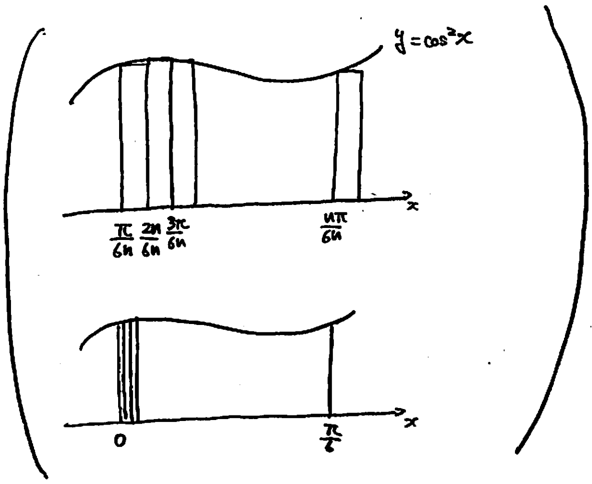
[三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題52]

極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}$ を求めよ。



$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}\right)\times 6$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 x\,dx$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=3\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

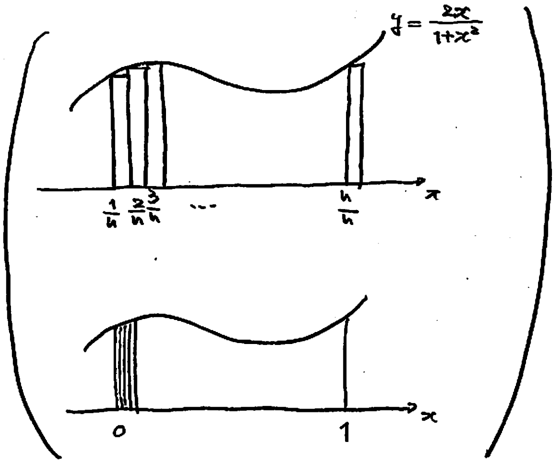
$$=3\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

〔三訂版オリジ・スタンⅢ受 基本問題53〕

n は自然数とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}$ を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2nk}{n^2+k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$



$$=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$=\underline{\underline{\log 2}}$$

[三訂版オリジ・スタンIII受 問題A189] ((1) 上智大, (2) 2012 防衛医科大, (3) 2009 愛知教育大)

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)^2}$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ を求めよ。

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+1)}{4n}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+2)}{4n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+n)}{4n}}\right\}$$

を求めよ。

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^5}{\left(\sum_{k=1}^{n}k^4\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^5\times\cancel{n^{10}}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)^2\times\cancel{n^{10}}}$$

$$=\frac{\left(\int_0^1 x\,dx\right)^5}{\left(\int_0^1 x^4\,dx\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right)^5}{\left(\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$=\underline{\frac{25}{32}}$$

(2)

十分大 なる n に対して

$$\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$$

$$=\log\left(\frac{1}{n^n}\times\frac{(4n)!}{(3n)!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{-n\log n+\sum_{k=1}^{4n}\log k-\sum_{k=1}^{3n}\log k\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{-n\log n+\sum_{k=3n+1}^{4n}\log k\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{-n\log n+\sum_{k=3n+1}^{4n}\log\frac{k}{n}+n\log n\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=3n+1}^{4n}\log\frac{k}{n}$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\int_3^4\log x\,dx$$

$$=\left[x\log x-x\right]_3^4$$

$$=(4\log 4-4)-(3\log 3-3)$$

$$=\log 256-\log 27-1$$

$$=\log\frac{256}{27e}$$

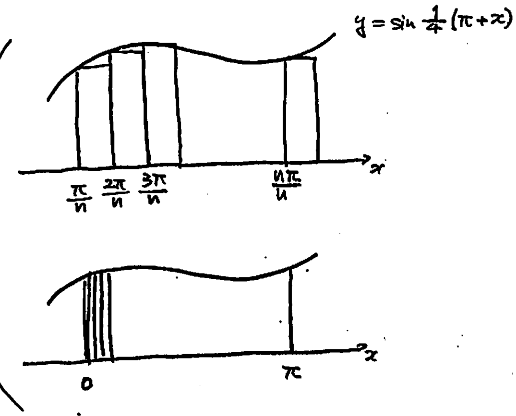
よって $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}=\frac{256}{27e}}$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+1)}{4n}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+2)}{4n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+n)}{4n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+k)}{4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{1}{4}\left(\pi+\frac{\pi k}{n}\right)}$$



$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{1}{4}(\pi+x)}\,dx$$

ここで

$\frac{1}{4}(\pi+x)=t$ とおくと

$\frac{1}{4}dx=dt$

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\sin t}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin t}{\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin t}{(1+\cos t)(1-\cos t)}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\sin t}{1+\cos t}+\frac{2\sin t}{1-\cos t}\right)dt$$

$$=\Big[-2\log|1+\cos t|+2\log|1-\cos t|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left[\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left(\log 1-\log\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

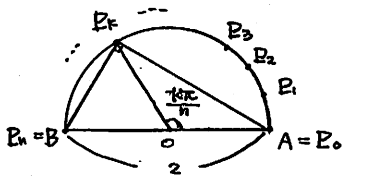
$$=2\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\underline{4\log(\sqrt{2}+1)}$$

長さ2の線分ABを直径とする半円周を点 $A=P_0$, P_1, ……, P_{n-1}, $P_n=B$ で n 等分する。

(1) 三角形 AP_kB の3辺の長さの和 AP_k+P_kB+BA を $l_n(k)$ とおく。$l_n(k)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\alpha=\lim_{n\to\infty}\dfrac{l_n(1)+l_n(2)+\cdots\cdots+l_n(n)}{n}$ を求めよ。ただし，$l_n(n)=4$ とする。



(1) $\boxed{\text{解法1}}$

円の中心 O として $\angle AOP_k=\frac{k\pi}{n}$

$\triangle AOP_k$ で余弦Th より

$$AP_k^2=1+1-2\times1\times1\times\cos\frac{k\pi}{n}$$
$$=2\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

$0<\frac{k\pi}{2n}<\frac{\pi}{2}$ なので $\sin\frac{k\pi}{2n}>0$

であり，

$$AP_k=2\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$\triangle P_kOB$ で余弦Th より

$$P_kB^2=1+1-2\times1\times1\times\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=2\left(1+\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=4\cos^2\frac{k\pi}{2n}$$

$\cos\frac{k\pi}{2n}>0$ より

$$P_kB=2\cos\frac{k\pi}{2n}$$

よって

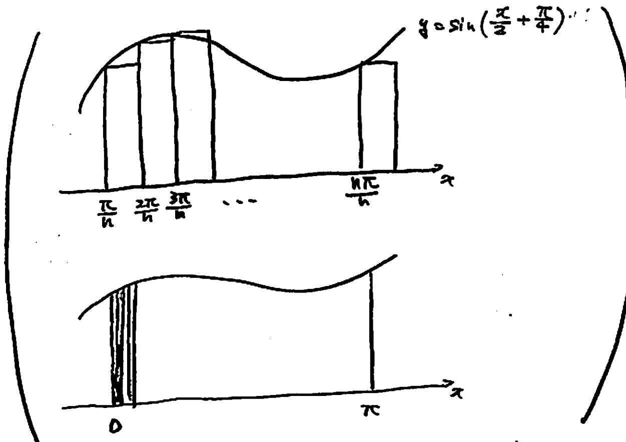
$$\underline{\underline{l_n(k)=2\sin\frac{k\pi}{2n}+2\cos\frac{k\pi}{2n}+2}}$$

(2)

$$l_n(k)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

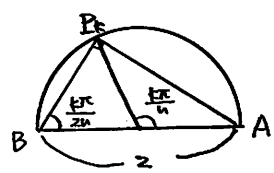
であり，

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{l_n(1)+l_n(2)+\cdots\cdots+l_n(n)}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)+2}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)+2$$



$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\times\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)+2$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx+2$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[-2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}+2$$
$$=-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\frac{\pi}{4}\right)+2$$
$$=-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2$$
$$\underline{\underline{=\frac{8}{\pi}+2}}$$

(1) $\boxed{\text{解法2}}$



$$\begin{cases}AP_k=2\sin\frac{k\pi}{2n}\\ P_kB=2\cos\frac{k\pi}{2n}\end{cases}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題A191]　(2016 新潟大)

一般項が $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

(1) (証明)

$$a_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\times2\times1}{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n\cdot n}$$

$$\leqq\frac{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n\cdot n}=\frac{1}{n}$$

よって $0<a_n\leqq\dfrac{1}{n}$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

なので ハサミウチの原理より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ が成り立つ。■

(2)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{}e$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=e$

(3)

$$\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\times\frac{n^n}{n!}$$

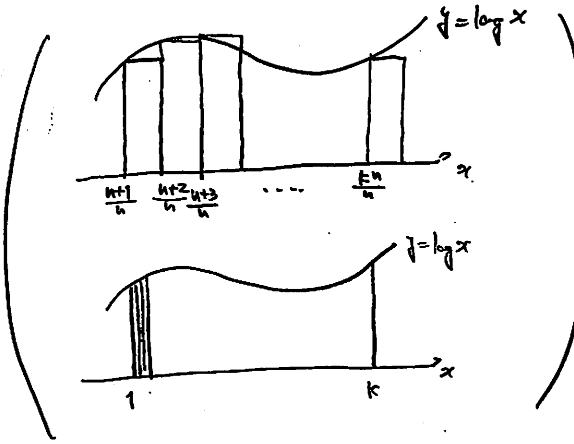
$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{l=1}^{kn}\log l-\sum_{l=1}^{n}\log l+n\log n-kn\log kn\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{l=n+1}^{kn}\log l+n\log n-kn\log kn\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{l=n+1}^{kn}\log\frac{l}{n}+(kn-n)\log n+n\log n-kn\log kn\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{l=n+1}^{kn}\log\frac{l}{n}+kn(\log n-\log kn)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=n+1}^{kn}\log\frac{l}{n}+k\log\frac{1}{k}$$



$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\int_1^k\log x\,dx-k\log k$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^k-k\log k$$

$$=(k\log k-k)-(1\log1-1)-k\log k$$

$$=1-k$$

$$=\log e^{1-k}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 例題26]　(2004 横浜市立大)

(1) 定積分 $\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}dx$ の値を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(1)

$$\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}dx = \int_0^1 \left(\log(x+2) - \log(x+1)\right)dx$$

$$= \left[(x+2)\log(x+2) - (x+2)\right]_0^1 - \left[(x+1)\log(x+1) - (x+1)\right]_0^1$$

$$= \left[(x+2)\log(x+2) - (x+1)\log(x+1)\right]_0^1$$

$$= (3\log 3 - 2\log 2) - (2\log 2 - 1\log 1)$$

$$= \underline{\underline{3\log 3 - 4\log 2}}$$

(2)

$$\log\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\log(2n+k) - \sum_{k=1}^{n}\log(n+k)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}dx$$

$$= 3\log 3 - 4\log 2$$

$$= \log 27 - \log 16$$

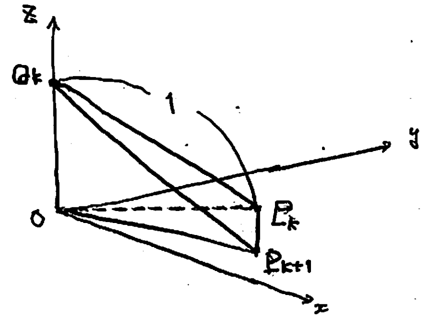
$$= \log\frac{27}{16}$$

よって

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{27}{16}}}$$

【三訂版オリジ・スタンIII受 問題B192】　(2002　東京大)

xyz 空間に点 $P_k\left(\frac{k}{n},\ 1-\frac{k}{n},\ 0\right)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ をとる。また，z 軸上 $z \geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 P_kQ_k の長さが1になるようにとる。三角錐 $OP_kP_{k+1}Q_k$ の体積を V_k とおいて，極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ を求めよ。



$$\overrightarrow{OP_k} = \left(\frac{k}{n},\ 1-\frac{k}{n},\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{OP_{k+1}} = \left(\frac{k+1}{n},\ 1-\frac{k+1}{n},\ 0\right)$$

$$S(\triangle OP_kP_{k+1}) = \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\left(1-\frac{k+1}{n}\right) - \frac{k+1}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\times\frac{n-k-1}{n} - \frac{k+1}{n}\times\frac{n-k}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left|\cancel{nk}-\cancel{k^2}-\cancel{k}-\cancel{nk}+\cancel{k^2}-n+\cancel{k}\right|$$

$$= \frac{n}{2n^2}$$

$$= \frac{1}{2n}$$

$$\left|\overrightarrow{OP_k}\right|^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{k}{n}\right)^2$$

$$= \frac{2k^2-2nk+n^2}{n^2}$$

なので，$\triangle OP_kQ_k$ で三平方のTh より，

$$\left|\overrightarrow{OQ_k}\right|^2 = 1 - \frac{2k^2-2nk+n^2}{n^2}$$

$$= \frac{2nk-2k^2}{n^2}$$

より $\left|\overrightarrow{OQ_k}\right| = \dfrac{\sqrt{2nk-2k^2}}{n}$

よって

$$V_k = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2n}\times\frac{\sqrt{2nk-2k^2}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2nk-2k^2}}{6n^2}$$

$$= \frac{1}{6n}\sqrt{\frac{2k}{n} - 2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{2\left(\frac{k}{n}\right) - 2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{2x-2x^2}\,dx \quad \text{―――― ①}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\int_0^1\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$$

ここで

$2x-1 = \sin\theta$ とおくと

$2dx = \cos\theta\ d\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{24}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{24}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{48}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\pi}{48}}}$$

[① からの別解]

$$\frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{2x-2x^2}\,dx$$

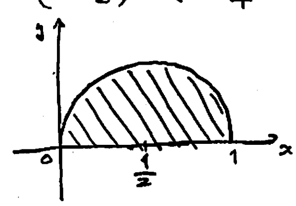
$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$$

ここで

$y = \sqrt{x-x^2}$ とおくと

$y^2 = x - x^2$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$



$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\pi\times\frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\pi}{48}}}$$

[三訂版オリジ・スタンⅢ受 問題B193]　(2000　大阪大)

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。n を正の整数とし，$a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}$ とおく。このとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$$0 \leqq \sqrt{2n^2-k^2} - [\sqrt{2n^2-k^2}] < 1$$

より

$$\sqrt{2n^2-k^2}-1 < [\sqrt{2n^2-k^2}] \leqq \sqrt{2n^2-k^2}$$

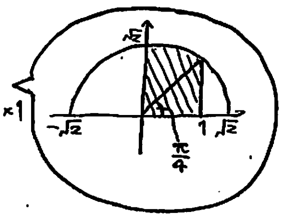
$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2} < \frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2} \leqq \frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2} < a_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$



$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times1\times1$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

なので、ハサミウチの原理 より

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}}$$