

(1) $\int_0^{\pi} \sin t \, dt, \int_0^{\pi} t \sin t \, dt$ を求めよ。(2) $f(x) = x + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin t \, dt \\ &= [-\cos t]_0^{\pi} \\ &= \underline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t \sin t \, dt \\ &= [t(-\cos t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos t \, dt \\ &= \underline{\pi} \end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = k \quad \text{--- ①}$$

とおく

$$f(x) = x + \frac{1}{\pi} k \quad \text{--- ②}$$

① に代入して

$$k = \int_0^{\pi} \left(t + \frac{1}{\pi} k\right) \sin t \, dt$$

$$k = \int_0^{\pi} t \sin t \, dt + \frac{1}{\pi} k \int_0^{\pi} \sin t \, dt$$

$$k = \pi + \frac{2}{\pi} k$$

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) k = \pi$$

$$k = \frac{\pi^2}{\pi - 2}$$

② より

$$\underline{\underline{f(x) = x + \frac{\pi}{\pi - 2}}}$$

実数 t に対して $F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (tx - \cos x)^2 dx$ は t の 2 次関数である。

その t^2 の係数は $\square$, t の係数は $\square$ である。

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (tx - \cos x)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 x^2 - 2tx \cos x + \cos^2 x) dx \end{aligned}$$

∵

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^3}{24} t^2 + (-\pi + 2) t + \frac{\pi}{4}$$

よって $(t^2 \text{ の係数}) = \frac{\pi^3}{24}$, $(t \text{ の係数}) = -\pi + 2$

- (1) 等式 $f(x) = e^x - \int_0^1 t f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。
 (2) 等式 $g(x) = e^x - \int_0^1 t \{g(t)\}^2 dt$ を満たす関数 $g(x)$ を求めよ。

(1)

$$\int_0^1 t f(t) dt = k \quad \text{--- ①}$$

とおくと

$$f(x) = e^x - k \quad \text{--- ②}$$

① に代入して

$$k = \int_0^1 t(e^t - k) dt$$

$$k = \int_0^1 t e^t dt - k \int_0^1 t dt$$

$$k = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^t dt - k \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1$$

$$k = e - [e^t]_0^1 - \frac{1}{2} k$$

$$\frac{3}{2} k = 1$$

$$k = \frac{2}{3}$$

② より

$$\underline{f(x) = e^x - \frac{2}{3}}$$

(2)

$$\int_0^1 t \{g(t)\}^2 dt = k \quad \text{--- ①}$$

とおくと

$$g(x) = e^x - k \quad \text{--- ②}$$

① に代入して

$$k = \int_0^1 t (e^t - k)^2 dt$$

$$k = \int_0^1 t (e^{2t} - 2k e^t + k^2) dt$$

$$k = \int_0^1 t e^{2t} dt - 2k \int_0^1 t e^t dt + k^2 \int_0^1 t dt$$

∵ ∴

$$\int_0^1 t e^{2t} dt = \left[t \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2t} dt$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (e^2 - 1)$$

$$= \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\int_0^1 t e^t dt = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^t dt$$

$$= e - [e^t]_0^1$$

$$= 1$$

$$\int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{e^2 + 1}{4} - 2k + \frac{1}{2} k^2$$

$$\frac{1}{2} k^2 - 3k + \frac{e^2 + 1}{4} = 0$$

$$2k^2 - 12k + e^2 + 1 = 0$$

$$k = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 2e^2 - 2}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{34 - 2e^2}}{2}$$

∵ ∴ $e < 3$ より

$$34 - 2e^2 > 34 - 2 \times 3^2 = 16 > 0$$

より $\frac{6 \pm \sqrt{34 - 2e^2}}{2}$ は実数 であるので

③ より

$$\underline{g(x) = e^x - \frac{6 \pm \sqrt{34 - 2e^2}}{2}}$$

整数 n に対して、 $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x} dx$ とする。

- (1) I_0 を求めよ。
 (2) n を正の整数とすると、 $I_n - I_{n-1}$ を求めよ。
 (3) I_5 を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \left[\log |\sin x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \log 2}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x - \cos(2n-1)x}{\sin x} dx \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \sin x}{\sin x} dx \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx dx \\ &= -2 \left[-\frac{1}{2n} \cos 2nx \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos \frac{n}{2}\pi)}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I_5 - I_4 &= -\frac{1}{5} (\cos 5\pi - \cos \frac{5}{2}\pi) = -\frac{1}{5} \\ I_4 - I_3 &= -\frac{1}{4} (\cos 4\pi - \cos 2\pi) = 0 \\ I_3 - I_2 &= -\frac{1}{3} (\cos 3\pi - \cos \frac{3}{2}\pi) = -\frac{1}{3} \\ I_2 - I_1 &= -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos \pi) = 1 \\ I_1 - I_0 &= -(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}) = -1 \quad (+) \\ I_5 - I_0 &= -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 - 1 \\ I_5 &= \underline{\underline{-\frac{8}{15} + \frac{1}{2} \log 2}} \end{aligned}$$

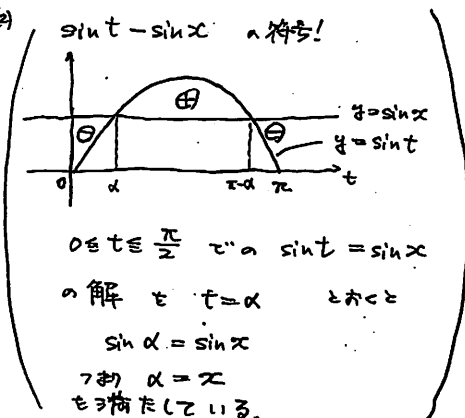
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に対して, $f(x) = \int_0^{\pi} |\sin t - \sin x| dt$ とする.

- (1) $f(0)$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

(1)

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{\pi} |\sin t| dt \\ &= \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

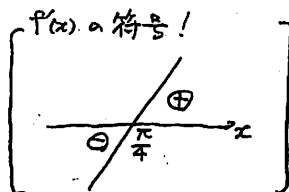
(2)



$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi} |\sin t - \sin x| dt \\ &= 2 \left(-\int_0^x (\sin t - \sin x) dt + \int_x^{\pi} (\sin t - \sin x) dt \right) \\ &= -2 \left[-\cos t - t \sin x \right]_0^x + 2 \left[-\cos t - t \sin x \right]_x^{\pi} \\ &= 2 \left(\cos x + x \sin x - 1 \right) - 2 \left(\frac{\pi}{2} \sin x - (\cos x + x \sin x) \right) \\ &= 4 \cos x + 4x \sin x - 2 - \pi \sin x \\ &= 4 \cos x + 4x \sin x - 2 - \pi \sin x \\ &= \underline{\underline{(4x - \pi) \sin x + 4 \cos x - 2}} \end{aligned}$$

(3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin x + (4x - \pi) \cos x - 4 \sin x \\ &= (4x - \pi) \cos x \\ &= 4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos x \end{aligned}$$



x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} - 2$$

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

よ)

$$\underline{\underline{\min f(x) = 2\sqrt{2} - 2 \quad (x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき})}}$$

負でない整数 m, n に対して, $B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ と定義する。

- (1) $B(3, 2)$ を求めよ。
- (2) $B(m, n)$ を $B(m+1, n-1)$ を使って表せ。ただし, $n \geq 1$ とする。
- (3) $B(m, n)$ を求めよ。
- (4) a, b を相異なる実数とする。このとき, $\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx$ を求めよ。

(1)

$$B(3, 2) = \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{15-24+10}{60}$$

$$= \frac{1}{60}$$

(2)

$$B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

$$= \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} n (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1)$$

(3)

$$B(m, n) = \frac{n}{m+1} \times \frac{n-1}{m+2} \times \frac{n-2}{m+3} \times \dots$$

$$\times \frac{2}{m+n-1} \times \frac{1}{m+n} \times B(m+n, 0)$$

$$= \frac{m! n!}{(m+n)!} B(m+n, 0)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ B(m+n, 0) = \int_0^1 x^{m+n} dx \\ = \left[\frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} \right]_0^1 \\ = \frac{1}{m+n+1} \end{array} \right)$$

よって

$$B(m, n) = \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \quad (n=0 \text{ でも成り立つ})$$

(4)

$$\left(\begin{array}{l} \frac{x-a}{b-a} = t \quad \text{とおく} \\ x-a = (b-a)t \\ x-b = (b-a)t + a-b \\ = (b-a)(t-1) \\ dx = (b-a)dt \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & a & b \\ \hline t & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx$$

$$= \int_0^1 (b-a)^m t^m (b-a)^n (t-1)^n (b-a) dt$$

$$= (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 t^m (t-1)^n dt$$

$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 t^m (1-t)^n dt$$

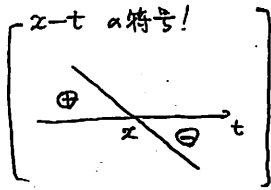
$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} B(m, n)$$

$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \times \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^n (b-a)^{m+n+1} m! n!}{(m+n+1)!}$$

$f(x) = \int_0^1 |x-t|e^t dt$ とおく (e は自然対数の底 2.718 …… である)。

$f(x)$ を求めよ (積分を計算せよ)。



$$\begin{aligned}
 \int (x-t)e^t dt &= (x-t)e^t + \int 1 \cdot e^t dt \\
 &= (x-t)e^t + e^t + C \\
 &= (-t+x+1)e^t + C \\
 &\quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

つまり

$$F(t) = (-t+x+1)e^t$$

また

$$\begin{cases}
 F(0) = x+1 \\
 F(1) = ex \\
 F(x) = e^x
 \end{cases}$$

(i) $x \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 (-x+t)e^t dt \\
 &= -(F(1) - F(0)) \\
 &= -ex + x+1 \\
 &= (1-e)x+1
 \end{aligned}$$

(ii) $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (x-t)e^t dt + \int_x^1 (-x+t)e^t dt \\
 &= (F(x) - F(0)) - (F(1) - F(x)) \\
 &= 2F(x) - F(0) - F(1) \\
 &= 2e^x - (x+1) - ex \\
 &= 2e^x - (e+1)x - 1
 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^1 (x-t)e^t dt \\
 &= F(1) - F(0) \\
 &= (e-1)x - 1
 \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

$$f(x) = \begin{cases} (1-e)x+1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \\ 2e^x - (e+1)x - 1 & (0 < x < 1 \text{ のとき}) \\ (e-1)x - 1 & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

a を正の定数、関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = xe^x$, $g(x) = ax$ とする。

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが $0 < x < 1$ の範囲において交点をもつための a の範囲を求めよ。

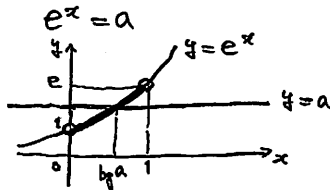
(2) $h(a) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ とおく。 $h(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

(1)

$f(x) = g(x)$ かつ $0 < x < 1$ で実数解をもつとよい。

$$xe^x = ax$$

$x \neq 0$ より



$$\therefore \underline{1 < a < e}$$

(2)

$$f(x) - g(x) = x(e^x - a)$$

$0 \leq x \leq 1$ で $x \geq 0$ かつ $e^x - a \geq 0$

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) dx &= \int x(e^x - a) dx \\ &= \int xe^x dx - a \int x dx \\ &= xe^x - \int 1 \cdot e^x dx - a \cdot \frac{1}{2} x^2 \\ &= xe^x - e^x - \frac{1}{2} ax^2 + C \\ &= (x-1)e^x - \frac{1}{2} ax^2 + C \end{aligned}$$

$$\text{よって } F(x) = (x-1)e^x - \frac{1}{2} ax^2$$

とおく

$$\begin{cases} F(0) = -1 \\ F(1) = -\frac{1}{2} a \\ F(\log a) = (\log a - 1) \cdot a - \frac{1}{2} a (\log a)^2 \\ \quad = -\frac{1}{2} a (\log a)^2 + a \log a - a \end{cases}$$

(i) $a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx \\ &= F(1) - F(0) \\ &= -\frac{1}{2} a + 1 \end{aligned}$$

(ii) $1 < a < e$ のとき

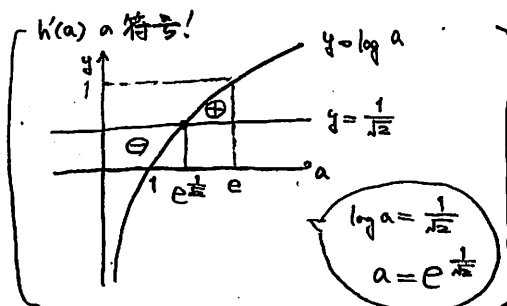
$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^{\log a} (-f(x) + g(x)) dx + \int_{\log a}^1 (f(x) - g(x)) dx \\ &= -(F(\log a) - F(0)) + (F(1) - F(\log a)) \\ &= -2F(\log a) + F(0) + F(1) \\ &= a(\log a)^2 - 2a \log a + 2a - 1 - \frac{1}{2} a \\ &= a(\log a)^2 - 2a \log a + \frac{3}{2} a - 1 \end{aligned}$$

(iii) $a \geq e$ のとき

$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^1 (-f(x) + g(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} a - 1 \end{aligned}$$

(iv) $1 < a < e$ のとき

$$\begin{aligned} h'(a) &= (\log a)^2 + a \cdot 2 \log a \cdot \frac{1}{a} - 2 \log a - 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{3}{2} \\ &= (\log a)^2 + 2 \log a - 2 \log a - 2 + \frac{3}{2} \\ &= (\log a)^2 - \frac{1}{2} \\ &= (\log a + \frac{1}{\sqrt{2}}) (\log a - \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$



よって

a	$(0) \dots 1 \dots e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dots e \dots$
$h'(a)$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$h(a)$	$\searrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow$

よって $h(a)$ が最小になる a は

$$\underline{a = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

a, b, c を実数とし,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。ただし, $a \neq 0$ とする。

- (1) $I(a, b)$ を求めよ。
- (2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b+c)$ と $I(a, b-c)$ を用いて表せ。
- (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

(1)

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \frac{\pi}{2} b - \frac{1}{a}$$

$$+ \frac{b}{a} \left\{ \left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \frac{\pi}{2} b - \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} \left(e^{\frac{\pi}{2}a} \sin \frac{\pi}{2} b \right) - \frac{b^2}{a^2} I(a, b)$$

よ,

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I(a, b) = \frac{1}{a^2} \left(a e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \frac{\pi}{2} b - a + b e^{\frac{\pi}{2}a} \sin \frac{\pi}{2} b \right)$$

よ, 2

$$I(a, b) = \frac{(a \cos \frac{\pi}{2} b + b \sin \frac{\pi}{2} b) e^{\frac{\pi}{2}a} - a}{a^2 + b^2}$$

(2)

$$J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \left(-\frac{1}{2}\right) \left\{ \cos(b+c)x - \cos(b-c)x \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos(b+c)x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos(b-c)x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} I(a, b+c) + \frac{1}{2} I(a, b-c)$$

(3)

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin tx \cos 4tx) (\sin 2tx \cos 3tx) \, dx$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin 5tx - \sin(-3tx)) (\sin 5tx - \sin(-tx)) \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin 5tx + \sin 3tx) (\sin 5tx + \sin tx) \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin^2 5tx + \sin 5tx \sin tx + \sin 3tx \sin 5tx + \sin 3tx \sin tx) \, dx$$

$$= 2 (J(1, 5t, 5t) + J(1, 5t, t) + J(1, 3t, 3t) + J(1, 3t, t))$$

$$= -I(1, 10t) + I(1, 0) - I(1, 6t) + I(1, 4t)$$

$$-I(1, 8t) + I(1, 2t) - I(1, 4t) + I(1, 2t)$$

$$= I(1, 0) + 2I(1, 2t) - I(1, 6t) - I(1, 8t) - I(1, 10t)$$

よ, 2

$$I(1, 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$I(1, 2t) = \frac{(\cos \pi t + 2t \sin \pi t) e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1 + 4t^2}$$

$$I(1, 6t) = \frac{(\cos 3\pi t + 6t \sin 3\pi t) e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1 + 36t^2}$$

$$I(1, 8t) = \frac{(\cos 4\pi t + 8t \sin 4\pi t) e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{1 + 64t^2}$$

$$I(1, 10t) = \frac{(\cos 5\pi t + 10t \sin 5\pi t) e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{1 + 100t^2}$$

よ, 3

$$|I(1, kt)| = \left| \frac{(\cos \frac{\pi}{2} kt + kt \sin \frac{\pi}{2} kt) e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1 + k^2 t^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{(1 + kt) e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1 + k^2 t^2} \right|$$

$$= \left| \frac{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{k}{t}\right) e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + k^2} \right|$$

$$\xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} 0$$

よ, 3 の 2. ハサミウチの原理より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(1, kt) = 0$$

よ, 7

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx = \underline{\underline{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}}$$