

k を $k \geq 0, k \neq 1$ を満たす実数として、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

で定める。ただし、関数 $f(x)$ の定義域は、 $0 \leq k < 1$ のとき $0 \leq x \leq \frac{1}{1-k}$

であり、 $k > 1$ のとき $x \geq 0$ である。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $k=0$ のとき、 $0 < k < 1$ のとき、 $1 < k$ のときのそれぞれの場合について、関数 $y=f(x)$ の増減、グラフの凹凸、座標軸との共有点を調べてグラフをかけ。

(3) $x \geq 0$ であるとき、 $\lim_{k \rightarrow 1+0} \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$ を求めよ。ここで、自然対数の底 e が $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ を満たすことを用いてよい。

(1)

$$f(x) = \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-k} \{1 - (1-k)x\}^{\frac{k}{1-k}} \cdot (-1+k) \\ &= -\{1 - (1-k)x\}^{\frac{k}{1-k}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{k}{1-k} \{1 - (1-k)x\}^{\frac{-1+k}{1-k}} \cdot (-1+k) \\ &= k \{1 - (1-k)x\}^{\frac{-1+k}{1-k}} \end{aligned}$$

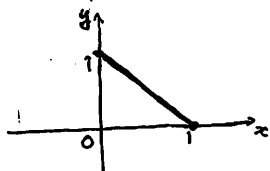
$$f(0) = 1$$

$$f(x) = 0 \quad \text{よ} \quad \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}} = 0$$

$$x = \frac{1}{1-k}$$

(i) $k=0$ のとき $0 \leq x \leq 1$

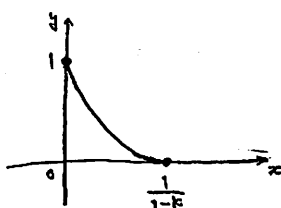
$$f(x) = 1-x$$



(ii) $0 < k < 1$ のとき $0 \leq x \leq \frac{1}{1-k}$

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{よ} \quad f''(x) \geq 0$$

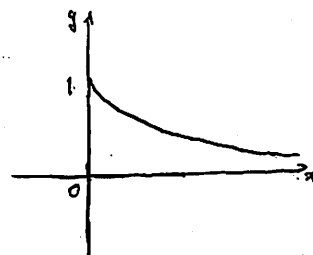
x	0	...	$\frac{1}{1-k}$
$f'(x)$	-		0
$f''(x)$	+		0
$f(x)$	1	↘	0



(iii) $1 < k$ のとき $x \geq 0$

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{よ} \quad f''(x) \geq 0$$

x	0	...	(∞)
$f'(x)$	-		
$f''(x)$	+		
$f(x)$	1	↘	0



(3)

(i) $x > 0$ のとき

$k > 1$ のとき

$$1-k = -h \quad \text{よ} \quad h < 0$$

$$k \rightarrow 1+0 \quad \text{よ} \quad h \rightarrow +0$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1+0} \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}} &= \lim_{h \rightarrow +0} (1+hx)^{-\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \left\{ (1+hx)^{\frac{1}{hx}} \right\}^{-x} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

(ii) $x=0$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1+0} \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}} &= \lim_{k \rightarrow 1+0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(i), (ii) より

$$\lim_{k \rightarrow 1+0} \{1 - (1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}} = e^{-x}$$

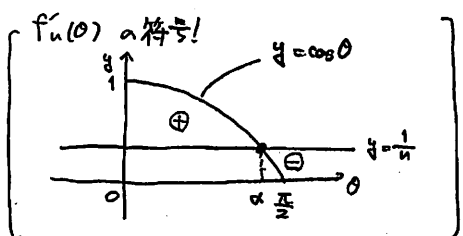
(1) n を2以上の自然数とすると、関数 $f_n(\theta) = (1 + \cos\theta) \sin^{n-1}\theta$ の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n$ を求めよ。

(1)

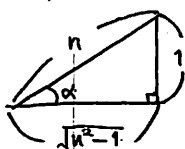
$$f_n(\theta) = (1 + \cos\theta) \sin^{n-1}\theta$$

$$\begin{aligned} f'_n(\theta) &= -\sin\theta \cdot \sin^{n-1}\theta + (1 + \cos\theta) \cdot (n-1) \sin^{n-2}\theta \cos\theta \\ &= -\sin^n\theta + (n-1)(\cos\theta + \cos^3\theta) \sin^{n-2}\theta \\ &= (-\sin^2\theta + (n-1)\cos\theta + n\cos^2\theta - \cos^2\theta) \sin^{n-2}\theta \\ &= ((n-1)\cos\theta + n\cos^2\theta - 1) \sin^{n-2}\theta \\ &= \{n(\cos^2\theta + \cos\theta) - (\cos\theta + 1)\} \sin^{n-2}\theta \\ &= (n\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) \sin^{n-2}\theta \\ &= n\left(\cos\theta - \frac{1}{n}\right)(1 + \cos\theta) \sin^{n-2}\theta \end{aligned}$$



$$\cos\theta = \frac{1}{n} \text{ の解 } \theta = \alpha \text{ とし、}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{n} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$



$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

θ	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'_n(\theta)$		+	0	-	
$f_n(\theta)$		↗		↘	

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= (1 + \cos\alpha) \sin^{n-1}\alpha \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

よって

$$M_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

(2)

$$\begin{aligned} (M_n)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left\{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left\{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}^{-\frac{n}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left\{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}^{-\frac{n}{2}} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} e \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{e}}} \end{aligned}$$

$x > 0$ とし, $f(x) = \log x^{100}$ とおく.

(1) 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

(2) 実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を $[a]$ で表す. 整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ. 必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ.

(1) (証明)

ある $x > 0$ をとると $f(x)$ は

区間 $[x, x+1]$ で連続

区間 $(x, x+1)$ で微分可能

なので, 平均値の定理より

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c) \quad \text{かつ} \quad x < c < x+1$$

なる c が存在する.

$$f(x+1) - f(x) = f'(c)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ f(x) = \log x^{100} = 100 \log x \\ \text{より} \quad f'(x) = \frac{100}{x} \end{array} \right)$$

$$f(x+1) - f(x) = \frac{100}{c}$$

$$\text{ここで} \\ (0 < c) \quad x < c < x+1 \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{100}{x+1} < \frac{100}{c} < \frac{100}{x}$$

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

つまり

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

が成り立つ.

(2)

(i) $1 \leq x \leq 99$ のとき.

$$(1) \text{ より } f(x+1) - f(x) > 1$$

このとき

$$[f(x+1)] > [f(x)]$$

が成り立つ.

(ii) $x \geq 100$ のとき

$$(1) \text{ より } f(x+1) - f(x) < 1$$

より

$$[f(x+1)] = [f(x)]$$

or

$$[f(x+1)] = [f(x)] + 1$$

——①

$$f(100) = \log 100^{100}$$

$$= \log 10^{200}$$

$$= 200 \log 10$$

$$= 200 \times 2.3026$$

$$= 460.52$$

$$\text{よ} \quad [f(100)] = 460$$

$$f(1000) = \log 1000^{100}$$

$$= \log 10^{300}$$

$$= 300 \log 10$$

$$= 300 \times 2.3026$$

$$= 690.78$$

$$\text{よ} \quad [f(1000)] = 690$$

① と合わせて.

460 ~ 690 の値をすべてとる.

(i), (ii) より

$$[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(999)],$$

$$460, 461, 462, \dots, 690$$

はすべて異なり.

$$99 + (690 - 459)$$

$$= \underline{\underline{330 \text{ (個)}}}$$

曲線 $y=e^x$ と直線 $y=ax+b$ が共有点をもたないような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - kx) = \infty$ (k は定数) および

$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明なしで用いてよい。

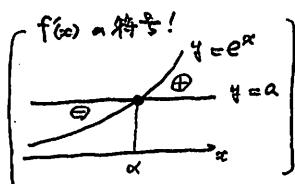
$$f(x) = e^x - (ax + b)$$

$$= e^x - ax - b$$

とすると

$$f(x) = e^x - a$$

(i) $a > 0$ のとき



$e^x = a$ の解 $x = \alpha$ とすると

x	$(-\infty) \dots \alpha \dots (\infty)$
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f'(x)$	$(\infty) \searrow \nearrow (\infty)$

$$f(x) = e^x - ax - b$$

$$= a - a \log a - b$$

$f(x) = 0$ が実数解をもたなければよいから

$$f(x) > 0 \quad \text{より}$$

$$a - a \log a - b > 0$$

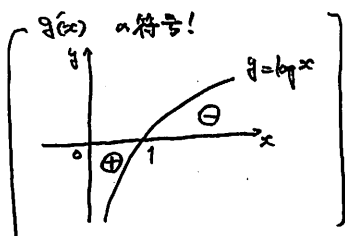
$$\therefore b < a - a \log a.$$

$$\therefore g(x) = x - x \log x \quad (x > 0)$$

とすると

$$g'(x) = 1 - 1 \log x - x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -\log x$$



x	$(0) \dots 1 \dots (\infty)$
$g(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$g'(x)$	$(0) \nearrow 1 \searrow (-\infty)$

(ii) $a = 0$ のとき

$$f(x) = e^x - b$$

$f(x) = 0$ が実数解をもたないためには

$$b \leq 0$$

(iii) $a < 0$ のとき

$$f(x) > 0 \quad \text{より}$$

$f(x)$ は増加関数。

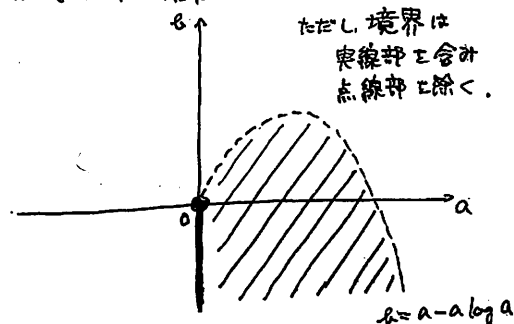
x	$(-\infty)$	$\dots$	(∞)
$f(x)$		$+$	
$f'(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	(∞)

よって $f(x) = 0$ はただ1つの実数解をもつ。

(i) ~ (iii) より

点 (a, b) の存在範囲は図の斜線部。

ただし、境界は
実線部を含み
点線部を除く。



a を実数とする。このとき、座標空間内の球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と直線 $\ell: (x, y, z) = (2, -1, 0) + t(-1, a, a)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) S と ℓ が異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が(1)で求めた範囲にあるとき、 S と ℓ の2つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。
- (3) (2)の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。

(1)

$$\ell: \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+at \\ z = at \end{cases}$$

S と連立して

$$\begin{aligned} (2-t)^2 + (-1+at)^2 + (at)^2 &= 1 \\ 4-4t+t^2+1-2at+a^2t^2+a^2t^2 &= 1 \\ (2a^2+1)t^2 + (-2a-4)t + 4 &= 0 \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

異なる2点で交わるためには
判別式 $D > 0$ となるように。

$$\begin{aligned} D/4 &= (-a-2)^2 - (2a^2+1) \cdot 4 \\ &= a^2+4a+4-8a^2-4 \\ &= -7a^2+4a > 0 \\ a(7a-4) &< 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < a < \frac{4}{7}$$

(2)

$$0 < a < \frac{4}{7} \quad a \text{ とき}$$

①の2つの解を $t = \alpha, \beta$ とし

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{2a+4}{2a^2+1}, \quad \alpha\beta = \frac{4}{2a^2+1}$$

2つの交点

$$A(2-\alpha, -1+a\alpha, a\alpha), B(2-\beta, -1+a\beta, a\beta)$$

ととき

$$\begin{aligned} d &= AB \\ &= \sqrt{(-\alpha+\beta)^2 + (a\alpha-a\beta)^2 + (a\alpha-a\beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 2a^2(\alpha-\beta)^2} \\ &= \sqrt{(2a^2+1)(\alpha-\beta)^2} \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{2a+4}{2a^2+1}\right)^2 - \frac{16}{2a^2+1} \\ &= \frac{4a^2+16a+16-32a^2-16}{(2a^2+1)^2} \\ &= \frac{-28a^2+16a}{(2a^2+1)^2} \end{aligned}$$

∴

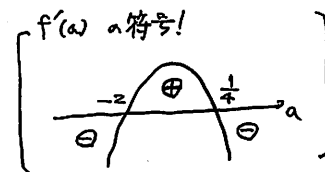
$$d = 2\sqrt{\frac{-7a^2+4a}{2a^2+1}}$$

(3)

$$f(a) = \frac{-7a^2+4a}{2a^2+1}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{(-14a+4)(2a^2+1) - (-7a^2+4a) \cdot 4a}{(2a^2+1)^2} \\ &= \frac{-28a^3+8a^2-14a+4+28a^3-16a^2}{(2a^2+1)^2} \\ &= \frac{-8a^2-14a+4}{(2a^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(4a^2+7a-2)}{(2a^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(4a-1)(a+2)}{(2a^2+1)^2} \end{aligned}$$

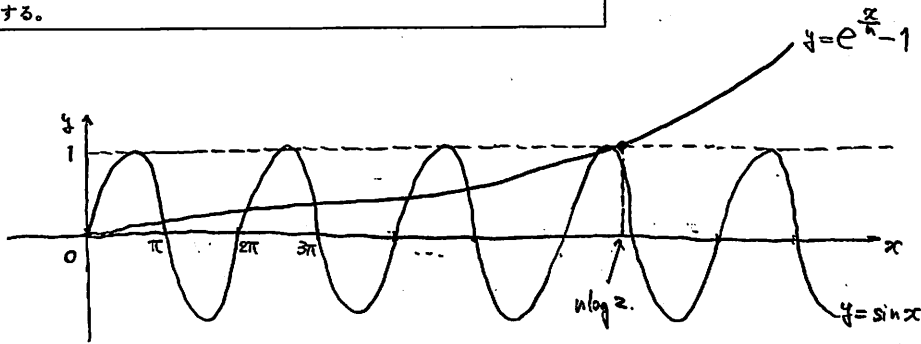


a	$(0) \dots \frac{1}{4} \dots (\frac{4}{7})$
$f'(a)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f(a)$	$\nearrow \quad \searrow$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{-\frac{7}{16}+1}{\frac{1}{8}+1} \\ &= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{9}{8}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Max } d = \sqrt{2} \quad (a = \frac{1}{4} \text{ とき})$$

n を自然数とする。等式 $\sin x = e^{\frac{x}{n}} - 1$ を満たす 0 以上の実数 x の個数を P_n で表す。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n}$ を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。



$$\left(\begin{array}{l} e^{\frac{x}{n}} - 1 = 1 \quad \text{と} \text{して} \\ e^{\frac{x}{n}} = 2 \\ \frac{x}{n} = \log 2 \\ x = n \log 2 \end{array} \right)$$

$$2 \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right] \leq P_n \leq \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right] + 2$$

$$\text{よ} \quad \frac{2 \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right]}{n} \leq \frac{P_n}{n} \leq \frac{\left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right] + 2}{n}$$

つまり

$$0 \leq \frac{n \log 2}{2\pi} - \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right] < 1$$

$$\text{よ} \quad \frac{n \log 2}{2\pi} - 1 < \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right] \leq \frac{n \log 2}{2\pi}$$

$$\frac{\log 2}{\pi} - \frac{2}{n} < \frac{2 \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right]}{n} \leq \frac{\log 2}{\pi}$$

$$\text{つまり} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log 2}{\pi} - \frac{2}{n} \right) = \frac{\log 2}{\pi}$$

よって ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right]}{n} = \frac{\log 2}{\pi}$$

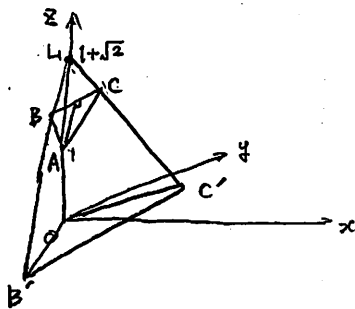
よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{n \log 2}{2\pi} \right] + 2}{n} = \frac{\log 2}{\pi}$$

よって ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n} = \frac{\log 2}{\pi}$$

空間内にある1辺の長さが1の正三角形ABCで、Aの座標が(0, 0, 1)であり、BとCのz座標が等しいものを考える。点L(0, 0, 1+√2)にある光源がxy平面上に作るこの正三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。



△ABCは1辺の長さが1の正三角形なので、
対称性から

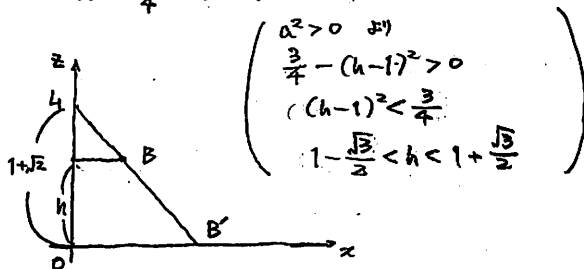
$$B(a, \frac{1}{2}, h), C(a, -\frac{1}{2}, h) \quad (a > 0)$$

とできる。

$$AB = 1 \text{ より } AB^2 = 1$$

$$a^2 + \frac{1}{4} + (h-1)^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{3}{4} - (h-1)^2$$



△ABCをxy平面に投影した影を
△OB'C' とする。

$$\vec{OB'} = \vec{OL} + \vec{LB'}$$

$$= \vec{OL} + \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-h} \vec{LB}$$

$$= (0, 0, 1+\sqrt{2}) + \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-h} (a, \frac{1}{2}, h-1-\sqrt{2})$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-h} a, \frac{1+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2}-h)}, 0 \right)$$

同様に

$$\vec{OC'} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-h} a, -\frac{1+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2}-h)}, 0 \right)$$

よって

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-h} = k \quad (k > 0) \quad \text{と} \quad k < 2$$

$$\begin{cases} \vec{OB'} = (ka, \frac{1}{2}k, 0) = k(a, \frac{1}{2}, 0) \\ \vec{OC'} = (ka, -\frac{1}{2}k, 0) = k(a, -\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$$

$$|\vec{OB'}| = k\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

$$|\vec{OC'}| = k\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\vec{OB'} \cdot \vec{OC'} = k^2(a^2 - \frac{1}{4})$$

よって

$$S(\triangle OB'C') = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OB'}|^2 |\vec{OC'}|^2 - (\vec{OB'} \cdot \vec{OC'})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{k^4(a^2 + \frac{1}{4})^2 - k^4(a^2 - \frac{1}{4})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{k^4 \times 2a^2 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} k^2 a$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-h} \right)^2 \sqrt{\frac{3}{4} - (h-1)^2}$$

$$\begin{pmatrix} \text{ここで} \\ 1+\sqrt{2}-h = t \\ \text{と} \quad k < 2 \\ (0 <) \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < t < \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$S(\triangle OB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})^2}{t^4} \sqrt{\frac{3}{4} - (\sqrt{2}-t)^2}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} \sqrt{\frac{3-4(\sqrt{2}-t)^2}{t^4}}$$

よって

$$g(t) = \frac{3-4(\sqrt{2}-t)^2}{t^4}$$

とすると

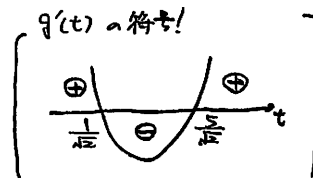
$$g'(t) = \frac{-8(\sqrt{2}-t)(-1) \cdot t^4 - \{3-4(\sqrt{2}-t)^2\} \cdot 4t^3}{t^8}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}t - 8t^2 - 12 + 32 - 32\sqrt{2}t + 16t^2}{t^5}$$

$$= \frac{8t^2 - 24\sqrt{2}t + 20}{t^5}$$

$$= \frac{4(2t^2 - 6\sqrt{2}t + 5)}{t^5}$$

$$= \frac{4(\sqrt{2}t - 5)(\sqrt{2}t - 1)}{t^5}$$



t	$(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) \dots \frac{1}{\sqrt{2}} \dots (\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$
g(t)	+ 0 -
g'(t)	↗ ↘

よって $\text{Max } S(\triangle OB'C') = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} \quad (t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ とき})$

(1) 実数 x が $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ を満たすとき、次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} < (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

(1) (証明)

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} < (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (1-\frac{1}{x}) \log(1-x) < \frac{1}{x} \log(1+x) \text{ を示す}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \log(1+x) - (1-\frac{1}{x}) \log(1-x) \\ &= \frac{1}{x} \{ \log(1+x) - (x-1) \log(1-x) \} \end{aligned}$$

とおき、

$$g(x) = \log(1+x) - (x-1) \log(1-x)$$

とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \cdot \log(1-x) - (x-1) \cdot \frac{-1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \log(1-x) - 1$$

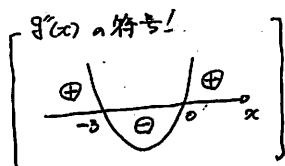
$$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)^2 - (1-x)}{(1-x)(1+x)^2}$$

$$= \frac{3x+x^2}{(1-x)(1+x)^2}$$

$$= \frac{x(3+x)}{(1-x)(1+x)^2}$$



x	$(-1) \cdots (0) \cdots (1)$
$g''(x)$	$- \quad +$
$g'(x)$	$\searrow (0) \nearrow$

よって $g'(x) > 0$ となる

$g(x)$ は増加関数

つまり、 $g(0) = 0$ より

$$\begin{cases} -1 < x < 0 & \text{なとき} & g(x) < 0 \\ 0 < x < 1 & \text{なとき} & g(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \text{となる}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 & \text{なとき} & f(x) > 0 \\ 0 < x < 1 & \text{なとき} & f(x) > 0 \end{cases}$$

よって $f(x) > 0$ が成り立ち、

$-1 < x < 1$, $x \neq 0$ なとき

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} < (1+x)^{\frac{1}{2}} \text{ が成り立ち。}$$

(2) (証明)

$$(1) \text{ として } x = \frac{1}{100} \text{ とし、}$$

$$0.99^{-99} < 1.01^{100}$$

両辺に 0.99^{100} をかけると

$$0.99 < (1.01 \times 0.99)^{100} = 0.9999^{100} \quad \text{--- ①}$$

$$(1) \text{ として } x = -\frac{1}{100} \text{ とし、}$$

$$1.01^{101} < 0.99^{-100}$$

両辺に 0.99^{101} をかけると

$$0.9999^{101} = (1.01 \times 0.99)^{101} < 0.99 \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100} \text{ が成り立ち。}$$

正の実数 $p_i, q_i (i=1, 2, \dots, n)$ が $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$ を満たすとき、

次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\log x \leq x-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 不等式 $\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \log q_i$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $F = \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ の最小値を求めよ。

(4) 正の実数 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ に対して、 $\sum_{i=1}^n a_i$ が定数であるとき、

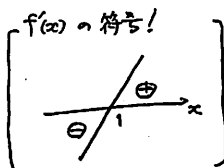
$G = \sum_{i=1}^n a_i \log a_i$ の最小値を求めよ。

(1) (証明)

$$f(x) = x - (1 - \log x)$$

とおく

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$



x	$(0) \dots 1 \dots$
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\nearrow 0 \nearrow$

$$\therefore f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

$x > 0$ かつ

$$\log x \leq x-1 \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

$$p_i > 0 \text{ かつ } q_i > 0 \text{ かつ } \frac{q_i}{p_i} > 0$$

(1) より

$$\log \frac{q_i}{p_i} \leq \frac{q_i}{p_i} - 1$$

$$p_i (\log q_i - \log p_i) \leq q_i - p_i$$

$$p_i \log p_i - p_i \log q_i \leq p_i - q_i$$

$i=1, 2, 3, \dots, n$ を代入して

両辺の和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \log p_i - \sum_{i=1}^n p_i \log q_i &\leq \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n q_i \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \log q_i \quad \text{が成り立つ。}$$

(3)

$$(a) \text{で } q_i = \frac{1}{n} \text{ とおく}$$

$$F = \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{n}$$

$$= -\log n \sum_{i=1}^n p_i$$

$$= -\log n$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は (1) より} \\ \frac{q_i}{p_i} = 1 \\ \text{つまり } p_i = \frac{1}{n} \text{ かつ} \end{array} \right)$$

よって

$$\min F = -\log n$$

(4)

$$\sum_{i=1}^n a_i = A \text{ (定数)}$$

とおく。

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} = 1$$

つまり

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} \log \frac{a_i}{A} = -\log n$$

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} (\log a_i - \log A) = -\log n$$

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} \log a_i - \log A = -\log n$$

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n a_i \log a_i &= (\log A - \log n) A \\ &= A \log \frac{A}{n} \end{aligned}$$