

$x$  の関数  $f(x) = \int_0^x (\cos t + \cos 2t) dt$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) の極大値, 極小値と, それらを与える  $x$  の値を求めよ。

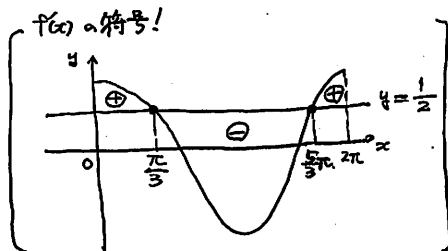
$$f(x) = \int_0^x (\cos t + \cos 2t) dt$$

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$$= 2\left(1 + \cos x\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$



| $x$     | 0 | ... | $\frac{\pi}{3}$ | ... | $\pi$ | ... | $\frac{5\pi}{3}$ | ... | $2\pi$ |
|---------|---|-----|-----------------|-----|-------|-----|------------------|-----|--------|
| $f'(x)$ | + |     | 0               | -   | 0     | -   | 0                | +   |        |
| $f(x)$  |   |     | ↗               |     | ↘     |     | ↘                |     | ↗      |

∴

$$f(x) = \int_0^x (\cos t + \cos 2t) dt$$

$$= \left[ \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^x$$

$$= \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

よて

$$\begin{cases} \text{極大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4} & (x = \frac{\pi}{3}) \\ \text{極小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4} & (x = \frac{5\pi}{3}) \end{cases}$$

関数  $F(x) = \int_{-x}^x \frac{\cos t}{1+e^t} dt$  について(1) 導関数  $F'(x)$  を求めよ。(2)  $F(x)$  を求めよ。

(1)

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{\cos t}{1+e^t} dt \quad \text{--- ①}$$

$$F'(x) = \frac{\cos x}{1+e^x} - \frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}} \times (-1)$$

$$= \frac{\cos x}{1+e^x} + \frac{e^x \cos x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{(\cos x)(1+e^x)}{1+e^x}$$

$$= \underline{\underline{\cos x}}$$

(2)

$$F(x) = \int F'(x) dx$$

$$= \int \cos x dx$$

$$= \sin x + C \quad \text{--- ②}$$

(Cは積分定数)

$$\text{①で } x=0 \quad \text{と } t?$$

$$F(0) = \int_0^0 \frac{\cos t}{1+e^t} dt = 0$$

よ、②は

$$C = 0$$

よ、

$$\underline{\underline{F(x) = \sin x}}$$

$f(x)$  に対して  $F(x) = -\frac{x}{2} + \int_x^0 t f(x-t) dt$ ,  $F''(x) = \cos x$  とする。

(1)  $f(x)$ ,  $F(x)$  を求めよ。

(2)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  において,  $F(x)$  の最大値, 最小値を求めよ。

(1)

$$\begin{cases} x-t=u & \text{とおく} \\ -dt=du \end{cases}$$

|     |                   |
|-----|-------------------|
| $t$ | $x \rightarrow 0$ |
| $u$ | $0 \rightarrow x$ |

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{x}{2} + \int_0^x (x-u) f(u) (-1) du \\ &= -\frac{x}{2} - x \int_0^x f(u) du + \int_0^x u f(u) du \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{2} - 1 \int_0^x f(u) du - x f(x) + x f(x) \\ &= -\frac{1}{2} - \int_0^x f(u) du \end{aligned}$$

$$F''(x) = -f(x)$$

∵ ①

$$F''(x) = \cos x$$

よ) )

$$-f(x) = \cos x$$

$$\text{よ. } \underline{f(x) = -\cos x}$$

∵ ②

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{2} + \int_0^x \cos u du \\ &= -\frac{1}{2} + [\sin u]_0^x \\ &= \sin x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$F(x) = \int F'(x) dx$$

$$= \int (\sin x - \frac{1}{2}) dx$$

$$= -\cos x - \frac{1}{2}x + C$$

(C は積分定数)

① ②  $x=0$  とし

$$F(0) = 0 \quad \text{よ)}$$

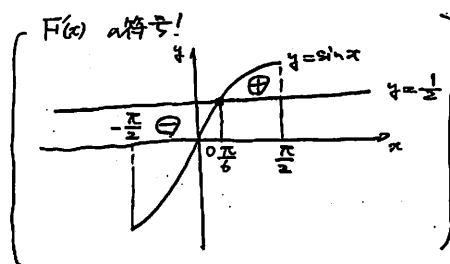
$$-1 + C = 0$$

$$\text{よ) } C = 1$$

よ.

$$\underline{F(x) = -\cos x - \frac{1}{2}x + 1}$$

(2)



|         |                                                          |
|---------|----------------------------------------------------------|
| $x$     | $-\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{6} \dots \frac{\pi}{2}$ |
| $F'(x)$ | $- \quad 0 \quad +$                                      |
| $F(x)$  | $\searrow \quad \nearrow$                                |

$$\begin{cases} F(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} + 1 \\ F(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4} + 1 \\ F(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} + 1 \end{cases}$$

よ.

$$\begin{cases} \text{Max } F(x) = \frac{\pi}{4} + 1 & (x = -\frac{\pi}{2}) \\ \text{min } F(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} & (x = \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

実数  $x$  に対して  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$  とおく。

- (1)  $f(1)$  を求めよ。
- (2)  $x > 0$  に対して  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  とおく。  $g(x)$  の導関数を求め、  $x > 0$  に対して等式  $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$  が成り立つことを示せ。
- (3) (2) を利用して極限  $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  を求めよ。
- (4) 極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\alpha - f(x))$  を求めよ。

(1)

$$f(1) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\left( \begin{array}{l} \because t = \tan \theta \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(2)

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

$x > 0$  で

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{であることを示す。}$$

(証明)

$$\begin{aligned} \{f(x) + g(x)\}' &= f'(x) + g'(x) \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$

$$f(x) + g(x) = C \quad (\text{定数})$$

ここで

$$g(1) = f(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{である。}$$

$$f(1) + g(1) = C$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = C$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{が成り立つ。}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$$

である。

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - g(x) \right)$$

$\therefore$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \frac{\pi}{2} - f(x) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \because \frac{1}{x} = u \quad 0 < u < 1 \\ x \rightarrow \infty \quad u \rightarrow +0 \end{array} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(u)}{u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0}$$

$$= f'(0)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$n$  を自然数とする。

- (1) 関数  $f(x) = x^{n+1}e^{-x}$  の  $x \geq 0$  における最大値を求めよ。
- (2) 極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$  を求めよ。
- (3) すべての自然数  $n$  に対して  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = n!$  を示せ。

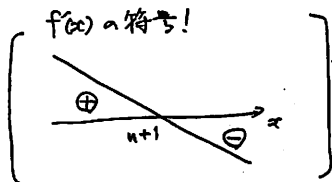
(1)

$$f(x) = x^{n+1}e^{-x}$$

$$f'(x) = (n+1)x^n e^{-x} + x^{n+1}(-e^{-x})$$

$$= (n+1-x)x^n e^{-x}$$

$x \geq 0$  のとき



|         |   |     |       |     |
|---------|---|-----|-------|-----|
| $x$     | 0 | ... | $n+1$ | ... |
| $f'(x)$ |   | +   | 0     | -   |
| $f(x)$  |   |     | ↗     | ↘   |

$$\therefore \text{Max } f(x) = (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \quad (x = n+1)$$

(2)

十分大なる  $x$  に対して (1) より

$$f(x) \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$

$$x^{n+1}e^{-x} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$

$$0 < x^n e^{-x} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}x}$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}x} = 0$$

よって、ハサミの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$$

(3) (証明1)

(i)  $n=1$  のとき

$$(\text{左辺}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -xe^{-x} - [-e^{-t}]_0^x \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1)$$

$$= 1$$

$$(\text{右辺}) = 1! = 1$$

よって (左辺) = (右辺) は成立する。

(ii)  $n=k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) で成立すると仮定する。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^k e^{-t} dt = k! \quad \text{が成立する。}$$

$n=k+1$  のとき

$$\int_0^x t^{k+1} e^{-t} dt = [-t^{k+1} e^{-t}]_0^x + (k+1) \int_0^x t^k e^{-t} dt$$

$$= -x^{k+1} e^{-x} + (k+1) \int_0^x t^k e^{-t} dt$$

$$\xrightarrow{(x \rightarrow \infty)} (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

よって

$n=k$  のとき成立すれば

$n=k+1$  のときも成立する。

(i), (ii) より

すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = n! \quad \text{が成立する。}$$

(証明2)

$$I_m = \int_0^x t^m e^{-t} dt \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad \text{とおく}$$

$$I_m = [-t^m e^{-t}]_0^x + m \int_0^x t^{m-1} e^{-t} dt$$

$$= -x^m e^{-x} + m I_{m-1}$$

$$\therefore I_m = -x^m e^{-x} + m(-x^{m-1} e^{-x} + (m-1)I_{m-2})$$

$$= -x^m e^{-x} - mx^{m-1} e^{-x} + m(m-1)I_{m-2}$$

$$= \dots$$

$$= -x^m e^{-x} - mx^{m-1} e^{-x} - \dots$$

$$- m(m-1)\dots 2 \cdot x e^{-x} + m! I_0$$

$$(2) \text{ で } \lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{また, } I_0 = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} I_0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} I_m = m!$$

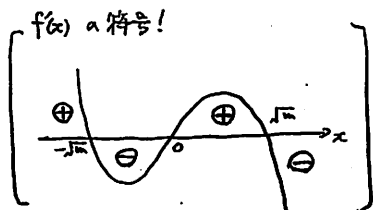
$$\therefore \text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = n! \quad \blacksquare$$

$m$  を正の整数とする。関数  $f(x) = \int_0^x (mt^{2m-1} - t^{2m+1})e^{-t^2} dt$  の極値を求めよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

$$f(x) = \int_0^x (mt^{2m-1} - t^{2m+1})e^{-t^2} dt$$

$$f'(x) = (mx^{2m-1} - x^{2m+1})e^{-x^2}$$

$$= x^{2m-1}(m - x^2)e^{-x^2}$$



|         |            |             |            |     |            |            |            |
|---------|------------|-------------|------------|-----|------------|------------|------------|
| $x$     | $\dots$    | $-\sqrt{m}$ | $\dots$    | $0$ | $\dots$    | $\sqrt{m}$ | $\dots$    |
| $f'(x)$ | $+$        | $0$         | $-$        | $0$ | $+$        | $0$        | $-$        |
| $f(x)$  | $\nearrow$ |             | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |            | $\searrow$ |

∴  $t^2$

$$\begin{aligned} (t^{2m}e^{-t^2})' &= 2mt^{2m-1}e^{-t^2} + t^{2m}e^{-t^2}(-2t) \\ &= 2(mt^{2m-1} - t^{2m+1})e^{-t^2} \end{aligned}$$

よ)

$$f(x) = \left[ \frac{1}{2} t^{2m} e^{-t^2} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2} x^{2m} e^{-x^2}$$

$$\begin{cases} f(-\sqrt{m}) = \frac{1}{2} m^m e^{-m} \\ f(\sqrt{m}) = \frac{1}{2} m^m e^{-m} \end{cases}$$

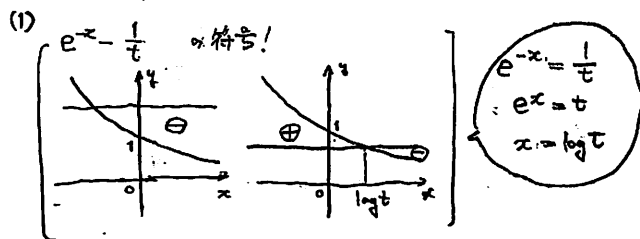
∴, 7

$$\begin{cases} \text{極大値} & \frac{m^m}{2e^m} & (x = \pm\sqrt{m}) \\ \text{極小値} & 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$a > 0, t > 0$  に対して、定積分  $S(a, t) = \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx$  を考える。

(1)  $a$  を固定したとき、 $t$  の関数  $S(a, t)$  の最小値  $m(a)$  を求めよ。

(2)  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2}$  を求めよ。



(i)  $\frac{1}{t} \geq 1$  のとき (つまり  $0 < t \leq 1$  のとき)

$$\begin{aligned} S(a, t) &= \int_0^a \left( -e^{-x} + \frac{1}{t} \right) dx \\ &= \left[ e^{-x} + \frac{1}{t} x \right]_0^a \\ &= e^{-a} + \frac{a}{t} - 1 \\ &= \frac{a}{t} + (e^{-a} - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} S(a, t) = -\frac{a}{t^2} < 0$$

ゆえに  $S(a, t)$  は単調減少

(ii)  $0 < \frac{1}{t} < 1$  かつ  $a \leq \log t$  のとき (つまり  $e^a \leq t$  のとき)

$$\begin{aligned} S(a, t) &= \int_0^a \left( e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx \\ &= -\frac{a}{t} + (-e^{-a} + 1) \end{aligned}$$

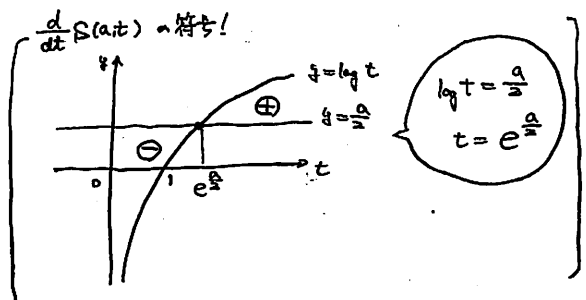
よ)  $S(a, t)$  は単調増加

(iii)  $0 < \frac{1}{t} < 1$  かつ  $\log t < a$  のとき (つまり  $1 < t < e^a$  のとき)

$$\begin{aligned} F(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{t} x \\ \text{とおく.} \\ F(0) &= -1 \\ F(a) &= -e^{-a} - \frac{a}{t} \\ F(\log t) &= -e^{-\log t} - \frac{\log t}{t} \\ &= -\frac{1}{t} - \frac{\log t}{t} \\ &= -\frac{\log t + 1}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(a, t) &= \int_0^{\log t} \left( e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx + \int_{\log t}^a \left( e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx \\ &= (F(\log t) - F(0)) - (F(a) - F(\log t)) \\ &= 2F(\log t) - F(0) - F(a) \\ &= -\frac{2\log t + 2}{t} + 1 + e^{-a} + \frac{a}{t} \\ &= \frac{-2\log t + a - 2}{t} + e^{-a} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(a, t) &= \frac{-\frac{2}{t} \cdot t - (-2\log t + a - 2)}{t^2} \\ &= \frac{2\log t - a}{t^2} \\ &= \frac{2}{t^2} \left( \log t - \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$



(i) ~ (iii) より

| $t$                    | $(0) \dots 1 \dots e^{\frac{a}{2}} \dots e^a \dots$     |
|------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\frac{d}{dt} S(a, t)$ | $- \quad - \quad 0 \quad + \quad +$                     |
| $S(a, t)$              | $\searrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow$ |

$$\begin{aligned} S(a, e^{\frac{a}{2}}) &= \frac{-2\log e^{\frac{a}{2}} + a - 2}{e^{\frac{a}{2}}} + e^{-a} + 1 \\ &= -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1 \\ &= (e^{-\frac{a}{2}} - 1)^2 \end{aligned}$$

よ、

$$m(a) = (e^{-\frac{a}{2}} - 1)^2 \quad (t = e^{\frac{a}{2}})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a} \right)^2 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{-\frac{a}{2}} \times \left( -\frac{1}{2} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$f_0(x) = xe^x$  として、正の整数  $n$  に対して、

$$f_n(x) = \int_{-x}^x f_{n-1}(t) dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数  $x$  の関数  $f_n(x)$  を定める。

(1)  $f_1(x)$  を求めよ。

(2)  $g(x) = \int_{-x}^x (at+b)e^t dt$  とするとき、定積分  $\int_{-c}^c g(x) dx$  を求めよ。

ただし、実数  $a, b, c$  は定数とする。

(3) 正の整数  $n$  に対して、 $f_{2n}(x)$  を求めよ。

(1)

$$f_1(x) = \int_{-x}^x f_0(t) dt + f'_0(x)$$

∴

$$f_0(x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$\int_{-x}^x f_0(t) dt = \int_{-x}^x te^t dt$$

$$= [te^t]_{-x}^x - \int_{-x}^x 1 \cdot e^t dt$$

$$= xe^x + xe^{-x} - [e^t]_{-x}^x$$

$$= xe^x + xe^{-x} - (e^x - e^{-x})$$

$$= (x-1)e^x + (x+1)e^{-x}$$

$$f_1(x) = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x} + (x+1)e^x$$

$$= \underline{\underline{2xe^x + (x+1)e^{-x}}}$$

(2) **解法1**

$$g(x) = \int_{-x}^x (at+b)e^t dt$$

$$= [(at+b)e^t]_{-x}^x - \int_{-x}^x ae^t dt$$

$$= (ax+bx)e^x - (-ax+bx)e^{-x} - [ae^t]_{-x}^x$$

$$= (ax+bx)e^x + (ax-bx)e^{-x} - (ae^x - ae^{-x})$$

$$= (ax-a+b)x e^x + (ax+a-b)x e^{-x}$$

$$\int_{-c}^c g(x) dx = \int_{-c}^c (ax-a+b)x e^x dx + \int_{-c}^c (ax+a-b)x e^{-x} dx$$

∴

$$-x=t \quad t \in [-c, c]$$

$$-dx = dt$$

|     |                    |
|-----|--------------------|
| $x$ | $-c \rightarrow c$ |
| $t$ | $c \rightarrow -c$ |

$$\int_{-c}^c (ax+a-b)x e^{-x} dx = \int_c^{-c} (-at+a-b)e^t (-1) dt$$

$$= \int_{-c}^c (-at+a-b)e^t dt$$

$$= \int_{-c}^c (-ax+a-b)e^x dx$$

$$\underline{\underline{\int_{-c}^c g(x) dx = 0}}$$

**解法2**

$$g(-x) = \int_x^{-x} (at+b)e^t dt = -\int_{-x}^x (at+b)e^t dt = -g(x)$$

∴  $g(x)$  は奇関数 である。

$$\underline{\underline{\int_{-c}^c g(x) dx = 0}}$$

(3)

$$f_2(x) = \int_{-x}^x f_1(t) dt + f'_1(x)$$

$$= \int_{-x}^x (2te^t + (t+1)e^{-t}) dt + (2xe^x + (x+1)e^{-x})'$$

$$= 2 \int_{-x}^x te^t dt + \int_{-x}^x te^{-t} dt + \int_{-x}^x e^{-t} dt + (2xe^x + (x+1)e^{-x})'$$

∴

$$-t=u \quad t \in [-x, x]$$

$$-dt = du$$

|     |                    |
|-----|--------------------|
| $t$ | $-x \rightarrow x$ |
| $u$ | $x \rightarrow -x$ |

$$\int_{-x}^x te^{-t} dt = \int_x^{-x} (-u)e^u (-1) du$$

$$= -\int_{-x}^x ue^u du$$

$$= -\int_{-x}^x te^t dt$$

$$\int_{-x}^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{-x}^x = -e^{-x} + e^x$$

$$(2xe^x + (x+1)e^{-x})'$$

$$= 2e^x + 2xe^x + e^{-x} + (x+1)e^{-x}(-1)$$

$$= (2x+2)e^x - xe^{-x}$$

$$f_2(x) = (x-1)e^x + (x+1)e^{-x} + e^x - e^{-x}$$

$$+ (2x+2)e^x - xe^{-x}$$

$$= \underline{\underline{(3x+2)e^x}}$$

∴

$$f_{2n}(x) = (a_n x + b_n) e^x \quad \text{--- ①}$$

と推測 できる。

これを数学的帰納法により示す。

(i)  $n=1$  のとき

$f_2(x)$  は ①  $n=1$  のように表される。

(ii)  $n=k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) のとき

$n$  成立を仮定する。

つまり  $f_{2k}(x) = (a_k x + b_k) e^x$  とする。

∴

$$f_{2(k+1)}(x) = \int_{-x}^x f_{2k+1}(t) dt + f'_{2k+1}(x)$$

$$= \int_{-x}^x \left\{ \int_{-t}^t f_{2k}(u) du + f'_{2k}(t) \right\} dt$$

$$+ \left\{ \int_{-x}^x f_{2k}(t) dt + f'_{2k}(x) \right\}'$$

$$= \int_{-x}^x \left\{ \int_{-t}^t (a_k u + b_k) e^u du + f'_{2k}(t) \right\} dt$$

$$+ f_{2k}(x) + f_{2k}(-x) + f'_{2k}(x)$$

$$= [f_{2k}(t)]_{-x}^x + f_{2k}(x) + f_{2k}(-x) + f'_{2k}(x)$$

$$= f_{2k}(x) - f_{2k}(-x) + f_{2k}(x) + f_{2k}(-x) + f'_{2k}(x)$$

$$= 2f_{2k}(x) + f'_{2k}(x)$$



$$\begin{pmatrix} \text{zzz} \\ f'_k(x) = a_k e^x + (a_k x + b_k) e^x \\ = (a_k x + a_k + b_k) e^x \\ f''_k(x) = a_k e^x + (a_k x + a_k + b_k) e^x \\ = (a_k x + 2a_k + b_k) e^x \end{pmatrix}$$

$$f_{2(k+1)}(x) = 2(a_k x + b_k) e^x + (a_k x + 2a_k + b_k) e^x \\ = (3a_k + 2a_k + 3b_k) e^x$$

よ、

$$\begin{cases} a_{k+1} = 3a_k & \text{--- ②} \\ b_{k+1} = 2a_k + 3b_k & \text{--- ③} \end{cases}$$

とあ、

$$f_{2(k+1)}(x) = (a_{k+1} x + b_{k+1}) e^x$$

とあ、

$n=k$  のとき成り立つとは、

$n=k+1$  のとき成り立つ。

(i), (ii) より

すべ、 $n \in \mathbb{N}$  として

$$f_{2n}(x) = (a_n x + b_n) e^x$$

と表す。

② より

$$a_n = a_1 \cdot 3^{n-1}$$

$$= 3 \times 3^{n-1}$$

$$= 3^n$$

③ より

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \times 3^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{b_n}{3^n} + \frac{2}{3}$$

よ、

$$\frac{b_n}{3^n} = \frac{b_1}{3^1} + (n-1) \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_n}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n-1)$$

$$\frac{b_n}{3^n} = \frac{2}{3} n$$

$$b_n = 2 \times 3^{n-1} n$$

よ、

$$\underline{\underline{f_{2n}(x) = 3^n x + 2 \times 3^{n-1} n}}$$