[三訂版オリジ・スタンIII受 基本問題46]

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$ (2) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

(3) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{8+x^2}$ (4) $\int_1^{e} x^2(\log x-1)dx$

(1)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin^2 x\cos x)dx$

$= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1-\frac{1}{3}$

$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

(2)

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

$= \left[x(-\cos x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1\cos x\,dx$

$= \underline{\underline{\pi}}$

(3)

$\left(\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2}\tan\theta \\ \text{とおくと} \\ dx = \frac{2\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta \end{array} \right)$

x	$0 \longrightarrow 2\sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{8+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8+8\tan^2\theta}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4}d\theta$

$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{16}\pi}}$

(4)

$\int_1^{e} x^2(\log x - 1)dx$

$= \int_1^{e} (x^2\log x - x^2)dx$

ここで

$\int_1^{e} x^2\log x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^{e} - \int_1^{e}\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$

$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\int_1^{e} x^2 dx$

$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{e}$

$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3-1)$

$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

$\left(\int_1^{e} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{e} = \frac{1}{3}(e^3-1) \right)$

よって

$(\text{与式}) = \left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right)$

$= \underline{\underline{-\frac{1}{9}e^3 + \frac{4}{9}}}$

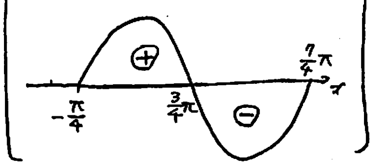
次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$　　(2) $\int_0^{2\pi}x^2|\sin x|dx$

(1)

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$x+\frac{\pi}{4}$ の符号!



$\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\sqrt{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

ここで

$F(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ とおくと.

$F(0)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$F\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\cos\pi=1$

$F(\pi)=-\cos\frac{5}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}\left(F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F(0)\right)-\sqrt{2}\left(F(\pi)-F\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

$=\sqrt{2}\left(2F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F(0)-F(\pi)\right)$

$=\sqrt{2}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

(2)

$\int_0^{2\pi}x^2|\sin x|dx$

$=\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x^2\sin x\,dx$

ここで

$x-\pi=t$ とおくと

$dx=dt$

x	$\pi \longrightarrow 2\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$=\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx-\int_0^{\pi}(\pi+t)^2\sin(\pi+t)dt$

$=\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx+\int_0^{\pi}(\pi^2+2\pi t+t^2)\sin t\,dt$

$=\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx+\int_0^{\pi}(\pi^2+2\pi x+x^2)\sin x\,dx$

$=\int_0^{\pi}(\pi^2+2\pi x+2x^2)\sin x\,dx$

$=\left[(\pi^2+2\pi x+2x^2)(-\cos x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(2\pi+4x)\cos x\,dx$

$=\left\{(\pi^2+2\pi^2+2\pi^2)+\pi^2\right\}+\left[(2\pi+4x)\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}4\sin x\,dx$

$=6\pi^2-4\times 2$

$=\underline{\underline{6\pi^2-8}}$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A170]　((1) 2003 横浜国大, (2) 2003 横浜国立大, (3) 2006 横浜国大, (4) 2006 横浜国立大)

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e 5^{\log x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2x+3\cos^2x}$

(1)

$\log x = t$ とおくと $x = e^t$

$\frac{1}{x}dx = dt$

$dx = e^t dt$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_1^e 5^{\log x}dx = \int_0^1 5^t e^t dt$$
$$= \int_0^1 (5e)^t dt$$
$$= \left[\frac{(5e)^t}{\log 5e}\right]_0^1$$
$$= \frac{5e-1}{\log 5+1}$$

(2)

$x = \tan\theta$ とおくと

$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta+1}{\tan^2\theta+1}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$$

(3)

$$\int_1^e x(\log x)^2 dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot 2(\log x)\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e x\log x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$
$$= \frac{e^2-1}{4}$$

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2x+3\cos^2x}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2x+3}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}$$

ここで

$\tan x = t$ とおくと

$\frac{dx}{\cos^2x} = dt$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2+3}dt$$

ここで

$t = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

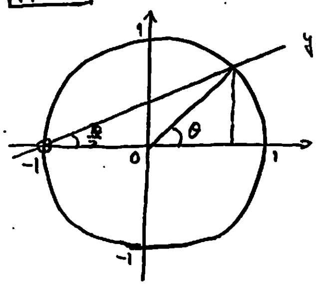
t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$
$$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A171]　(2011　津田塾大)

$\tan\frac{x}{2}=t$ とおいて，積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{解法1}}$



$y=t(x+1)$ と $x^2+y^2=1$

を連立して，

$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$

$$(1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$$

$$x=\frac{-t^2\pm\sqrt{t^4-(1+t^2)(t^2-1)}}{1+t^2}$$

$$=\frac{-t^2\pm 1}{1+t^2}$$

$x>-1$ より

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

このとき $y=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)$

$$=t\times\frac{2}{1+t^2}$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}$$

より $(x,y)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$

$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=dt \text{ より}$$

$$\frac{dx}{1+\cos x}=dt$$

$$dx=\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt$$

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{t+1}$$

$$=\Big[\log|t+1|\Big]_0^1$$

$$=\underline{\log 2}$$

$\boxed{\text{解法2}}$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$$

$$=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1$$

$$=\frac{2}{1+t^2}-1$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(後は同様)

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A172]　(2017　北海道大)

関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$$

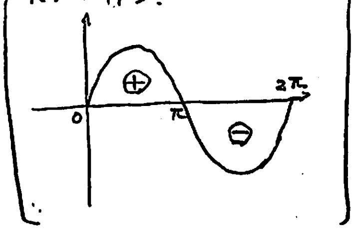
(1)

$$f(x)=1+\sin x-x\cos x$$

$$f'(x)=\cos x-\left(1\cos x+x(-\sin x)\right)$$

$$=x\sin x$$

f'(x) の符号!



x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$1+\pi$	↘	$1-2\pi$

よって

$$\begin{cases} \mathrm{Max}\, f(x)=1+\pi & (x=\pi) \\ \min f(x)=1-2\pi & (x=2\pi) \end{cases}$$

(2)

$$\int f(x)dx=\int(1+\sin x-x\cos x)dx$$

$$=x-\cos x-\int x\cos x\,dx$$

$$=x-\cos x-\left\{x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx\right\}$$

$$=x-\cos x-x\sin x-\cos x+C$$

$$=\underline{x-2\cos x-x\sin x+C}$$

(Cは積分定数)

(3)

(1) より $0\leqq x\leqq 2\pi$ で

$f(x)=0$ の解 は ただ1つであり，

その解 は $x=\frac{3}{2}\pi$ である。

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq \frac{3}{2}\pi \text{ のとき } f(x)\geqq 0 \\ \frac{3}{2}\pi\leqq x\leqq 2\pi \text{ のとき } f(x)\leqq 0 \end{cases}$$

なので $F(x)=x-2\cos x-x\sin x$ とおくと，

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}f(x)dx$$

$$=\left(F\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)-F(0)\right)-\left(F(2\pi)-F\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\right)$$

$$=2F\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)-F(0)-F(2\pi)$$

ここで

$$\begin{cases} F(0)=-2 \\ F\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi=3\pi \\ F(2\pi)=2\pi-2 \end{cases}$$

より

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=6\pi-(-2)-(2\pi-2)$$

$$=\underline{4\pi+4}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A173]　(2006　山形大)

n を自然数とする。定積分 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx$ を求めよ。

$x-(n-1)\pi = t$ とおくと

$dx = dt$

x	$(n-1)\pi \to n\pi$
t	$0 \to \pi$

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-(n-1)\pi-t}\,|\sin((n-1)\pi+t)|\,dt$$

$$= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt$$

$$= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$$

ここで

$$\begin{cases} (e^{-t}\sin t)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \\ (e^{-t}\cos t)' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \end{cases}$$

より

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t)\right)' = e^{-t}\sin t$$

よって

$$\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-t}(\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}\cdot(-1) - 1\right)$$

$$= \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

$$= e^{-(n-1)\pi}\cdot\frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

$$= \frac{1}{e^{(n-1)\pi}}\times\frac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}$$

$$= \frac{1+e^{\pi}}{2e^{n\pi}}$$

区間$\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$で連続な関数$f(x)$に対し，等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

が成り立つことを証明せよ。さらに，それを利用して定積分

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}\,dx$ の値を求めよ。

(証明)

$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$-dx=dt$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)(-1)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ が成り立つ。■

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)}{\cos x+\sin x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x+\cos x}\,dx=I.$$

とおくと

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\sin x-4\sin^3 x)-(4\cos^3 x-3\cos x)}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(\sin x+\cos x)-4(\sin^3 x+\cos^3 x)}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(\sin x+\cos x)-4(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3-4(1-\sin x\cos x)\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x\cos x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[2\sin^2 x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2-\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=\underline{\underline{1-\frac{\pi}{4}}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 例題23]　(2015　大同大)

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin x+\cos x}dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3\sin x+\cos x}dx$ とする。

(1) $3I+J$ の値を求めよ。

(2) 不定積分 $\int\frac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}dx$ を求めよ。

(3) I および J の値を求めよ。

(1)

$$3I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x}{3\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x+\cos x}{3\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx$$

$$=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

(2)

$$\int\frac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}dx=\underline{\underline{\log|3\sin x+\cos x|+C}}$$

(Cは積分定数)

(3)

$$3J-I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}dx$$

$$=\Big[\log|3\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\log 3-\log 1$$

$$=\log 3.$$

よって

$$\begin{cases}3I+J=\frac{\pi}{2} & \text{——①}\\ -I+3J=\log 3. & \text{——②}\end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 3 & 9I+3J &= \frac{3}{2}\pi \\ ② & -\left(-I+3J\right. &\left.= \log 3\right) \\ \hline & 10I &= \frac{3}{2}\pi-\log 3 \\ & I &= \frac{3\pi-2\log 3}{20} \end{array}$$

①に代入して

$$\frac{9\pi-6\log 3}{20}+J=\frac{\pi}{2}$$

$$J=\frac{\pi+6\log 3}{20}$$

よって

$$\underline{\underline{I=\frac{3\pi-2\log 3}{20},\ J=\frac{\pi+6\log 3}{20}}}$$

　(2013 鹿児島大)

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ を求めよ。

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\sin 3x\,dx$ を求めよ。

(3) m, n を自然数とする。$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx$ を求めよ。

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2 dx$ を求めよ。

(1)

$f(x)=x\sin x$ とおくと

$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$

なので，$f(x)$ は偶関数であり

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$$=2\left\{\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}1\cdot\cos x\,dx\right\}$$

$$=2\left\{\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}\right\}$$

$$=\underline{\underline{2\pi}}$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\sin 3x\,dx=2\int_0^{\pi}\sin 2x\sin 3x\,dx$$

$$=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}(\cos 5x-\cos x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{5}\sin 5x-\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$=\underline{0}$$

(3)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$$

$$=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\left(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\right)dx=I$$

とおく.

(i) $m\neq n$ のとき

$$I=-\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x-\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$=0$$

(ii) $m=n$ のとき

$$I=-\int_0^{\pi}(\cos 2mx-1)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{2m}\sin 2mx-x\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{I=\begin{cases}0 & (m\neq n \text{ のとき})\\ \pi & (m=n \text{ のとき})\end{cases}}}$$

(4)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{2013}\sin^2 kx\,dx \qquad (※ (3) より)$$

$$=\sum_{k=1}^{2013}\pi$$

$$=\underline{2013\pi}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題B176]　(2015　千葉大)

0以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$，$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$

$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

で定める。

(1) 0以上の任意の整数 n に対して $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2) 定積分 $\int_{-1}^{1}T_n(x)dx$ の値を求めよ。

(1) (証明)

(i) $n=0,1$ のとき

$T_0(\cos\theta)=1=\cos 0$

$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$

となり

成り立つ。

(ii) $n=k,k+1\quad(k\geqq 0)$ のとき

成り立つと仮定する。

つまり

$$\begin{cases} T_k(\cos\theta)=\cos k\theta \\ T_{k+1}(\cos\theta)=\cos(k+1)\theta \end{cases}$$

が成り立つ。

$n=k+2$ のとき

$$\begin{aligned} T_{k+2}(\cos\theta)&=2\cos\theta\, T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)\\ &=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta\\ &=2\cos\theta(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)-\cos k\theta\\ &=\cos k\theta(2\cos^2\theta-1)-2\sin k\theta\sin\theta\cos\theta\\ &=\cos k\theta\cos 2\theta-\sin k\theta\sin 2\theta\\ &=\cos(k\theta+2\theta)\\ &=\cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

よって

$n=k,k+1$ のとき成り立つならば

$n=k+2$ のときも成り立つ。

(i),(ii) より

$n\geqq 0$ なるすべての $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ が成り立つ。■

(2)

$x=\cos\theta$ とおくと

$dx=-\sin\theta\, d\theta$

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$\pi\longrightarrow 2\pi$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}T_n(x)\,dx&=\int_{\pi}^{2\pi}T_n(\cos\theta)(-\sin\theta)\,d\theta\\ &=\int_{2\pi}^{\pi}\cos n\theta\sin\theta\,d\theta\\ &=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}\,d\theta=I\end{aligned}$$

とおく

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}T_1(x)\,dx\\ &=\int_{-1}^{1}x\,dx\\ &=0\end{aligned}$$

(ii) $n\neq 1$ のとき

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right]_{2\pi}^{\pi}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi\right)-\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\cdot 2\pi+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)2\pi\right)\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(n\pi+\pi)}{n+1}+\frac{\cos(n\pi-\pi)}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos n\pi}{n+1}-\frac{\cos n\pi}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right)\\ &=-\frac{1+\cos n\pi}{(n+1)(n-1)}\end{aligned}$$

(ア) n が偶数のとき

$\cos n\pi=1$ より

$$I=-\frac{2}{(n+1)(n-1)}$$

(イ) n が奇数のとき

$\cos n\pi=-1$ より

$$I=0$$

(i),(ii) より

$$I=\begin{cases}-\dfrac{2}{(n+1)(n-1)} & (n\text{ が偶数のとき})\\ 0 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受問題B177]　(1998　東北大)

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

(1)

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

なので　$y=f(x)$ は増加関数

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1\end{cases}$$

より　$0<f(x)<1$.

$$y=\frac{e^x}{e^x+1}$$

で x について解くと.

$$(e^x+1)y=e^x$$

$$(1-y)e^x=y$$

$1-y\neq0$ より

$$e^x=\frac{y}{1-y}\quad(>0)$$

よって　$x=\log\dfrac{y}{1-y}$

x と y を入れかえて

$$y=\log\frac{x}{1-x}$$

よって　$g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$

(2) (証明)

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=\Big[\,x\,g(x)\Big]_{f(a)}^{f(b)}-\int_{f(a)}^{f(b)} x\,g'(x)dx$$

$$=f(b)g(f(b))-f(a)g(f(a))-\int_{f(a)}^{f(b)} xg'(x)dx$$

$$=bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} xg'(x)dx$$

ここで

$g(x)=y$　とおくと

$g'(x)\,dx=dy$

x	$f(a)\to f(b)$
y	$a\to b$

$$=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(y)dy$$

$$=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx$$

よって

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$ が成り立つ。■