

$a$  を負でない実数,  $n$  を自然数とすると, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(1) \frac{1}{2a+3} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{2x+1} < \frac{1}{2a+1}$$

$$(2) \frac{1}{2} \log(2n+3) < 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} < 1 + \frac{1}{2} \log(2n+1)$$

(1) (証明)

$$a \leq x \leq a+1 \quad n \text{ とき}$$

$$2a+1 \leq 2x+1 \leq 2a+3$$

$$\frac{1}{2a+1} \geq \frac{1}{2x+1} \geq \frac{1}{2a+3}$$

等号は常には成り立たないから

$$\int_a^{a+1} \frac{dx}{2a+3} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{2x+1} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{2a+1}$$

よって

$$\frac{1}{2a+3} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{2x+1} < \frac{1}{2a+1} \quad \text{成り立つ.}$$

(2) (証明)

(1) よし

$$\frac{1}{2a+3} < \int_a^{a+1} \frac{dx}{2x+1} < \frac{1}{2a+1} \quad \text{②}$$

①

① で  $a=0, 1, 2, \dots, n-1$

を代入して, 377 の和をとると

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} &< \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_{n-1}^n \\ &= \int_0^n \frac{dx}{2x+1} \\ &= \frac{1}{2} [\log |2x+1|]_0^n \\ &= \frac{1}{2} \log(2n+1) \end{aligned}$$

両辺に 1 を加えると

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} < 1 + \frac{1}{2} \log(2n+1) \quad \text{①'}$$

② で  $a=0, 1, 2, \dots, n$

を代入して, 377 の和をとると

$$\begin{aligned} \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_n^{n+1} &< 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \\ &= \int_0^{n+1} \frac{dx}{2x+1} \\ &= \frac{1}{2} [\log |2x+1|]_0^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \log(2n+3) \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2} \log(2n+3) < 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} \quad \text{②'}$$

①', ②' より

$$\frac{1}{2} \log(2n+3) < 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} < 1 + \frac{1}{2} \log(2n+1)$$

が成り立つ.

(1) すべての実数  $x$  に対して、次の不等式を証明せよ。

(ア)  $1+x \leq e^x$  (イ)  $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$

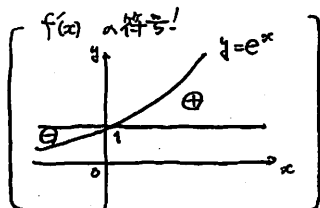
(2) 不等式  $\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4}$  を証明せよ。

(1) (ア) (証明)

$$f(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$$

とおく

$$f(x) = e^x - 1$$



|         |     |   |     |
|---------|-----|---|-----|
| $x$     | ... | 0 | ... |
| $f(x)$  | -   | 0 | +   |
| $f'(x)$ | ↘   | 0 | ↗   |

よって  $f(x) \geq 0$  が成り立つ。

つまり  $1+x \leq e^x$  が成り立つ。 ■

(イ) (証明)

(ア) で  $x$  の代わりに  $-x^2$  を代入して

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \quad \text{--- ①}$$

(ア) で  $x$  の代わりに  $x^2$  を代入して

$$(0 <) 1+x^2 \leq e^{x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \leq e^{-x^2} \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{が成り立つ。} \quad \blacksquare$$

(2) (証明)

(イ) で  $0 \leq x \leq 1$  とおき

等号は常に成り立たないから

$$\int_0^1 (1-x^2) dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2) dx &= \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$x = \tan \theta \quad \text{とおく}$$

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

|          |   |   |                 |
|----------|---|---|-----------------|
| $x$      | 0 | → | 1               |
| $\theta$ | 0 | → | $\frac{\pi}{4}$ |

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4} \quad \text{が成り立つ。} \quad \blacksquare$$

$n$  を自然数とする。

- (1)  $t \geq 0$  のとき、 $t - n \sin \frac{t}{n} \geq 0$  を示せ。  
 (2)  $t \geq 0$  のとき、 $t - n \sin \frac{t}{n} - \frac{t^3}{6n^2} \leq 0$  を示せ。  
 (3)  $a$  を正の実数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a n \sin \frac{x^2}{n} dx$  を求めよ。

(1) (証明)

$$f(t) = t - n \sin \frac{t}{n}$$

とすると

$$f'(t) = 1 - \cos \frac{t}{n} \geq 0$$

よって  $f(t)$  は増加関数であり、

$$f(t) \geq f(0) = 0$$

より  $t \geq 0$  のとき

$$t - n \sin \frac{t}{n} \geq 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

$$g(t) = t - n \sin \frac{t}{n} - \frac{t^3}{6n^2}$$

とすると

$$g'(t) = 1 - \cos \frac{t}{n} - \frac{t^2}{2n^2}$$

$$g''(t) = \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} - \frac{t}{n^2}$$

$$g'''(t) = \frac{1}{n^2} \cos \frac{t}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \left( \cos \frac{t}{n} - 1 \right) \leq 0$$

よって  $g''(t)$  は減少関数であり、

$$g''(t) \leq g''(0) = 0$$

よって  $g'(t)$  は減少関数であり、

$$g'(t) \leq g'(0) = 0$$

よって  $g(t)$  は減少関数であり、

$$g(t) \leq g(0) = 0$$

より  $t \geq 0$  のとき

$$t - n \sin \frac{t}{n} - \frac{t^3}{6n^2} \leq 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

(3) (1), (2) より  $t \geq 0$  のとき

$$t - \frac{t^3}{6n^2} \leq n \sin \frac{t}{n} \leq t$$

$t = x^2$  とすると

$$x^2 - \frac{x^6}{6n^2} \leq n \sin \frac{x^2}{n} \leq x^2$$

等号は  $x=0$  にのみ成り立つから、

$$\int_0^a \left( x^2 - \frac{x^6}{6n^2} \right) dx < \int_0^a n \sin \frac{x^2}{n} dx < \int_0^a x^2 dx$$

よって

$$\int_0^a \left( x^2 - \frac{x^6}{6n^2} \right) dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{x^7}{42n^2} \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{3} a^3 - \frac{a^7}{42n^2}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^a x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{a^3}{3}$$

ハサミの原理より

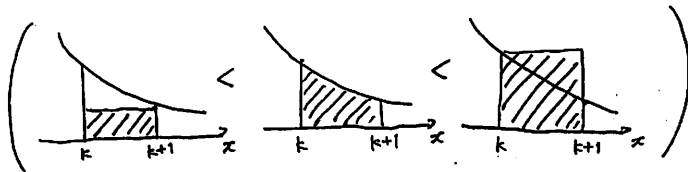
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a n \sin \frac{x^2}{n} dx = \frac{a^3}{3}$$

$\sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{\sqrt{n}}$  の整数部分を求めよ。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0) \quad \text{とおく}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$$

なので  $f(x)$  は減少関数 である。



$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{②}$$

①

① で  $k=1, 2, 3, \dots, 3999$

を代入して、辺々  $\alpha$  和をとると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4000}} < \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \dots + \int_{3999}^{4000}$$

両辺に 1 を加えると

$$\sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \int_1^{4000} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{4000} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= [2\sqrt{x}]_1^{4000} \\ &= 2(200-1) \\ &= 398 \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 399 \quad \text{①'}$$

② で  $k=1, 2, 3, \dots, 3999$

を代入して、辺々の和をとると

$$\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \dots + \int_{3999}^{4000} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3999}}$$

両辺に  $\frac{1}{\sqrt{4000}}$  を加えると

$$\int_1^{4000} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$398 + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{②'}$$

①', ②' より

$$398 + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 399$$

つまり、整数部分は 398

数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ) と定める。

(1)  $n \geq 2$  のとき,  $na_n = (n-1)a_{n-2}$  であることを示せ。

(2)  $n \geq 1$  のとき,  $na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$  であることを示せ。

(3)  $a_n \geq a_{n+1}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) であることを示せ。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2$  を求めよ。

(1) (証明)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &= \left[ -\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) \\ &= (n-1) (a_{n-2} - a_n) \end{aligned}$$

より

$$na_n = (n-1)a_{n-2} \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

(1) より

$$na_n = (n-1)a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

両辺に  $a_{n-1}$  をかけて

$$na_{n-1}a_n = (n-1)a_{n-2}a_{n-1}$$

より

$$na_{n-1}a_n = 1 \cdot a_0 \cdot a_1 \quad (n=1 \text{ 時も成り立つ})$$

$$\begin{pmatrix} \text{ここ} \\ a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \\ a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \end{pmatrix}$$

より

$$na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{が成り立つ。}$$

(3) (証明)

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき}$$

$$0 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{となる}$$

$$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$$

$$\text{より} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx$$

$$\text{つまり} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{が成り立つ。}$$

(4)

(3) より

$$a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$$

$$a_n > 0 \quad \text{となる}$$

$$na_n a_{n+1} \leq na_n^2 \leq na_{n-1} a_n$$

$$na_n a_{n+1} \leq na_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{② (3) より})$$

$$\begin{pmatrix} \text{ここ} \\ na_n a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1) a_n a_{n+1} \\ = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{② (2) より}) \\ \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

ハサミの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

(1)  $x \geq 0$  のとき, 不等式  $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(x+1) \leq x$  を証明せよ。

(2) 極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$  を求めよ。

(1) (証明)

$$f(x) = x - \log(x+1)$$

とおく

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geq 0$$

よって  $x \geq 0$  で  $f(x)$  は単調増加

$$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$$

$$\text{つまり } \log(x+1) \leq x \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \log(x+1) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= \log(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x \end{aligned}$$

とおく

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + x - 1$$

$$= \frac{x^2}{x+1} \geq 0$$

よって  $x \geq 0$  で  $g(x)$  は単調増加

$$\therefore g(x) \geq g(0) = 0$$

$$\text{つまり } x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(x+1) \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(x+1) \leq x \quad \text{--- ③ 成立} \quad \blacksquare$$

(2)

(1) より 十分大きな  $n$  と  $k \in \mathbb{N}$  に対し

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leq \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

より  $k=1, 2, 3, \dots, n$  を代入して, 辺々和をとると

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right) \leq \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right)$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \frac{\frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{1}{n}) (2 + \frac{1}{n})}{12}$$

$$\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{1}{2}$$

ハサミの原理より

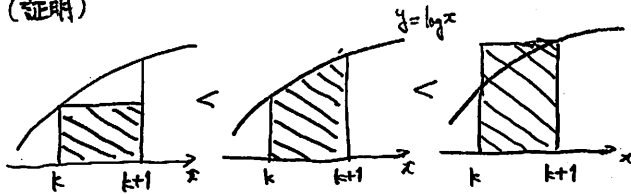
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$n$  を 2 以上の自然数とすると、次の不等式が成り立つことを示せ。

(1)  $\int_1^n \log x dx \leq \log 2 + \log 3 + \dots + \log n \leq \int_2^{n+1} \log x dx$

(2)  $n^n e^{-n+1} \leq n! \leq \frac{1}{4}(n+1)^{n+1} e^{-n+1}$

(1) (証明)



$$\int_k^{k+1} \log k dx < \int_k^{k+1} \log x dx < \int_k^{k+1} \log(k+1) dx$$

$$\log k < \int_k^{k+1} \log x dx < \log(k+1) \quad \text{②}$$

①

① で  $k=2, 3, 4, \dots, n$  を代入して

辺々和をとると、

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 + \dots + \log n < \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^5 + \dots + \int_n^{n+1}$$

$$\log 2 + \log 3 + \dots + \log n < \int_2^{n+1} \log x dx \quad \text{①'}$$

② で  $k=1, 2, 3, \dots, n-1$  を代入して

辺々和をとると、

$$\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \dots + \int_{n-1}^n < \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n$$

$$\int_1^n \log x dx < \log 2 + \log 3 + \dots + \log n \quad \text{②'}$$

①', ②' より

$$\int_1^n \log x dx \leq \log 2 + \log 3 + \dots + \log n \leq \int_2^{n+1} \log x dx$$

が成り立つ。

(2) (証明)

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= [x \log x - x]_1^n \\ &= (n \log n - n) - (1 \log 1 - 1) \\ &= n \log n - n + 1 \\ &= \log n^n - \log e^n + \log e \\ &= \log n^n e^{-n+1} \end{aligned}$$

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 + \dots + \log n = \log n!$$

$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} \log x dx &= [x \log x - x]_2^{n+1} \\ &= ((n+1) \log(n+1) - (n+1)) - (2 \log 2 - 2) \\ &= \log(n+1)^{n+1} - n + 1 - 2 \log 2 \\ &= \log(n+1)^{n+1} - \log e^n + \log e - \log 4 \\ &= \log \frac{1}{4} (n+1)^{n+1} e^{-n+1} \end{aligned}$$

(1) の結果とあわせて、

$$\log n^n e^{-n+1} \leq \log n! \leq \log \frac{1}{4} (n+1)^{n+1} e^{-n+1}$$

つまり

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq \frac{1}{4} (n+1)^{n+1} e^{-n+1}$$

が成り立つ。 ■

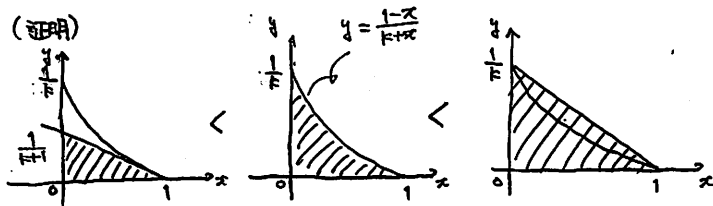
(1) すべての自然数  $k$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2)  $m > n$  であるようなすべての自然数  $m$  と  $n$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

(1) (証明)



$$f(x) = \frac{1-x}{k+x}$$

とおく

$$f(x) = \frac{-1(k+x) - (k-x) \cdot 1}{(k+x)^2} = \frac{-(k+1)}{(k+x)^2}$$

$$f(1) = -\frac{1}{k+1}$$

よ、

点  $(1, 0)$  における接線

$$y = -\frac{1}{k+1}(x-1)$$

$$x=0 \text{ のとき } y = \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{k+1} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{k}$$

よ、

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k} \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

$$f(x) = \frac{1-x}{k+x}$$

$$= -1 + \frac{k+1}{k+x}$$

よ、

$$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx = \int_0^1 \frac{k+1}{k+x} dx - \int_0^1 1 dx$$

$$= [(k+1) \log(k+x)]_0^1 - 1$$

$$= (k+1)(\log(k+1) - \log k) - 1$$

よ、

(1) の不等式は

$$\frac{1}{2(k+1)} < (k+1)(\log(k+1) - \log k) - 1 < \frac{1}{2k}$$

$$\frac{1}{2(k+1)^2} < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{よって} \\ \frac{1}{2(k+1)^2} > \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \\ \text{よ、} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

①

①で  $k = n, n+1, n+2, \dots, m-1$

を代入して、辺々を和をとると

$$\left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ + \left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\ + \dots \\ + \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \end{array} \right) < \left( \begin{array}{l} \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} \\ + \log(n+2) - \log(n+1) - \frac{1}{n+2} \\ + \log(n+3) - \log(n+2) - \frac{1}{n+3} \\ + \dots \\ + \log m - \log(m-1) - \frac{1}{m} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} \right) < \log m - \log n - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k}$$

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} \quad \textcircled{1'}$$

②で  $k = n, n+1, n+2, \dots, m-1$

を代入して、辺々を和をとると

$$\left( \begin{array}{l} \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} \\ + \log(n+2) - \log(n+1) - \frac{1}{n+2} \\ + \log(n+3) - \log(n+2) - \frac{1}{n+3} \\ + \dots \\ + \log m - \log(m-1) - \frac{1}{m} \end{array} \right) < \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ + \dots \\ + \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \end{array} \right)$$

$$\log m - \log n - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

$$\log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn} \quad \textcircled{2'}$$

①', ②' より

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

が成り立つ。