

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ が成り立つことを証明せよ。

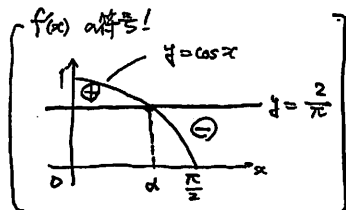
また, この式を用いて, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $\cos x \leq 1 - \frac{1}{\pi}x^2$ が成り立つことを証明せよ。

(証明)

$$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$$

とおくと

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$



$$\cos x = \frac{2}{\pi} \quad \text{を満足する } x = \alpha$$

とすると

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗		↘	0

よって

$$f(x) \geq 0$$

つまり $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ が成り立つ。 ■

(証明)

$$g(x) = 1 - \frac{1}{\pi}x^2 - \cos x$$

とすると

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x \geq 0$$

(③ (1) より)

より $g(x)$ は増加関数。

$$g(x) \geq g(0) = 0$$

よって

$$g(x) \geq 0$$

つまり

$$\cos x \leq 1 - \frac{1}{\pi}x^2 \quad \text{が成り立つ。} \quad \blacksquare$$

任意の $x > 0$ に対して $\log x < a\sqrt{x}$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

$$\log x < a\sqrt{x}$$

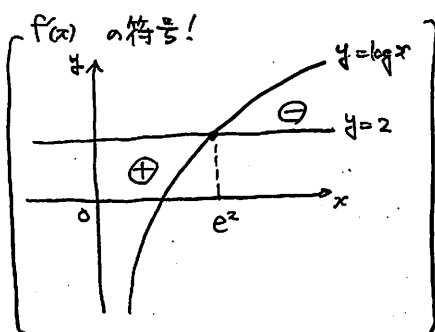
$$\text{すなわち } \frac{\log x}{\sqrt{x}} < a$$

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

とおくと

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - (\log x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$



x	$(0) \dots e^2 \dots$
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f'(x)$	$\nearrow \quad \frac{2}{e} \quad \searrow$

$$\text{すなわち } \underline{\underline{a > \frac{2}{e}}}$$

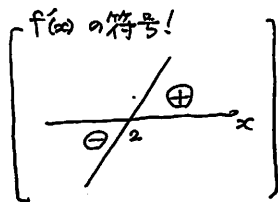
- (1) $x \geq 1$ において、 $x > 2 \log x$ が成り立つことを示せ。ただし、 e を自然対数の底とすると、 $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。
- (2) 自然数 n に対して、 $(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$ が成り立つことを示せ。

(1) (証明)

$$f(x) = x - 2 \log x$$

とおく。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2}{x} \\ &= \frac{x-2}{x} \end{aligned}$$



x	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

よって

$$\begin{aligned} &2 - 2 \log 2 \\ &= 2(\log e - \log 2) > 0 \end{aligned}$$

より

$$f(x) > 0$$

つまり

$$\begin{aligned} &x \geq 1 \text{ のとき} \\ &x > 2 \log x \text{ が成り立つ。} \end{aligned}$$

(2) (証明)

(1) より $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$2 \log n < n$$

が成り立ち

$$2n \log n < n^2$$

$$(2n \log n)^n < n^{2n} = e^{\log n^{2n}}$$

よって

$$(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$$

が成り立つ。

次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

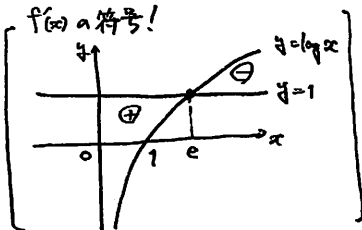
- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ について、極値を調べ、 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。
- (2) $e^\pi > \pi^e$ を示せ。
- (3) $e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$ を示せ。

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2}$$

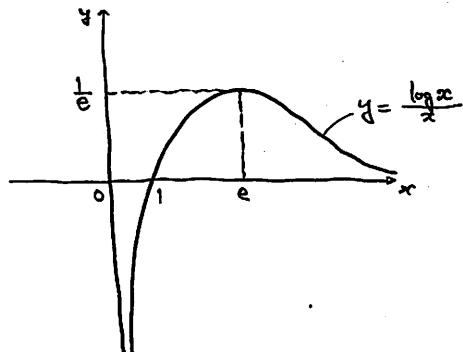
$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$



x	$(0) \dots e \dots (\infty)$
$f(x)$	$(-\infty) + 0 - (0)$
$f'(x)$	$(-\infty) \nearrow \frac{1}{e} \searrow (0)$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{array} \right)$$

よって $y=f(x)$ のグラフの概形は下図の通り



(2) (証明)

(1) よし $x \geq e$ のとき

$f(x)$ は減少関数 であり、

$$e < \pi \quad \text{より}$$

$$f(e) > f(\pi)$$

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$$

$$\pi \log e > e \log \pi$$

$$\log e^\pi > \log \pi^e$$

$$\text{つまり } e^\pi > \pi^e \quad \text{が成り立つ。}$$

(3) (証明)

$$\pi < 4 \quad \text{より } \sqrt{e} < \sqrt{\pi} < 2 < e.$$

が成り立ち、

(1) よし $x \leq e$ のとき

$f(x)$ は増加関数 であり、

$$\sqrt{e} < \sqrt{\pi} \quad \text{より}$$

$$f(\sqrt{e}) < f(\sqrt{\pi})$$

$$\frac{\log \sqrt{e}}{\sqrt{e}} < \frac{\log \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\log e}{2\sqrt{e}} < \frac{\log \pi}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\sqrt{\pi} \log e < \sqrt{e} \log \pi$$

$$\log e^{\sqrt{\pi}} < \log \pi^{\sqrt{e}}$$

つまり

$$e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}} \quad \text{が成り立つ。}$$

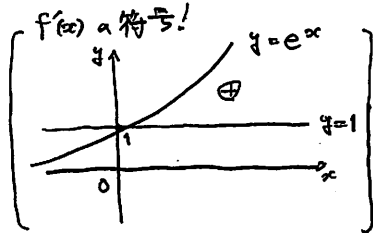
(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $1-x \leq e^{-x}$ を示せ.(2) n 人 ($n \geq 3$) の選手の中からくじ引きで2人の選手を選び, 1回の試合を行う. このようにして試合を n 回行うとき, 同じ選手同士の試合が一度も起こらない確率は $\frac{1}{e}$ より小さいことを証明せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(1) (証明)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} - (1-x) \\ &= e^{-x} + x - 1 \end{aligned}$$

とおく

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + 1 \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x} \end{aligned}$$

 $x \geq 0$ のとき $f'(x) \geq 0$ となる $f(x)$ は増加関数

$$f(x) \geq f(0) = 0$$

よって

 $x \geq 0$ のとき

$$1-x \leq e^{-x} \quad \text{が成り立つ.}$$

(2) (証明)

求める確率 P_n は

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{nC_2}\right) \left(1 - \frac{2}{nC_2}\right) \left(1 - \frac{3}{nC_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{nC_2}\right)$$

であり, (1) より

$$\begin{aligned} P_n &\leq e^{-\frac{1}{nC_2}} \times e^{-\frac{2}{nC_2}} \times e^{-\frac{3}{nC_2}} \times \cdots \times e^{-\frac{n-1}{nC_2}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{nC_2}}} \times \frac{1}{e^{\frac{2}{nC_2}}} \times \frac{1}{e^{\frac{3}{nC_2}}} \times \cdots \times \frac{1}{e^{\frac{n-1}{nC_2}}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{nC_2} + \frac{2}{nC_2} + \frac{3}{nC_2} + \cdots + \frac{n-1}{nC_2}}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{nC_2} (1+2+3+\cdots+(n-1))}} \\ &= \frac{1}{e^{\frac{1}{nC_2} \times \frac{(n-1)n}{2}}} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

等号成立は

$$\frac{1}{nC_2} = \frac{2}{nC_2} = \frac{3}{nC_2} = \cdots = \frac{n-1}{nC_2} = 0$$

 n ときであるが, そのような $n \in \mathbb{N}$ は存在しない

よって

$$P_n < \frac{1}{e} \quad \text{が成り立つ.}$$

- (1) $x > -1$ において, 不等式 $\log(1+x) \leq x$ が成り立つことを示せ.
 (2) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x)$ が成り立つことを示せ.
 (3) 自然数 n に対し $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ と定める.
 このとき, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

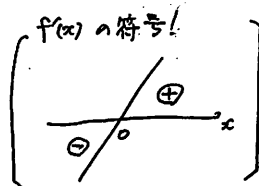
(1) (証明)

$$f(x) = x - \log(1+x)$$

とおく

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{x}{1+x}$$



x	$(-1) \cdots 0 \cdots$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$

よって

$$f(x) \geq 0$$

つまり $x > -1$ のとき

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

$$g(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \log(1+x) + \frac{x^2}{2} - x$$

とおく

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1$$

$$= \frac{1 + (x^2 - 1)}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{x+1} \geq 0$$

よって $g(x)$ は 増加関数 であり,

$$g(x) \geq g(0) = 0$$

よって $x \geq 0$ のとき

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \quad \text{が成り立つ。}$$

(3)

(1), (2) より $x \geq 0$ に対して,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x$$

が成り立つ。

$$x = \frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \frac{3}{n^2}, \dots, \frac{n}{n^2} \quad \text{を代入して}$$

辺々和をとると

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^3} \right)}_A \leq \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}}_B$$

が成り立ち

$$A = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \frac{1}{12n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{2}$$

よって, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{aligned} \because \\ \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) &= \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \log \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) + \cdots + \log \left(1 + \frac{n}{n^2} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right) \\ &= \log a_n \end{aligned} \right)$$

つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \frac{1}{2}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{e}}}$$

n を自然数とすると、すべての正の数 x に対して $\log x + \frac{a}{x^n} > 0$ が成り立つための実数 a の範囲を n を用いて表せ。

$$\log x + \frac{a}{x^n} > 0$$

$$\text{すなわち } \frac{a}{x^n} > -\log x$$

$$a > -x^n \log x$$

$$f(x) = -x^n \log x$$

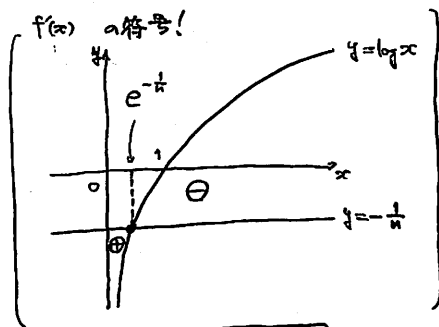
$x > 0$

$$f'(x) = -n x^{n-1} \log x - x^n \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -n x^{n-1} \log x - x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} (-n \log x - 1)$$

$$= n x^{n-1} \left(-\frac{1}{n} - \log x\right)$$



x	$(0) \dots e^{-\frac{1}{n}} \dots$
$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f'(x)$	$\nearrow \frac{1}{en} \searrow$

$$\left(\begin{aligned} f(e^{-\frac{1}{n}}) &= -(e^{-\frac{1}{n}})^n \log e^{-\frac{1}{n}} \\ &= -e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{en} \end{aligned} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{a > \frac{1}{en}}}$$

a は正の定数とする。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のすべての θ で、不等式 $k(\cos \theta + a^3 \sin \theta) \geq \sin \theta \cos \theta$ が成り立つという。そのような数 k の最小値を求めよ。

$$k(\cos \theta + a^3 \sin \theta) \geq \sin \theta \cos \theta$$

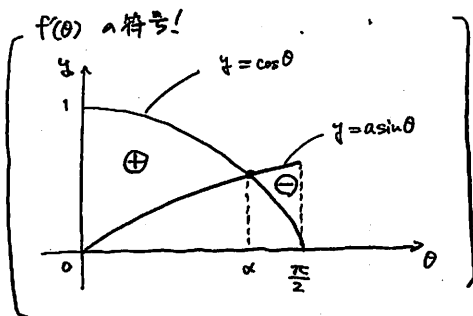
$$\left(\begin{array}{l} \because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ とき} \\ \cos \theta \geq 0 \text{ かつ } \sin \theta \geq 0 \text{ であり、} \\ \cos \theta \text{ と } \sin \theta \text{ は同時に } 0 \text{ になることは無いので} \\ \cos \theta + a^3 \sin \theta > 0 \end{array} \right)$$

$$k \geq \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + a^3 \sin \theta}$$

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + a^3 \sin \theta}$$

したがって、

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos \theta + a^3 \sin \theta) - \sin \theta \cos \theta (-\sin \theta + a^3 \cos \theta)}{(\cos \theta + a^3 \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\cos^3 \theta + a^3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta - a^3 \sin^2 \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta + a^3 \sin \theta \cos^2 \theta}{(\cos \theta + a^3 \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\cos^3 \theta - a^3 \sin^3 \theta}{(\cos \theta + a^3 \sin \theta)^2} \\ &= \frac{(\cos \theta - a \sin \theta)(\cos^2 \theta + a \cos \theta \sin \theta + a^2 \sin^2 \theta)}{(\cos \theta + a^3 \sin \theta)^2} \end{aligned}$$



$$\cos \theta = a \sin \theta \text{ を満たす角 } \alpha \text{ とし}$$

$$\cos \alpha = a \sin \alpha$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ であり、}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{a}$$

よって

$$\begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \end{array}$$

θ	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	+		0		-
$f(\theta)$			↗		↘

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + a^3 \sin \alpha} \\ &= \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{a^3}{\sqrt{a^2+1}}} \\ &= \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{\frac{a(a^2+1)}{\sqrt{a^2+1}}} \\ &= \frac{a \sqrt{a^2+1}}{(a^2+1) \cdot a(a^2+1)} \\ &= \frac{1}{(a^2+1) \sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

よって

$$\min k = (a^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$a > 1$ とし、次の不等式を考える。

$$\frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{a}} \quad \dots (*)$$

- (1) $a=2$ のとき、すべての $t > 0$ に対して不等式 (*) が成り立つことを示せ。
 (2) すべての $t > 0$ に対して不等式 (*) が成り立つような a の範囲を求めよ。

(1) (証明)

$a=2$ のとき $t > 0$ で

$$(*) \quad \frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^t - 1 \geq te^{\frac{t}{2}}$$

を示す。よ、

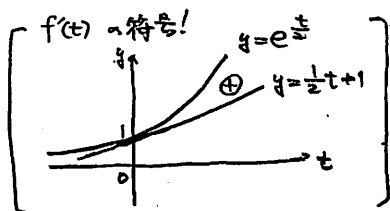
$$f(t) = e^t - 1 - te^{\frac{t}{2}}$$

とおく

$$f(t) = e^t - (1 \cdot e^{\frac{t}{2}} + t \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}})$$

$$= e^{\frac{t}{2}} (e^{\frac{t}{2}} - (\frac{1}{2}t + 1))$$

$$\left(\begin{array}{l} y = e^{\frac{t}{2}} \quad t > 0 \\ y' = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \\ y'(t=0) = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$



$$f(t) \geq 0 \quad \text{よ、}$$

$f(t)$ は増加関数 なるべ

$$f(t) > f(0) = 0$$

よ、 $t > 0$ のとき

$$e^t - 1 > te^{\frac{t}{2}}$$

つまり

$$\frac{e^t - 1}{t} > e^{\frac{t}{2}}$$

が成り立つ。

(2)

$$g(t) = e^t - 1 - te^{\frac{t}{a}}$$

とおく

$$g(t) = e^t - (1 \cdot e^{\frac{t}{a}} + t \cdot \frac{1}{a} e^{\frac{t}{a}})$$

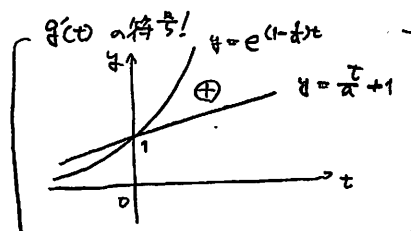
$$= e^t - (\frac{t}{a} + 1) e^{\frac{t}{a}}$$

$$= e^{\frac{t}{a}} (e^{(1-\frac{1}{a})t} - (\frac{t}{a} + 1))$$

$$\left(\begin{array}{l} y = e^{(1-\frac{1}{a})t} \quad t > 0 \\ y' = (1-\frac{1}{a}) e^{(1-\frac{1}{a})t} \\ y'(t=0) = 1 - \frac{1}{a} \end{array} \right)$$

$$\text{よ、 } 1 - \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} \quad a \geq 2.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \frac{2}{a} \leq 1 \quad \text{よ、 } a \geq 1 \\ \text{よ、 } a \geq 2. \quad \text{なるべ} \end{array} \right)$$



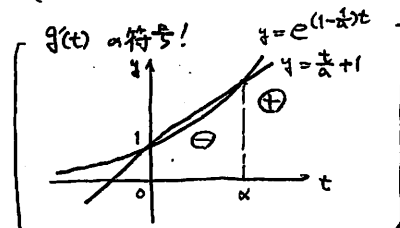
$$g(t) \geq 0 \quad \text{なるべ}$$

$g(t)$ は増加関数

$$\text{よ、 } g(t) > g(0) = 0$$

$$(ii) \quad 1 - \frac{1}{a} < \frac{1}{a} \quad a < 2.$$

$$\left(\text{i.e. } 1 < a < 2 \quad a < 2 \right)$$



$$e^{(1-\frac{1}{a})t} = \frac{t}{a} + 1 \quad \text{の解 } t = \alpha \text{ とすると}$$

t	(0)	$\dots$	α	$\dots$
$g(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

よ、常に $g(t) \geq 0$ を満たさない。

(i), (ii) よ

$$\underline{a \geq 2}$$

e を自然対数の底, すなわち $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする. すべての正の実数 x に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

(証明)

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{--- ①}$$

よ) ① を示すといふ.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - x \log \frac{x+1}{x} \\ &= 1 - x \log (x+1) + x \log x \end{aligned}$$

とおく

$$f'(x) = -\log(x+1) - \frac{x}{x+1} + \log x + 1.$$

$$= \log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - x(x+1) - 1}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - x - 1}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

よ) $f'(x)$ は 増加関数

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= 0$$

よ) $f'(x) < 0$

よ) $f(x)$ は 減少関数

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)$$

$$= 1 - \log e$$

$$= 0$$

よ) $f(x) > 0$

よ) ②

$$x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \quad \text{--- ②}$$

が成り立つ.

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) \log(x+1) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - 1$$

とおく

$$g'(x) = \log(x+1) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x+1} - \log x - \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \log(x+1) - \log x + \frac{2x+1}{2(x+1)} - \frac{2x+1}{2x}$$

$$= \log(x+1) - \log x + \left(1 - \frac{1}{2(x+1)}\right) - \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

$$= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x}$$

$$g''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{2x^2(x+1) - 2x(x+1)^2 + x^2 + (x+1)^2}{2x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + x^2 + x^2 + 2x + 1}{2x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

よ) $g'(x)$ は 増加関数

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2x}$$

$$= 0$$

よ) $g'(x) < 0$

よ) $g(x)$ は 減少関数

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

$$= \log e - 1$$

$$= 0$$

よ) $g(x) > 0$

よ) ③

$$1 < \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{--- ③}$$

が成り立つ.

②, ③ が成り立つので ① も成り立つ.

よ) ④

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad \text{が成り立つ.}$$