

n を 0 以上の整数とする。次の不定積分を求めよ。

$$\int \left\{ -\frac{(\log x)^n}{x^2} \right\} dx = \sum_{k=0}^n \boxed{}$$

ただし、積分定数は書かなくてよい。

$$\begin{pmatrix} \log x = t & \text{とおく} & x = e^t \\ dx = e^t dt \end{pmatrix}$$

$$\int \left\{ -\frac{(\log x)^n}{x^2} \right\} dx = \int \left\{ -\frac{t^n}{e^{2t}} \cdot e^t \right\} dt$$

$$= -\int t^n e^{-t} dt = I_n$$

とおく

$$I_n = -\int t^n (-e^{-t}) + n \int t^{n-1} e^{-t} dt$$

$$= t^n e^{-t} + n I_{n-1}$$

$$= \frac{(\log x)^n}{x} + n I_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\log x)^n}{n! x}$$

$$\frac{I_n}{n!} = a_n \quad \text{とおく}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(\log x)^n}{n! x} \quad (n \geq 1)$$

$$\textcircled{n=1} \quad a_1 - a_0 = \frac{\log x}{x}$$

$$\textcircled{n=2} \quad a_2 - a_1 = \frac{(\log x)^2}{2! x}$$

$$\textcircled{n=3} \quad a_3 - a_2 = \frac{(\log x)^3}{3! x}$$

$$\textcircled{n=n-1} \quad a_n - a_{n-1} = \frac{(\log x)^n}{n! x} \quad (+ \quad (n \geq 2))$$

$$a_n - a_0 = \sum_{k=1}^n \frac{(\log x)^k}{k! x} \quad (n=1 \text{ でも成り立つ})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここ} \\ a_0 = \int \left\{ -\frac{1}{x^2} \right\} dx = \frac{1}{x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{array} \right)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\log x)^k}{k! x} + \frac{1}{x} + C$$

$$\therefore \frac{I_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(\log x)^k}{k! x} + C$$

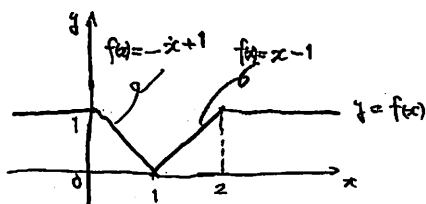
$$\textcircled{201} \quad \underline{\underline{\frac{I_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{n! (\log x)^k}{k! x} + C}} \quad (C = C \cdot n! \text{ とおいた})$$

関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$ で定める。

(1) $g(x) = f(f(x))$ とおく。関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ。

(2) n を自然数とする。 $\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ を求めよ。

(1)



$0 \leq f(x) \leq 1$ であり。

(i) $x < 0$ のとき $f(x) = 1$

$$g(x) = f(1) = 0$$

(ii) $0 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) = -x + 1$

$$g(x) = f(-x + 1)$$

$$= -(-x + 1) + 1$$

$$= x$$

(iii) $1 \leq x \leq 2$ のとき $f(x) = x - 1$

$$g(x) = f(x - 1)$$

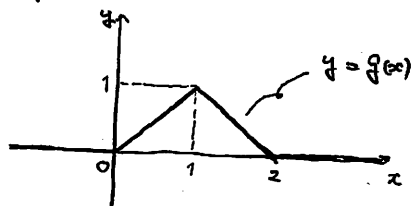
$$= -(x - 1) + 1$$

$$= -x + 2$$

(iv) $x > 2$ のとき $f(x) = 1$

$$g(x) = f(1) = 0$$

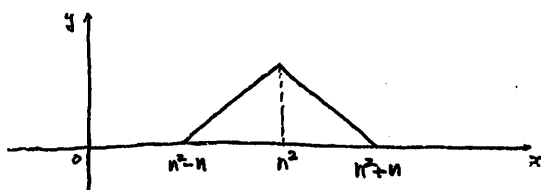
(i) ~ (iv) より



(2)

$y = g\left(\frac{x}{n}\right)$ のグラフは、 $y = g(x)$ のグラフを x 軸方向に n 倍拡大し、

$y = g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)$ のグラフは、それさらに x 軸方向に n^2-n だけ平行移動したものである。



特に $0 \leq x \leq n^2$ で

$$g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq n^2-n) \\ \frac{x-n^2+n}{n} & (n^2-n \leq x \leq n^2) \end{cases}$$

よって

$$\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$$

$$= \int_{n^2-n}^{n^2} \frac{x-n^2+n}{n} \cos \frac{\pi x}{n} dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \frac{x}{n} = t \quad \text{とおく} \\ \frac{1}{n} dx = dt \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & n^2-n & \rightarrow n^2 \\ \hline t & n-1 & \rightarrow n \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

$$= n \int_{n-1}^n (t-n+1) \cos \pi t dt$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ t-n+1 = \theta \quad \text{とおく} \\ dt = d\theta \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & n-1 & \rightarrow n \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

$$= n \int_0^1 \theta \cos(\pi \theta + (n-1)\pi) d\theta$$

$$= n (-1)^{n-1} \int_0^1 \theta \cos \pi \theta d\theta$$

$$= (-1)^{n-1} n \left\{ \left[\theta \frac{1}{\pi} \sin \pi \theta \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \sin \pi \theta d\theta \right\}$$

$$= (-1)^{n-1} n \left\{ + \frac{1}{\pi^2} [\cos \pi \theta]_0^1 \right\}$$

$$= \frac{2(-1)^n \cdot n}{\pi^2}$$

(1) $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続関数とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

(2) $a > 1$ とする。(1)を用いて、積分 $\int_0^{\pi} \frac{x(a^2 - 4\cos^2 x) \sin x}{a^2 - \cos^2 x} dx$ を求めよ。

(1) (証明)

$$\left(\begin{array}{l} \pi - x = t \quad t < \pi \\ -dx = dt \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \pi \\ \hline t & \pi \rightarrow 0 \end{array} \end{array} \right)$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) (-1) dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$$

よ、

$$2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

以上で示す。

(2)

$$\int_0^{\pi} \frac{x(a^2 - 4\cos^2 x) \sin x}{a^2 - \cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} x \cdot \frac{(a^2 - 4 + 4\sin^2 x) \sin x}{a^2 - 1 + \sin^2 x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{(a^2 - 4 + 4\sin^2 x) \sin x}{a^2 - 1 + \sin^2 x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{(a^2 - 4\cos^2 x) \sin x}{a^2 - \cos^2 x} dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \cos x = t \quad t < 1 \\ -\sin x dx = dt \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \pi \\ \hline t & 1 \rightarrow -1 \end{array} \end{array} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{a^2 - 4t^2}{a^2 - t^2} dt$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{a^2 - 4t^2}{a^2 - t^2} dt$$

$$= \pi \int_0^1 \left(4 + \frac{3a^2}{t^2 - a^2} \right) dt$$

$$= \pi \left(4 + \int_0^1 \frac{3a^2}{t^2 - a^2} dt \right)$$

$$= 4\pi + 3a^2\pi \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - a^2}$$

$$\frac{4}{-t^2 + a^2} = \frac{-4t^2 + 4a^2}{-t^2 + a^2} = \frac{-4t^2 + 4a^2}{-3a^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - a^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{(t+a)(t-a)} \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t+a} \right) dt \\ &= \frac{1}{2a} \left[\log |t-a| - \log |t+a| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2a} \left[\log \left| \frac{t-a}{t+a} \right| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2a} \left(\log \left| \frac{1-a}{1+a} \right| - \log |-1| \right) \\ &= \frac{1}{2a} \log \frac{a-1}{a+1} \end{aligned}$$

$$= 4\pi + \frac{3\pi a}{2} \log \frac{a-1}{a+1}$$

$x > 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$ について

- (1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は、実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち、任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ1つ存在することを示せ。
- (2) (1) で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする。このとき、定積分 $\int_8^{27} g(x) dx$ を求めよ。

(1) (証明)

$$f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$$

$$f'(x) = \frac{12(3e^{3x} - 3e^x)(e^{2x} - 1) - 12(e^{3x} - 3e^x) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$= \frac{12(3e^{5x} - 3e^{3x} - 3e^{5x} + 3e^{3x} - 2e^{5x} + 6e^{3x})}{(e^{2x} - 1)^2}$$

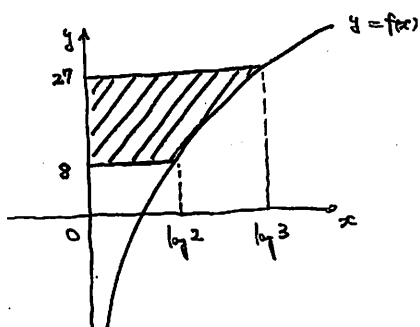
$$= \frac{12(e^{3x} + 3e^x)}{(e^{2x} - 1)^2} > 0$$

よって $f(x)$ は増加関数

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12(e^x - \frac{3}{e^x})}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = \infty \end{cases}$$

よって 任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ1つ存在する。

(2)



$$f(x) = 8 \quad \text{と解くと}$$

$$\frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1} = 8$$

$$3(e^{3x} - 3e^x) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$3e^{3x} - 2e^{2x} - 9e^x + 2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -9 & 2 \\ & 6 & 8 & -2 \\ \hline 3 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$(e^x - 2)(3e^{2x} + 4e^x - 1) = 0$$

$$x > 0 \quad \therefore e^x > 1 \quad \therefore$$

$$e^x = 2$$

$$\therefore x = \log 2$$

$$f(x) = 27 \quad \text{と解くと}$$

$$\frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1} = 27$$

$$4(e^{3x} - 3e^x) = 9(e^{2x} - 1)$$

$$4e^{3x} - 9e^{2x} - 12e^x + 9 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & -12 & 9 \\ & 12 & 9 & -9 \\ \hline 4 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$(e^x - 3)(4e^{2x} + 3e^x - 3) = 0$$

$$x > 0 \quad \therefore e^x > 1 \quad \therefore$$

$$e^x = 3$$

$$\therefore x = \log 3$$

求める定積分は 図の斜線部の面積であり

$$\int_8^{27} g(x) dx = \text{図の斜線部の面積}$$

$$= 27 \log 3 - 8 \log 2 - \int_{\log 2}^{\log 3} f(x) dx$$

よって

$$e^x = t \quad \text{とおくと}$$

$$e^x dx = dt$$

x	$\log 2 \rightarrow \log 3$
t	$2 \rightarrow 3$

$$\int_{\log 2}^{\log 3} f(x) dx = \int_2^3 \frac{12(t^3 - 3)}{t^2 - 1} dt$$

$$= 12 \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{t^2 - 1} \right) dt$$

$$= 12 \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{(t+1)(t-1)} \right) dt$$

$$= 12 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= 12 \left[t - \log |t-1| + \log |t+1| \right]_2^3$$

$$= 12 \left[t + \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right]_2^3$$

$$= 12 \left((3 + \log 2) - (2 + \log 3) \right)$$

$$= 12(1 + \log 2 - \log 3)$$

$$= 27 \log 3 - 8 \log 2 - 12 - 12 \log 2 + 12 \log 3$$

$$= \underline{\underline{39 \log 3 - 20 \log 2 - 12}}$$

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし、どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

$$p_n = \frac{2n}{2n} \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-2}{2n} \times \cdots \times \frac{n+1}{2n}$$

であり、

$$\begin{aligned} \log p_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \log k - \log (2n)^n \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \log \frac{k}{2n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \log \frac{k}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \times \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} \log \frac{k}{2n}$$

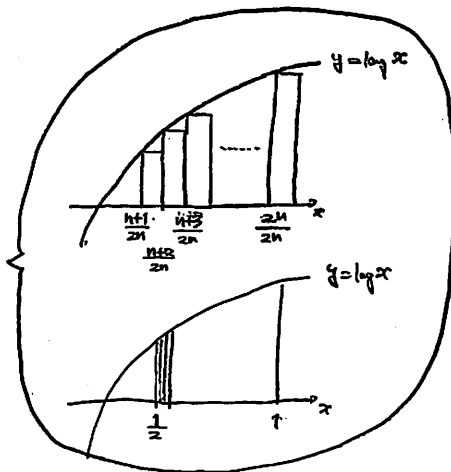
$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x \, dx$$

$$= 2 \left[x \log x - x \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= 2 \left(-1 - \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= 2 \left(-1 + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\log 2 - 1}}$$



n を自然数とし, $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$, $J_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n}+1)dx$ とお

く。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 実数 $t \geq 0$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log \frac{\sqrt{1+t}+1}{2} \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数 $\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n}+1)$ を求めよ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1-I_n)$ を求めよ。

(1) (証明)

$$f(t) = \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)} - \log \frac{\sqrt{1+t}+1}{2}$$

とおく。

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2} \times \frac{1 \cdot (\sqrt{1+t}+1) - t \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{(\sqrt{1+t}+1)^2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}} \\ &= \frac{2(1+t) + 2\sqrt{1+t} - t}{4(\sqrt{1+t}+1)^2 \sqrt{1+t}} - \frac{1}{2(\sqrt{1+t}+1)\sqrt{1+t}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+t} + t + 2 - 2\sqrt{1+t} - 2}{4(\sqrt{1+t}+1)^2 \sqrt{1+t}} \\ &= \frac{t}{4(\sqrt{1+t}+1)^2 \sqrt{1+t}} \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに $t \geq 0$ で $f(t)$ は単調増加

よって $f(t) \geq f(0) = 0$

つまり $t \geq 0$ で

$$\log \frac{\sqrt{1+t}+1}{2} \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)} \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

(1) より $t \geq 0$ で

$$0 \leq \log(\sqrt{1+t}+1) - \log 2 \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

$0 \leq x \leq 1$ で $x^n \geq 0$ となる

$$0 \leq \log(\sqrt{1+x^n}+1) - \log 2 \leq \frac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ \frac{1}{2(\sqrt{1+x^n}+1)} \leq \frac{1}{2(\sqrt{1+0}+1)} = \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$0 \leq \log(\sqrt{1+x^n}+1) - \log 2 \leq \frac{1}{4} x^n$$

よって

$$0 \leq \int_0^1 \{\log(\sqrt{1+x^n}+1) - \log 2\} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4} x^n dx$$

つまり

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)} \quad \text{が成り立つ。}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n}+1) &= \frac{\frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{1+x^n}}}{\sqrt{1+x^n}+1} \\ &= \frac{nx^{n-1}}{2(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} n(1-I_n) &= n \left(1 - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} \right) \\ &= n \left(\int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} \right) \\ &= n \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \right) dx \\ &= n \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^n}-1}{\sqrt{1+x^n}} dx \\ &= n \int_0^1 \frac{x^n}{(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{2(\sqrt{1+x^n}+1)\sqrt{1+x^n}} \times x dx \\ &= 2 \left\{ \left[x \log(\sqrt{1+x^n}+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n}+1) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \log(\sqrt{2}+1) - J_n \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0 \quad \text{となる} \\ \text{(2) により 8.4.3 の原理より} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (J_n - \log 2) = 0 \\ \text{つまり} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \log 2 \end{array} \right)$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-I_n) &= 2 \left(\log(\sqrt{2}+1) - \log 2 \right) \\ &= 2 \log \frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{aligned}$$

n を自然数とする。

(1) 実数 x に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

(3) 不等式 $\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k}$$

(1) (証明)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx}$$

$$= 1 - e^{-x} + e^{-2x} - e^{-3x} + \dots + (-1)^n e^{-nx}$$

$$= \frac{1(1 - (-e^{-x})^{n+1})}{1 - (-e^{-x})}$$

$$= \frac{1 + (-1)^n e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}}$$

よ)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

が成り立つ。

$$(2) \int_0^1 \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} \right\} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - e^{-x} + e^{-2x} - e^{-3x} + \dots + (-1)^n e^{-nx} - \frac{1}{1+e^{-x}}) dx$$

$$= \left[x + e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} \right]_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \left(1 + e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{3} e^{-3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n} \right)$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) - \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

$$= 1 - (1 - e^{-1}) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) - \frac{1}{3} (1 - e^{-3}) + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n} (1 - e^{-n}) - \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k} + 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$$

よ) 2)

$$e^{-x} = t \quad \text{よ} \quad x < t.$$

$$-e^{-x} dx = dt$$

$$dx = -\frac{1}{t} dt$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow \frac{1}{e}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_1^{\frac{1}{e}} \frac{1}{1+t} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\log |t| - \log |t+1| \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= (\log 1 - \log 2) - \left(\log \frac{1}{e} - \log \frac{1+e}{e} \right) \\ &= -\log 2 + \log e + \log \frac{1+e}{e} \\ &= \log \frac{1+e}{2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k} + 1 - \log \frac{1+e}{2}$$

よ) 2)

$$S = \log \frac{1+e}{2} - 1$$

$$= \log \frac{1+e}{2e}$$

(3) (証明)

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-(n+1)x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{n+1} (e^{-(n+1)} - 1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{e^{-(n+1)}}{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1}$$

よ) 2)

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{が成り立つ。}$$

よ) 2)

$$-\frac{1}{n+1} \leq (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

よ) 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

よ) 2) 1) の原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx = 0$$

(2) よ)

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \log \frac{1+e}{2e}$$

よ) 2)

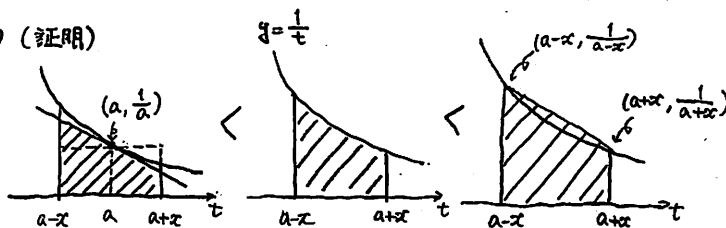
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^{-k})}{k} = \log \frac{1+e}{2e}$$

(1) $0 < x < a$ を満たす実数 x, a に対し、次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

(2) (1) を利用して、 $0.68 < \log 2 < 0.71$ を示せ。ただし、 $\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

(1) (証明)



$$\frac{1}{a} \times 2x < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{2} x \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) \times 2x$$

よって

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \quad \text{が成り立つ。}$$

(2) (証明)

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{t} dt &= [\log t]_2^4 \\ &= \log 4 - \log 2 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

で、

$$\log 2 = \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{t} dt$$

とする。

(1) で

$$a = \frac{5}{2}, x = \frac{1}{2} \quad \text{と (1) を適用する。}$$

$$1 \times \frac{2}{5} < \int_2^3 \frac{1}{t} dt < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{2}{5} < \int_2^3 \frac{1}{t} dt < \frac{5}{12} \quad \text{--- (1)}$$

また、

$$a = \frac{7}{2}, x = \frac{1}{2} \quad \text{と (1) を適用する。}$$

$$1 \times \frac{2}{7} < \int_3^4 \frac{1}{t} dt < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{2}{7} < \int_3^4 \frac{1}{t} dt < \frac{7}{24} \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) の不等式を加えて

$$0.685 < \frac{2}{5} < \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{t} dt < \frac{17}{24} < 0.708$$

よって

$$0.68 < \log 2 < 0.71 \quad \text{が成り立つ。}$$