき、台形の面積
 S の最大値を求めよ。



$$\angle ABC = \theta \quad \text{とおく}$$

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{としてよい。}$$

$$BC = a \cos \theta + a + a \cos \theta$$

$$= a(1 + 2 \cos \theta)$$

$$(\text{高さ}) = a \sin \theta$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \{ a + a(1 + 2 \cos \theta) \} a \sin \theta$$

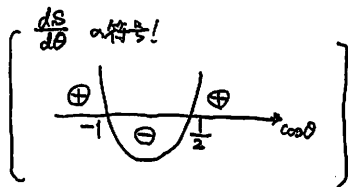
$$= a^2 (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\frac{dS}{d\theta} = a^2 \{ (-\sin \theta) \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta \}$$

$$= a^2 (-\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= a^2 (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

$$= a^2 (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$



θ	$(0) \quad \dots \quad \frac{\pi}{3} \quad \dots \quad \frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$	$\quad + \quad 0 \quad - \quad$
S	$(0) \quad \nearrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \searrow \quad a^2$

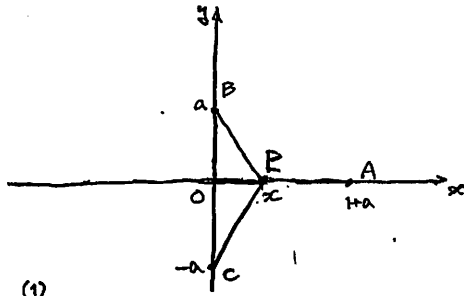
∴

$$\underline{\underline{\text{Max } S = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \quad (\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき})}}$$

a を正の定数とし、平面上に3点 $A(1+a, 0)$, $B(0, a)$, $C(0, -a)$ を与える。さらに、 x 軸上の点 $P(x, 0)$ ($x \leq 1+a$) を考え、関数 $f(x)$ を $f(x) = PA + PB + PC$ と定義する。

(1) $f(x)$ の最小値を a で表せ。

(2) $f(x)$ を最小にする点 P と三角形 ABC の重心が一致するような a の値を求めよ。



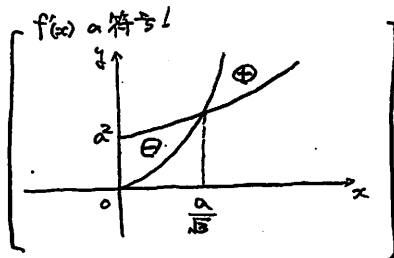
(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= PA + PB + PC \\ &= (1+a-x) + \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{x^2+a^2} \\ &= 2\sqrt{x^2+a^2} - x + a + 1 \\ f'(x) &= \frac{2 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} - 1 \\ &= \frac{2x - \sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} \end{aligned}$$

ここで

$$0 \leq x \leq 1+a \quad \text{としてもよい}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4x^2} - \sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$



x	0	...	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	...	$1+a$
$f'(x)$	-		0	+	
$f(x)$			↘	↗	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) &= 2\sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} - \frac{a}{\sqrt{3}} + a + 1 \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}a - \frac{a}{\sqrt{3}} + a + 1 \\ &= \sqrt{3}a + a + 1 \\ &= (\sqrt{3}+1)a + 1 \end{aligned}$$

よって

$$\min f(x) = (\sqrt{3}+1)a + 1 \quad \left(x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad a \geq 0\right)$$

(2)

(1) より

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

であり、

$$\triangle ABC \text{ の重心 } \left(\frac{1+a}{3}, 0\right)$$

が一致するとき

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1+a}{3}$$

より

$$\sqrt{3}a = 1+a$$

$$(\sqrt{3}-1)a = 1$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{よって } a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{2a(\sin x + \cos x)}{2 + 2\sin x \cos x - a(\sin x + \cos x)}$$

と定める。ここで、 a は $0 < a < 2$ を満たす定数である。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおくと、関数 $f(x)$ を t を用いて表せ。
 (2) (1) で求めた関数を $g(t)$ とするとき、関数 $g(t)$ の最大値と最小値を求めよ。
 (3) 関数 $f(x)$ が最大値、最小値をとるときのそれぞれの x の値を求めよ。

(1)

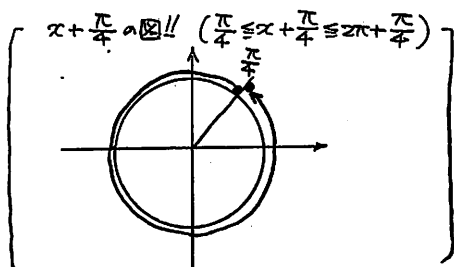
$$\begin{cases} t = \sin x + \cos x \\ t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \\ \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2a(\sin x + \cos x)}{2 + 2\sin x \cos x - a(\sin x + \cos x)} \\ &= \frac{2at}{2 + (t^2 - 1) - at} \\ &= \frac{2at}{t^2 - at + 1} \end{aligned}$$

(2)

$$t = \sin x + \cos x$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$g(t) = \frac{2at}{t^2 - at + 1}$$

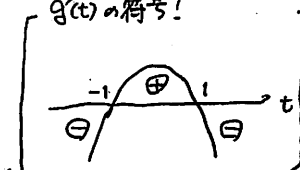
$$g'(t) = \frac{2a(t^2 - at + 1) - 2at(2t - a)}{(t^2 - at + 1)^2}$$

$$= \frac{-2at^2 + 2a}{(t^2 - at + 1)^2}$$

$$= \frac{-2a(t-1)(t+1)}{(t^2 - at + 1)^2}$$

$$\begin{cases} \therefore t^2 - at + 1 = 0 \\ \text{の判別式 } D = a^2 - 4 \\ = (a+2)(a-2) < 0 \\ \text{より、実数解をもたない。} \end{cases}$$

$g(t)$ の符号!



t	$-\sqrt{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{2}$
$g(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$g'(t)$	$\frac{2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a}$		$\frac{-2a}{2+a}$		$\frac{2a}{2-a}$		$\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$

$\therefore$

$$\begin{cases} g(-\sqrt{2}) < 0 & \text{かつ } g(1) > 0 \\ g(-1) < 0 & \text{かつ } g(\sqrt{2}) > 0 \end{cases}$$

よ)

$$\begin{cases} \text{Max } g(t) = \frac{2a}{2-a} & (t=1 \text{ とき}) \\ \text{min } g(t) = \frac{-2a}{2+a} & (t=-1 \text{ とき}) \end{cases}$$

(3)

$$t=1 \text{ とき}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$$

$$t=-1 \text{ とき}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$x = \pi, \frac{3}{2}\pi$$

$\therefore$

$$\begin{cases} \text{Max } \text{のとき } x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \\ \text{min } \text{のとき } x = \pi, \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

曲線 $C: y = \sin x$ 上を点 $P(t, \sin t)$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) が動く。正の実数 r に対して、 P における C の接線上に $PQ = r$ となるように点 Q をとる。ただし、 Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1) Q の座標を求めよ。

(2) $t = \frac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。

(1)

接点 $P(t, \sin t)$

$$y' = \cos x$$

$$y'(x=t) = \cos t$$

接線: $y - \sin t = (\cos t)(x - t)$

$$y = (\cos t)x - t \cos t + \sin t$$

$$Q(s, (\cos t)s - t \cos t + \sin t) \quad (s > t)$$

よって

$$PQ = r \quad \text{より}$$

$$PQ^2 = r^2$$

$$(s-t)^2 + ((\cos t)s - t \cos t)^2 = r^2$$

$$(1 + \cos^2 t)(s-t)^2 = r^2$$

$$(s-t)^2 = \frac{r^2}{1 + \cos^2 t}$$

$$s > t \quad \text{より}$$

$$s-t = \frac{r}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}$$

$$\text{よって} \quad s = \frac{r}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} + t$$

よって

$$(\cos t)s - t \cos t + \sin t$$

$$= \frac{r \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} + t \cos t - t \cos t + \sin t$$

$$= \frac{r \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} + \sin t$$

よって

$$Q\left(\frac{r}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} + t, \frac{r \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} + \sin t\right)$$

(2)

$$f(t) = \frac{r \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} + \sin t$$

よって

$$f'(t) = \frac{-r \sin t \sqrt{1 + \cos^2 t} - r \cos t \cdot \frac{2 \cos t \sin t}{2 \sqrt{1 + \cos^2 t}}}{1 + \cos^2 t} + \cos t$$

$$= \frac{-r \sin t (1 + \cos^2 t) + r \cos^2 t \sin t}{(1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t}} + \cos t$$

$$= \frac{-r \sin t}{(1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t}} + \cos t$$

$t = \frac{\pi}{4}$ で最大 となるには

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{が必要 であり}$$

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}r = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{3\sqrt{6}}{4} \quad (\text{必要})$$

よって

$$f'(t) = \frac{-\frac{3\sqrt{6}}{4} \sin t}{(1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t}} + \cos t$$

$$= \frac{4 \cos t (1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t} - 3\sqrt{6} \sin t}{4(1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t}}$$

よって

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき}$$

$4 \cos t (1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t}$ は単調減少

$3\sqrt{6} \sin t$ は単調増加

よって

$$4 \cos t (1 + \cos^2 t) \sqrt{1 + \cos^2 t} - 3\sqrt{6} \sin t$$

は単調減少 する。

$$\text{また、} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{より}$$

t	$0 \cdots \frac{\pi}{4} \cdots \frac{\pi}{2}$
$f(t)$	$+$ 0 $-$
$f'(t)$	$\nearrow$ $\searrow$

よって $t = \frac{\pi}{4}$ で最大 となる

$$\text{よって} \quad r = \frac{3\sqrt{6}}{4} \quad (\text{十分})$$

- (1) $x \geq 1$ における関数 $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) (1) の結果を利用して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を示せ。
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}$ を求めよ。

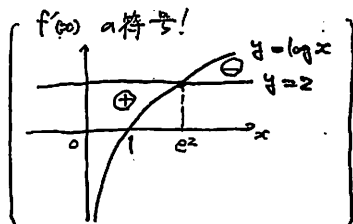
(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - (\log x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$

$x \geq 1$ において



x	1	...	e^2	...	(∞)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		$\nearrow \frac{2}{e}$		$\searrow (0)$

∴

$$g(x) = \frac{1}{x} - \log x \quad x < e$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$$

∴ $g(x)$ は減少関数 であり

$$g(x) \geq g(1) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \log x > 0$$

$$\log x < \frac{1}{x}$$

$$0 < \frac{\log x}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$$

∴ ハサミの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \text{Max } f(x) = \frac{2}{e} & (x = e^2 \text{ とき}) \\ \text{Min } f(x) = 0 & (x = 1 \text{ とき}) \end{cases}$$

(2) (証明)

$$(1) \text{より } x \geq 1 \text{ とき}$$

$$0 \leq \frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{e}$$

$$\therefore 0 \leq \frac{\log x}{x} \leq \frac{2}{e\sqrt{x}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e\sqrt{x}} = 0$$

∴ ハサミの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

(3) 解法1

$$\frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}} = \frac{\log(\log x)}{\log x} \times \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

∴ $x \rightarrow \infty$ とき

$$\log x \rightarrow \infty \text{ であり } (1), (2) \text{ より}$$

$$\frac{\log(\log x)}{\log x} \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\log x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}} = 0$$

解法2

$$\frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}} = \frac{\log(\log x)}{\log x} \times \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

∴ (1) より $x \geq 1$ とき

$$0 \leq \frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{e} \times \frac{\log(\log x)}{\log x}$$

∴

$$x \rightarrow \infty \text{ とき } \log x \rightarrow \infty \text{ であり}$$

$$(2) \text{ より } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\log x)}{\log x} = 0$$

∴ ハサミの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}} = 0$$

関数 $f(x) = \frac{x}{x^2+ax+1}$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め、そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x) = \frac{x}{x^2+ax+1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+ax+1) - x(2x+a)}{(x^2+ax+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+ax+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+ax+1)^2}$$

$f(x)$ の符号!



$$\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \right)$$

$f(x)$ が最大値と最小値をもつためには

$$x^2+ax+1=0 \text{ が実数解をもたない}$$

ことが必要であり、

$$\text{判別式 } D < 0 \text{ より}$$

$$a^2 - 4 < 0$$

$$\textcircled{1} -2 < a < 2$$

x	$(-\infty) \dots -1 \dots 1 \dots (\infty)$
$f(x)$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$(0) \searrow \frac{-1}{a+2} \nearrow \frac{1}{a-2} \searrow (0)$

よって

$$\begin{cases} -2 < a < 2 \\ \text{Max } f(x) = \frac{1}{a+2} & (x=1 \text{ のとき}) \\ \text{min } f(x) = \frac{1}{a-2} & (x=-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

実数 a に対して、2 曲線 $C_1: y=2\log x$, $C_2: y=\log x+a$ の交点を P とする。点 P における C_1 の接線と C_2 の接線とのなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とする。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) $\tan \theta$ を a を用いて表せ。
- (3) a が実数全体を動くとき、 $\tan \theta$ のとる値の範囲を求めよ。

(1)

$$C_1 \geq C_2 \text{ より}$$

$$2\log x = \log x + a$$

$$\log x = a$$

$$x = e^a$$

$$y = 2\log e^a = 2a$$

$$\therefore P(e^a, 2a)$$

(2)

接点 $P(e^a, 2a)$

$$C_1: y = 2\log x$$

$$y' = \frac{2}{x}$$

$$y'(x=e^a) = \frac{2}{e^a}$$

$$C_2: y = \log x + a$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'(x=e^a) = \frac{1}{e^a}$$

C_1 の接線 α , C_2 の接線 β と x 軸正の向きとのなす角をそれぞれ α, β とおくと

$$\tan \alpha = \frac{2}{e^a}, \tan \beta = \frac{1}{e^a}$$

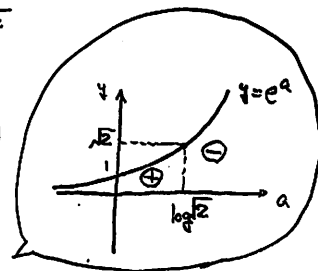
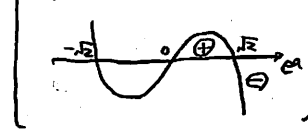
$$\theta = \alpha - \beta \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{2}{e^a} - \frac{1}{e^a}}{1 + \frac{2}{e^a} \cdot \frac{1}{e^a}} \\ &= \frac{e^a}{e^{2a} + 2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \tan \theta &= \frac{e^a(e^{2a}+2) - e^a \cdot 2e^{2a}}{(e^{2a}+2)^2} \\ &= \frac{e^a(2-e^{2a})}{(e^{2a}+2)^2} \end{aligned}$$

$\frac{d}{da} \tan \theta$ の符号!



a	$(-\infty) \cdots \log \sqrt{2} \cdots (\infty)$
$\frac{d}{da} \tan \theta$	$+ \quad 0 \quad -$
$\tan \theta$	$(0) \nearrow \frac{\sqrt{2}}{4} \searrow (0)$

$$a = \log \sqrt{2} \text{ とき}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{e^{\log \sqrt{2}}}{e^{2\log \sqrt{2}} + 2} = \frac{e^{\log \sqrt{2}}}{e^{\log 2} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tan \theta = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^a}}{1 + \frac{1}{e^{2a}}} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \tan \theta = 0$$

よって

$$0 < \tan \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x+y=c$ を満たすとき、

$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})$ の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たすとき、

$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{4}{3z})$ の最大値を求めよ。

(1)

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y}$$

$$= \frac{x^2y + x + y + 1}{xy}$$

$$= \frac{x^2y + c + 1}{xy}$$

$$= 1 + \frac{c+1}{xy}$$

ここで $x > 0$ かつ $y > 0$ なのを

(相加) $\geq$ (相乗)

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{c}{2} \geq \sqrt{xy}$$

両辺 > 0 にも正なので

$$\frac{c^2}{4} \geq xy$$

$$\frac{1}{xy} \leq \frac{4}{c^2}$$

$$\frac{c+1}{xy} \leq \frac{4(c+1)}{c^2}$$

$$1 + \frac{c+1}{xy} \leq 1 + \frac{4c+4}{c^2}$$

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) \geq (\frac{c+2}{c})^2$$

等号成立は

$$x=y \quad \text{かつ} \quad \sqrt{xy} = \frac{c}{2}$$

つまり

$$x=y=\frac{c}{2} \quad \text{の時}$$

よって

$$\underline{\underline{\text{最小値 } (\frac{c+2}{c})^2 \quad (x=y=\frac{c}{2} \text{ の時)}}$$

(2)

$z=t \quad (0 < t < 1)$ で固定すると

$$x+y=1-t > 0$$

であり、(1) で $c=1-t$ とおくと

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) \geq (\frac{3-t}{1-t})^2$$

ここで

$$0 < 3t < 3 \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{3t} > \frac{1}{3}$$

$$-\frac{4}{3t} < -\frac{4}{3}$$

$$1 - \frac{4}{3t} < -\frac{1}{3}$$

よって

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1-\frac{4}{3t}) \leq (\frac{3-t}{1-t})^2 \cdot (1-\frac{4}{3t})$$

そこで

$$f(t) = (\frac{3-t}{1-t})^2 (1-\frac{4}{3t})$$

$$= (1+\frac{2}{1-t})^2 (1-\frac{4}{3t})$$

とおくと

$$f'(t) = 2(1+\frac{2}{1-t}) \cdot (-\frac{2}{(1-t)^2}) (1-\frac{4}{3t}) + (1+\frac{2}{1-t})^2 \cdot (\frac{4}{3t^2})$$

$$= 2 \cdot \frac{3-t}{1-t} \cdot \frac{2}{(1-t)^2} \cdot \frac{3t-4}{3t} + \frac{(3-t)^2}{(1-t)^2} \cdot \frac{4}{3t^2}$$

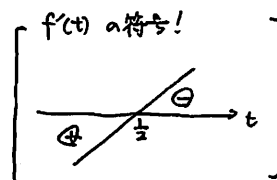
$$= \frac{4(3-t)(3t-4)t}{3(1-t)^3 t^2} + \frac{4(3-t)^2(1-t)}{3(1-t)^3 t^2}$$

$$= \frac{4(3-t)}{3(1-t)^3 t^2} \cdot \{(3t^2-4t) + (3-4t+t^2)\}$$

$$= \frac{4(3-t)(4t^2-8t+3)}{3(1-t)^3 t^2}$$

$$= \frac{4(3-t)(2t-3)(2t-1)}{3(1-t)^3 t^2}$$

$0 < t < 1$ より



t	(0) ... 1/2 ... (1)
f'(t)	+ 0 -
f(t)	↗ ↘

$$f(\frac{1}{2}) = (1+4)^2 (1-\frac{8}{3})$$

$$= 25 \times (-\frac{5}{3})$$

$$= -\frac{125}{3}$$

よって

$$\underline{\underline{\text{最大値 } -\frac{125}{3} \quad ((x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \text{ の時)}}$$