

a を実数として、方程式 $2x^3 - 3ax^2 + 8 = 0$ が $0 \leq x \leq 3$ の範囲に少なくとも1個の実数解をもつように、 a の範囲を定めよ。

$$2x^3 - 3ax^2 + 8 = 0$$

よ

$$2x^3 + 8 = 3ax^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \text{と仮定すると} \\ 8=0 \quad \text{となり不合理} \end{array} \right]$$

$x \neq 0$ よ

$$\frac{2x^3 + 8}{3x^2} = a$$

よ $0 < x \leq 3$ に少なくとも1個の実数解をもつとよ

$$y = \frac{2x^3 + 8}{3x^2} \quad \text{と} \quad y = a \quad \text{のグラフを}$$

$0 < x \leq 3$ で共有点をもつとよ

$$f(x) = \frac{2x^3 + 8}{3x^2}$$

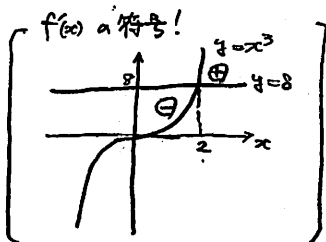
よ

$$f'(x) = \frac{6x^2 \cdot 3x^2 - (2x^3 + 8) \cdot 6x}{9x^4}$$

$$= \frac{6x^4 - 48x}{9x^4}$$

$$= \frac{6(x^3 - 8)}{9x^3}$$

$$= \frac{2(x^3 - 8)}{3x^3}$$



x	$(0) \dots 2 \dots 3$
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$(\infty) \searrow 2 \nearrow \frac{6x}{27}$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty \right)$$

よ

$$\underline{a \geq 2}$$

多項式 $f(x)$ について、 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとき
 $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ であることを証明せよ。

(証明)

$f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割れた商 $g(x)$ とおくと

$$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$$

とでき

$$f'(x) = 2(x-\alpha)g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x)$$

より

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \quad \text{が成り立つ。} \quad \blacksquare$$

x に関する方程式 $(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし、 a は定数であり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ とする。

$$(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$$

$$\text{よ) } a = -(x^2+2x-2)e^{-x}$$

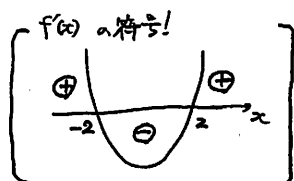
$$y=a \text{ と } y=-(x^2+2x-2)e^{-x}$$

のグラフの共有点の個数を調べるよ。

$$f(x) = -(x^2+2x-2)e^{-x}$$

とおく

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(2x+2)e^{-x} - (x^2+2x-2)(-e^{-x}) \\ &= (x^2-4)e^{-x} \end{aligned}$$



x	$(-\infty)$	$\dots$	-2	$\dots$	2	$\dots$	(∞)
$f'(x)$			+	0	-	0	+
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$2e^2$	$\searrow$	$-\frac{6}{e^2}$	$\nearrow$	(0)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2-2x+2}{e^x}$$

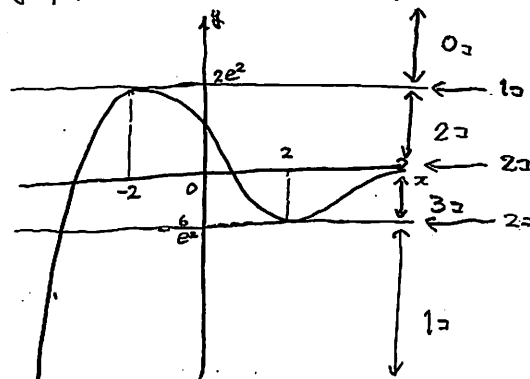
ここで、十分大なる x に対して、

$$\begin{aligned} 0 < x < x^2 & \text{ よ) } \\ 0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x^2}{e^x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 & \text{ 故に } \\ \text{ハサミウチの原理 より} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) e^{-x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$y=f(x)$ のグラフの概形は下图の通り



よ、

$$\begin{cases} a > 2e^2 & a \neq 0 & 0 \\ a = 2e^2, a < -\frac{6}{e^2} & a \neq 1 & 1 \\ 0 \leq a < 2e^2, a = -\frac{6}{e^2} & a \neq 2 & 2 \\ -\frac{6}{e^2} < a < 0 & a \neq 3 & 3 \end{cases}$$

a, b を実数とする。 $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - ax^2$ とし、 x についての方程式 $f(x) = b$ を考える。

(1) $a > 0$ のとき、関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

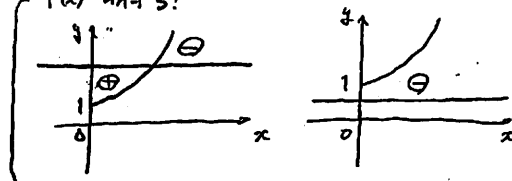
(2) 方程式 $f(x) = b$ の異なる実数解の個数が最も多くなる時の点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(i) $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - ax^2$ は偶関数なので

$x \geq 0$ のときを調べるとよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 2ax \\ &= \frac{2x - 2ax\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x(1 - a\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2ax(\frac{1}{a^2} - \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号!



$$\begin{pmatrix} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} \quad a \neq 0 \\ x^2 = \frac{1-a^2}{a^2} \\ x = \pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad (0 < a \leq 1) \end{pmatrix}$$

(i) $0 < a < 1$ のとき

x	0	...	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	...	(∞)
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	2	/	$a + \frac{1}{a}$	\	$(-\infty)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) &= 2\sqrt{\frac{1}{a^2}} - a \cdot \frac{1-a^2}{a^2} \\ &= \frac{2}{a} - \frac{1-a^2}{a} \\ &= \frac{a^2+1}{a} \end{aligned}$$

よって

$$\text{Max } f(x) = a + \frac{1}{a} \quad \left(x = \pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \text{ のとき}\right)$$

(ii) $a \geq 1$ のとき

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{となり}$$

$f(x)$ は減少関数

$$\text{よって } f(x) \leq f(0) = 2$$

つまり

$$\text{Max } f(x) = 2 \quad (x=0 \text{ のとき})$$

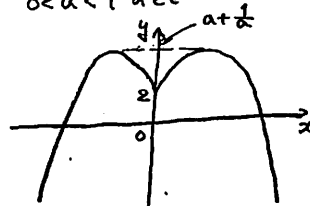
(i), (ii) より

$$\text{Max } f(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{a} & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

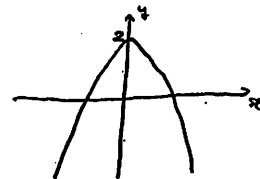
(2)

$y = f(x)$ のグラフは

$0 < a < 1$ のとき



$a \geq 1$ のとき



であり、

$y = f(x)$ と $y = b$ のグラフの共有点の個数が最大になるとよいので

$$0 < a < 1 \quad \text{かつ} \quad 2 < b < a + \frac{1}{a}$$

を満たすとよい。

そこで

$$g(a) = a + \frac{1}{a}$$

とおく

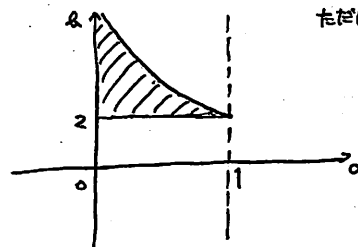
$$g'(a) = 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2} = \frac{(a-1)(a+1)}{a^2} < 0$$

よって $g(a)$ は減少関数。

$$\begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} g(a) = \infty \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

求める (a, b) の範囲は図の斜線部

ただし、境界を含まない。



$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0) \text{ とする。}$$

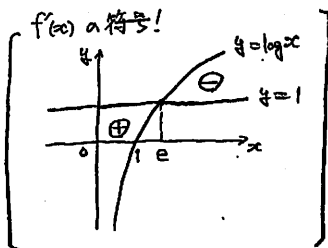
- (1) $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (2) $y=f(x)$ のグラフをかき、方程式 $f(x)=k$ が2つの異なる解をもつような定数 k の範囲を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ は用いてよい。
- (3) a を正の定数とする。方程式 $x^a=a^x \quad (x>0)$ が a より大きい解をもつような a の範囲を求めよ。

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$



x	$(0) \cdots e \cdots (\infty)$
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$\nearrow \quad \frac{1}{e} \quad \searrow$

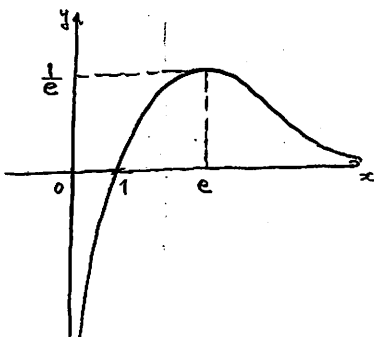
極大値 $\frac{1}{e}$ ($x=e$ のとき)
 極小値 なし

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

と(1)の増減表から、

$y=f(x)$ のグラフは下図の通り!



$f(x)=k$ が2つの異なる解をもつとき、

$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフが2つの
 共有点をもつとき

$$0 < k < \frac{1}{e}$$

(3)

$$x^a = a^x \quad \text{より}$$

$$\log x^a = \log a^x$$

$$a \log x = x \log a$$

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a}$$

$$f(x) = f(a)$$

$x=a$ は1つの解であるから

a より大きい解をもつためには

(2) より

$$1 < a < e$$

$y=x^2$ で表される放物線を C , 正の数 a に対して $y=ae^x$ で表される曲線を C_a とする。

(1) C と C_a の両方に接する直線の本数を調べよ。ただし、必要ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \text{ であることを用いてもよい。}$$

(2) C と C_a の両方に接する直線がちょうど1本であるとき、 C と C_a の共有点がちょうど2点となることを示せ。

(1) C_a について

接点 (t, ae^t) とおくと

$$y' = ae^x$$

$$y'(x=t) = ae^t$$

$$\text{接線: } y - ae^t = ae^t(x - t)$$

$$y = ae^t x + ae^t(1-t)$$

これは $C: y=x^2$ と連立して

$$x^2 - ae^t x + a(t-1)e^t = 0$$

この方程式が重解をもつとき判別式 $D=0$ より

$$a^2 e^{2t} - 4a(t-1)e^t = 0$$

$ae^t \neq 0$ より

$$ae^t = 4(t-1)$$

$$a = \frac{4(t-1)}{e^t}$$

$$y=a \text{ と } y = \frac{4(t-1)}{e^t} \text{ のグラフを}$$

共有点を調べるとよく

$$f(t) = \frac{4(t-1)}{e^t} \text{ とおくと}$$

$$f(t) = \frac{4e^t - 4(t-1)e^t}{e^{2t}}$$

$$= \frac{8-4t}{e^t}$$

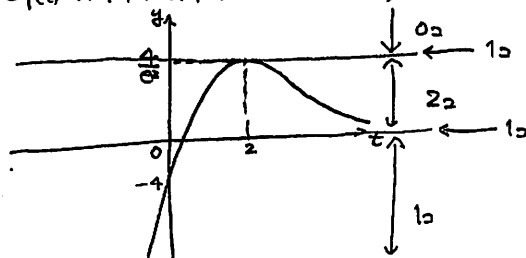
$$= \frac{4(2-t)}{e^t}$$

$$\left[\begin{array}{c} f(t) \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right]$$

t	$(-\infty) \dots 2 \dots (\infty)$
$f(t)$	$+$ 0 $-$
$f(t)$	$(\infty) \nearrow \frac{4}{e^2} \searrow (0)$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(4 \frac{t}{e^t} - \frac{4}{e^t} \right) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty \end{array} \right)$$

$y=f(t)$ のグラフの概形は下図へ通!



よって $a > 0$ のとき

$$\begin{cases} a > \frac{4}{e^2} & a \text{ のとき } 0 \text{ 本} \\ a = \frac{4}{e^2} & 1 \text{ 本} \\ 0 < a < \frac{4}{e^2} & a \text{ のとき } 2 \text{ 本} \end{cases}$$

(2) (証明)

(1) より $a = \frac{4}{e^2}$ のときを考える

$$ae^x = x^2 \text{ より}$$

$$a = \frac{x^2}{e^x}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{e^x} \text{ とおくと}$$

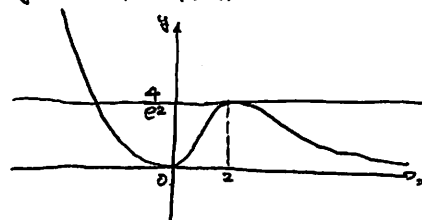
$$g'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{x(2-x)}{e^x}$$

$$\left[\begin{array}{c} g(x) \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right]$$

x	$(-\infty) \dots 0 \dots 2 \dots (\infty)$
$g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
$g(x)$	$(\infty) \searrow 0 \nearrow \frac{4}{e^2} \searrow (0)$

$y=g(x)$ のグラフの概形は下図へ通!



このとき $y=g(x)$ と $y=a$ は異なる2つの共有点をもつので

C と C_a の共有点はちょうど2点である。

直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点をもたないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ。

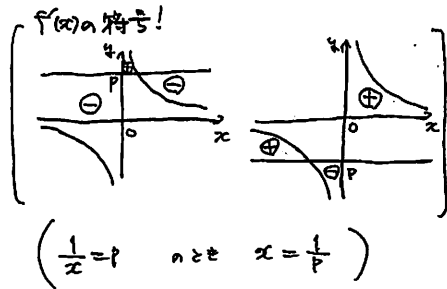
$$px + q = \log x \quad (x > 0)$$

$$q = \log x - px$$

$$f(x) = \log x - px$$

とすると

$$f'(x) = \frac{1}{x} - p$$



(i) $p > 0$ のとき.

x	$(0) \quad \dots \quad \frac{1}{p} \quad \dots \quad (\infty)$
$f(x)$	$\quad \quad \quad + \quad 0 \quad - \quad$
$f(x)$	$(-\infty) \quad \nearrow \quad -\log p - 1 \quad \searrow \quad (-\infty)$

$y = f(x)$ と $y = q$ のグラフは

共有点をもたないためには

$$q > -\log p - 1.$$

(ii) $p = 0$ のとき.

$$q = \log x$$

$y = \log x$ と $y = q$ のグラフは

共有点をもたないことは起こりえない。

(iii) $p < 0$ のとき.

x	$(0) \quad \dots \quad (\infty)$
$f(x)$	$\quad \quad \quad + \quad$
$f(x)$	$(-\infty) \quad \nearrow \quad (\infty)$

$y = f(x)$ と $y = q$ のグラフは

必ず共有点をもつので不合理

(i) ~ (iii) より

$$\underline{p > 0 \quad \text{かつ} \quad q > -\log p - 1}$$

- (1) 関数 $f(x) = x^{-2} 2^x$ ($x \neq 0$) について, $f'(x) > 0$ となるための x に関する条件を求めよ。
 (2) 方程式 $2^x = x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。
 (3) 方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

(1)

$$f(x) = x^{-2} \cdot 2^x$$

$$f'(x) = -2x^{-3} \cdot 2^x + x^{-2} \cdot 2^x \log 2$$

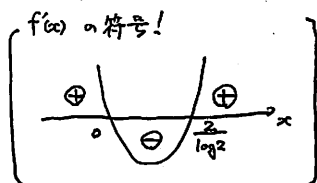
$$= \frac{2^x}{x^3} (-2 + x \log 2)$$

$$= \frac{2^x}{x^4} x (x \log 2 - 2) > 0$$

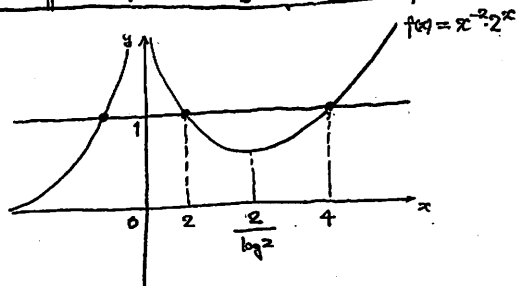
よ)

$$x < 0, \quad \frac{2}{\log 2} < x$$

(2) (証明)



x	$(-\infty)$	$\dots$	(0)	$\dots$	$\frac{2}{\log 2}$	$\dots$	(∞)
$f(x)$			+	0	-	0	+
$f'(x)$	(0)	$\nearrow$	(∞)	$\searrow$	$\nearrow$	(∞)	



よて

$f(x) = 1$ は 相異なる 3 個の実数解をもつ

$$\text{ここで } x^{-2} 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = x^2 \quad (x \neq 0)$$

なので

$2^x = x^2$ は 相異なる 3 個の実数解をもつ。

(3)

(2) から $x=2, 4$ は 有理数解 である。

もう 1 つの実数解 α として。

α が有理数 と仮定すると

$$\alpha = -\frac{q}{p} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とてき。

$$2^{-\frac{q}{p}} = \left(-\frac{q}{p}\right)^2$$

よ)

$$p^2 = 2^{\frac{q}{p}} q^2$$

$$p^{2p} = 2^q q^{2p}$$

p と q は互いに素なので

$$q=1$$

であり, このとき

$$p^{2p} = 2$$

これを満たす $p \in \mathbb{N}$ は存在しないので矛盾。

よて α は無理数 である,

よて)

有理数解 は $\underline{x=2, 4}$

a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、方程式 $x(1 - \cos x) = \sin(x+a)$ を考える。

- (1) n を正の整数とすると、上の方程式は $2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲でただ1つの解をもつことを示せ。
- (2) (1)の解を x_n とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2n\pi)$ を求めよ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (x_n - 2n\pi)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いてよい。

(1) (証明)

$$f(x) = x(1 - \cos x) - \sin(x+a)$$

とおく

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (1 - \cos x) + x \cdot \sin x - \cos(x+a) \\ &= x \sin x - \cos x - \cos(x+a) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sin x + x \cos x + \sin x + \sin(x+a) \\ &= 2 \sin x + x \cos x + \sin(x+a) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } 2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

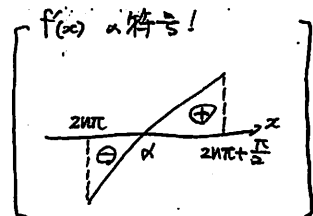
$$2 \sin x > 0, x \cos x > 0, \sin(x+a) > 0$$

より

$$f''(x) > 0$$

よって $f'(x)$ は増加関数

$$\begin{aligned} f'(2n\pi) &= 0 - 1 - \cos(2n\pi + a) + 1 \\ &= -\cos a < 0 \\ f'(2n\pi + \frac{\pi}{2}) &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \cos(2n\pi + \frac{\pi}{2} + a) + 1 \\ &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \sin a + 1 > 0 \end{aligned}$$



$$2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$f(x) = 0$ の解は $x = \alpha$ だけ。

x	$2n\pi$	$\dots$	α	$\dots$	$2n\pi + \frac{\pi}{2}$
$f(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$	$(-\sin a)$				$(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \cos a)$

$$\begin{aligned} f(2n\pi) &= 2n\pi \cdot 0 - \sin(2n\pi + a) \\ &= -\sin a < 0 \\ f(2n\pi + \frac{\pi}{2}) &= (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 - \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2} + a) \\ &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \cos a > 0 \end{aligned}$$

よって

$$2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ の範囲}$$

$f(x) = 0$ はただ1つの解をもつ。

つまり

$$x(1 - \cos x) = \sin(x+a)$$

はこの範囲にただ1つの解をもつ。

(2)

$x = x_n$ は $f(x) = 0$ を満たすので

$$x_n(1 - \cos x_n) = \sin(x_n + a) \quad \text{--- ①}$$

$$1 - \cos x_n = \frac{\sin(x_n + a)}{x_n}$$

ここで $x_n > 2n\pi$ より

$$\frac{1}{x_n} < \frac{1}{2n\pi} \text{ より } \sin(x_n + a) \leq 1$$

より

$$0 \leq 1 - \cos x_n < \frac{1}{2n\pi}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} = 0 \text{ となる}$$

(1) の夹撃の原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \cos x_n) = 0$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = 1$$

$$\text{つまり } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2n\pi$$

$$\text{① } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2n\pi) = 0$$

(3)

$$y_n = x_n - 2n\pi \text{ とおく}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } y_n \rightarrow 0$$

① より

$$(y_n + 2n\pi)(1 - \cos(y_n + 2n\pi)) = \sin(y_n + 2n\pi + a)$$

$$(y_n + 2n\pi)(1 - \cos y_n) = \sin(y_n + a)$$

$$y_n + 2n\pi = \frac{\sin(y_n + a)}{1 - \cos y_n}$$

$$y_n = \frac{\sin(y_n + a)}{2\pi(1 - \cos y_n)} - \frac{y_n}{2\pi}$$

よって

$$\sqrt{n}(x_n - 2n\pi) = \sqrt{n} y_n \text{ となる}$$

$$n y_n^2 = \frac{y_n^2 \sin(y_n + a)}{2\pi(1 - \cos y_n)} - \frac{y_n^3}{2\pi}$$

$$= \frac{\sin(y_n + a)}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1 - \cos y_n}{y_n^2}} - \frac{y_n^3}{2\pi}$$

$$\xrightarrow{y_n \rightarrow 0} \frac{\sin a}{2\pi} \times 2 = \frac{\sin a}{\pi}$$

$$\text{② } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(x_n - 2n\pi) = \sqrt{\frac{\sin a}{\pi}}$$