

曲線 $(x-y)^2 = 2x$ の概形をかき、この曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$$(x-y)^2 = 2x \quad (x \geq 0)$$

$$\text{よ} \quad y = x \pm \sqrt{2x} \quad (x \geq 0)$$

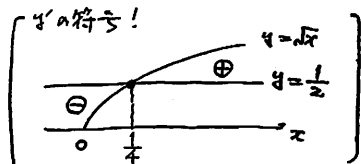
$$y = x + \sqrt{2x} \quad \text{に} \quad x > 0 \quad \text{で}$$

$$y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x} + 1}{2\sqrt{2x}} > 0$$

$$\text{よ} \quad y = x + \sqrt{2x} \quad \text{は増加関数}$$

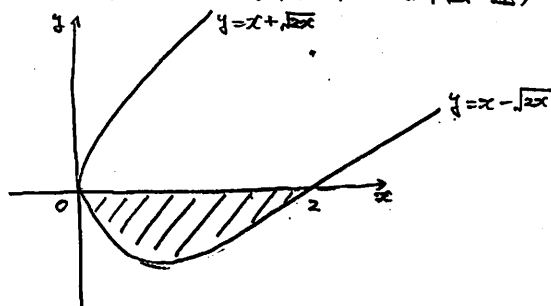
$$y = x - \sqrt{2x} \quad \text{に} \quad x > 0 \quad \text{で}$$

$$y' = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x} - 1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2} \right)$$



x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
y'	-		0	+
y	0		$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よて $(x-y)^2 = 2x$ の概形は下図の通り



求める面積 S は

$$S = \int_0^2 (-x + \sqrt{2x}) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

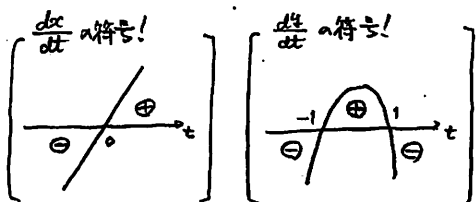
$$= -2 + \frac{8}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

t を媒介変数とするとき $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ で表される曲線を図示せよ。
また、この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

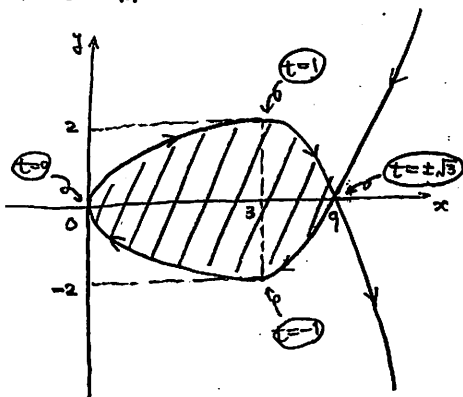
$$x=3t^2, \quad y=3t-t^3$$

$$\frac{dx}{dt}=6t, \quad \frac{dy}{dt}=3-3t^2$$



t	$(-\infty) \dots -1 \dots 0 \dots 1 \dots (\infty)$
$\frac{dx}{dt}$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$\frac{dy}{dt}$	$- \quad 0 \quad + \quad + \quad 0 \quad -$
(x, y)	$(\infty, \infty) \swarrow (3, -2) \nwarrow (0, 0) \nearrow (3, 2) \searrow (\infty, -\infty)$

求める曲線の概形は下図の通り



$$\left(\begin{array}{l} 3t-t^3=0 \quad \text{より} \\ t(t^2-3)=0 \\ t=0, \pm\sqrt{3} \\ t=\pm\sqrt{3} \text{ のとき } x=9 \end{array} \right)$$

$$f(t)=3t^2, \quad g(t)=3t-t^3$$

とおく。

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-t)=3t^2=f(t) \\ g(-t)=-3t+t^3=-g(t) \end{array} \right.$$

より、曲線は x 軸対称である。

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^9 y \, dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3t-t^3) \cdot 6t \, dt \\ &= 12 \int_0^{\sqrt{3}} (3t^2-t^4) \, dt \\ &= 12 \left[t^3 - \frac{1}{5}t^5 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 12 \left(3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{5} \right) \\ &= 12 \times \frac{6\sqrt{3}}{5} \\ &= \frac{72\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

(1) a を正の定数とする。関数 $f(x) = \frac{e^x - ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ と、

その導関数を求めよ。

(2) c を正の定数とする。 x 軸, y 軸, 直線 $x=c$ および曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)

$$y = \frac{e^x - ae^{-x}}{2}$$

とおく。

$$2y = e^x - ae^{-x}$$

$$e^{2x} - 2ye^x - a = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + a}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because e^x > 0 \\ \therefore y < \sqrt{y^2 + a} \end{array} \right)$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + a}$$

$$\therefore x = \log(y + \sqrt{y^2 + a})$$

x と y を入れ換えて

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + a})$$

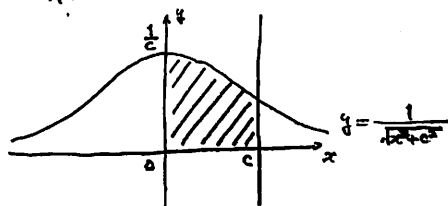
つまり

$$\underline{f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + a})}$$

$$\begin{aligned} \{f^{-1}(x)\}' &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+a} + x}{(x + \sqrt{x^2+a})\sqrt{x^2+a}} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}} \end{aligned}$$

(2)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}} > 0 \quad x \geq 0$$



求める部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x^2+c^2}} \\ &= \left[\log(x + \sqrt{x^2+c^2}) \right]_0^c \\ &= \log(c + \sqrt{2}c) - \log c \\ &= \underline{\underline{\log(\sqrt{2}+1)}} \end{aligned}$$

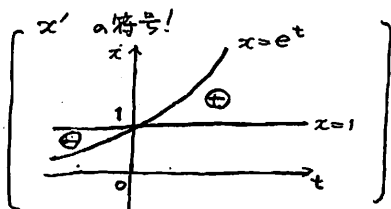
- (1) t に関する関数 $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \geq 0$) のグラフをかけ。
- (2) $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \geq 0$) のとき、 $\sqrt{x^2 - 1}$ を t を用いて表せ。
- (3) O を原点とし、点 $P(a, b)$ を双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上にある第1象限内の点とする。 $a = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$ ($s > 0$) のとき、線分 OP と双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を、 s を用いて表せ。

(1)

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$x' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{2e^t}$$

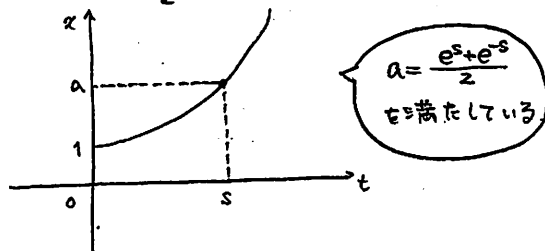
$$= \frac{(e^t + 1)(e^t - 1)}{2e^t}$$



$t \geq 0$ で $x' \geq 0$ なので

x は単調増加

よって $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ のグラフは下図の通り



(2)

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}}$$

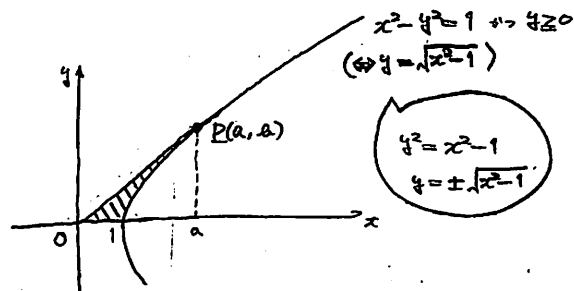
$$= \sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$= \left| \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right|$$

($\because t \geq 0$ かつ $e^t \geq e^{-t}$ より)

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

(3)



求める面積 S は

$$S = \triangle OAP - \int_1^a \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b - \int_1^a \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} ab - \int_0^s \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 - 1} - \frac{1}{4} \int_0^s (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{e^s + e^{-s}}{2} \times \frac{e^s - e^{-s}}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^s$$

$$= \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{8} - \frac{e^{2s}}{8} + \frac{s}{2} + \frac{e^{-2s}}{8}$$

$$= \frac{s}{2}$$

xy平面上に円Cと双曲線Lが次の式で与えられている。

$$C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8, \quad L: xy = 1$$

- (1) 円Cの中心をPとし、円Cと双曲線Lの共有点のうち、x座標が最も大きいものをQ、その次に大きいものをRとする。このとき、 $\angle QPR$ を求めよ。

- (2) 次の領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8 \\ xy \leq 1 \end{cases}$$

(1)

$$L: xy = 1 \quad \text{より} \quad y = \frac{1}{x}$$

$$C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

に代入して

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 = 8$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 = 8$$

$$x^2 - 2x - 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x} - 4\right)\left(x + \frac{1}{x} + 2\right) = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 4, -2.$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}, -1.$$

$$2 + \sqrt{3} > 2 - \sqrt{3} > -1$$

∴ あり。

$$P(1, 1), Q(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), R(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}) \\ \overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

∴

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = -2 - 2 = -4 \\ |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

∴

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \cos \angle QPR$$

∴

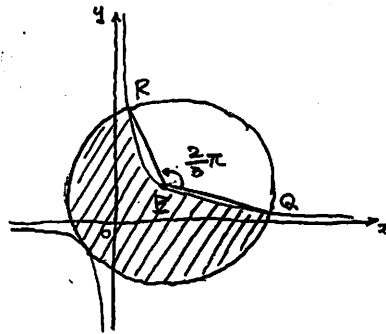
$$-4 = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \cos \angle QPR$$

$$\cos \angle QPR = -\frac{1}{2}$$

∴

$$\angle QPR = \frac{2}{3}\pi$$

(2)



求める領域は図の斜線部であり。

$$\begin{aligned} \text{求める領域} &= \text{図の斜線部} \\ &= \frac{1}{2} \times (1 + 2 + \sqrt{3}) \times (1 - (2 - \sqrt{3})) - \int_{2-\sqrt{3}}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} (3 + \sqrt{3}) (\sqrt{3} - 1) - [\log |x|]_{2-\sqrt{3}}^1 \\ &= \sqrt{3} + \log (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

∴ 求める面積Sは

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{4}{3} \pi - 2(\sqrt{3} + \log (2 - \sqrt{3})) \\ &= \frac{16}{3} \pi - 2\sqrt{3} - 2\log (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

直線 $l: 2x - \sqrt{3}y = 0$ と、媒介変数で表された曲線 $C: x = \tan t, y = \frac{1}{\cos t} \ (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$ を考える。

(1) l と C の交点の座標を求めよ。

(2) l と C および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)

l と C より

$$2 \tan t - \frac{\sqrt{3}}{\cos t} = 0$$

$$2 \sin t - \sqrt{3} = 0$$

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ で } t = \frac{\pi}{3}$$

このとき

$$x = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

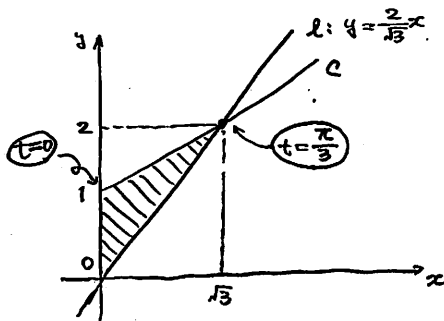
$$y = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2$$

よ、交点 $(\sqrt{3}, 2)$

(2)

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ で C は

x と y はともに t について単調増加



求める面積 S は

$$S = \text{[Area of trapezoid]} - \text{[Area of triangle]}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} y \, dx - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \, dt - \sqrt{3}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3 t} \, dt - \sqrt{3}$$

$$\left(\begin{aligned} \text{ここで} \\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^3 t} \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\cos^4 t} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{(1 - \sin^2 t)^2} \, dt \end{aligned} \right)$$

$$\left(\begin{aligned} \text{ここで} \\ \sin t = u \quad \text{とおく} \\ \cos t \, dt = du \\ \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ \hline u & 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \end{aligned} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)(1-u)} \right)^2 du$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)^2 du$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{2}{(1-u)(1+u)} + \frac{1}{(1+u)^2} \right\} du$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{(u-1)^2} + \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) + \frac{1}{(u+1)^2} \right\} du$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{u-1} - \log|1-u| + \log|1+u| - \frac{1}{u+1} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}-2} - \log \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \log \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}+2} \right\} - 0$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ 2(2+\sqrt{3}) + \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - 2(2-\sqrt{3}) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} (4\sqrt{3} + 2 \log(2+\sqrt{3}))$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})$$

よ、

$$\underline{S = \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})}$$

a を 0 でない実数とし, $f(x) = (x-a)e^{-x}$ とおく。曲線 $y=f(x)$ が原点を通る接線をただ 1 つもつとき, 次のものを求めよ。

- (1) a の値
- (2) 曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標
- (3) 曲線 $y=f(x)$ と, この曲線の原点を通る接線および y 軸で囲まれた部分の面積

(1)

接点 $(t, (t-a)e^{-t})$

とおく。

$$f'(x) = e^{-x} + (x-a)(-e^{-x})$$

$$= (-x+a+1)e^{-x}$$

$$f'(t) = (-t+a+1)e^{-t}$$

接線: $y - (t-a)e^{-t} = (-t+a+1)e^{-t}(x-t)$

この接線が原点を通るため

$$-(t-a)e^{-t} = -t(-t+a+1)e^{-t}$$

$$e^{-t} \neq 0 \text{ より}$$

$$-t+a = t^2 + (-a-1)t$$

$$t^2 - at - a = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$t^2 = a(t+1)$$

$y=t^2$ と $y=a(t+1)$ が接するといふ。

① の判別式 $D=0$ とするといふ。

$$a^2 + 4a = 0$$

$$a(a+4) = 0$$

$$a \neq 0 \text{ より } \underline{a = -4}$$

(2)

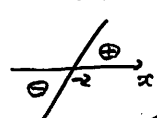
$$f(x) = (x+4)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x-3)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (x+3)e^{-x}$$

$$= (x+2)e^{-x}$$

$f''(x)$ の符号!



よって

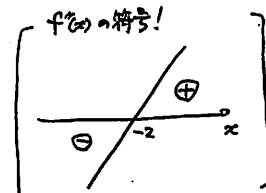
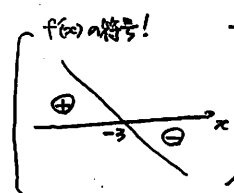
$$\underline{x = -2}$$

(3)

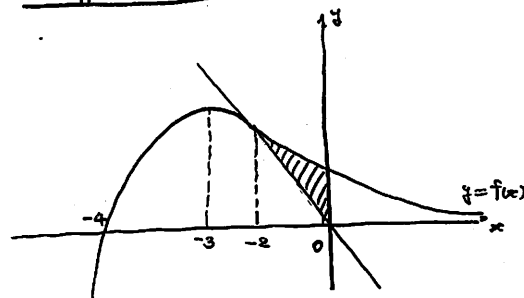
$$\textcircled{1} \text{ は } t^2 + 4t + 4 = 0$$

$$(t+2)^2 = 0$$

$$t = -2.$$



x	$\dots$	-3	$\dots$	-2	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$					



求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^0 (x+4)e^{-x} dx - \frac{1}{2} \times 2 \times 2e^2$$

$$= \int_{-2}^0 (x+4)e^{-x} dx - \frac{1}{2} \times 2 \times 2e^2$$

$$= [-(x+4)e^{-x}]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 1 \cdot e^{-x} dx - 2e^2$$

$$= -4 + 2e^2 - [e^{-x}]_{-2}^0 - 2e^2$$

$$= -4 - \{1 - e^2\}$$

$$= \underline{\underline{e^2 - 5}}$$

t を実数として、平面上の直線 $\ell_t: tx + (1-t)y = t(1-t)$ を考える。 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $x > 0, y > 0$ の範囲で ℓ_t が通過する部分を図示し、その面積を求めよ。

$x=k$ で固定すると

$$\ell_t: tk + (1-t)y = t(1-t)$$

$$(1-t)y = t(1-k-t)$$

$$0 < t < 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ より } 1-k-t > 0 \quad \textcircled{a} \quad 0 < t < 1-k$$

$$y = -\frac{k-t}{1-t} + t$$

$$= \frac{-t^2 + (1-k)t}{1-t} = f(t)$$

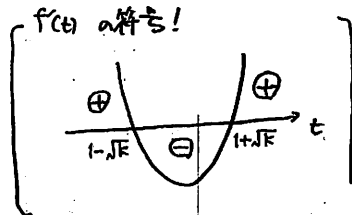
なおと

$$f(t) = \frac{(-2t+1-k)(1-t) + (-t^2 + (1-k)t)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{-2t+1-k+2t^2+(k-1)t-t^2+(-k+1)t}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{t^2 - 2t + 1 - k}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{(t-1-\sqrt{k})(t-1+\sqrt{k})}{(t-1)^2}$$



t	$(0) \dots 1-\sqrt{k} \dots (1-k)$
$f(t)$	$\dots + \quad 0 \quad - \dots$
$f(t)$	$(0) \nearrow (1-\sqrt{k})^2 \searrow (0)$

$$\left(\begin{aligned} f(1-\sqrt{k}) &= \frac{-(1-\sqrt{k})^2 + (1-k)(1-\sqrt{k})}{1-(1-\sqrt{k})} \\ &= \frac{(1-\sqrt{k})(\sqrt{k}-k)}{\sqrt{k}} \\ &= (1-\sqrt{k})^2 \end{aligned} \right)$$

$k \in x$ に戻して.

$$0 < y \leq (\sqrt{x}-1)^2$$

こゝで

$$g(x) = (\sqrt{x}-1)^2$$

なおと

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(\sqrt{x}-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

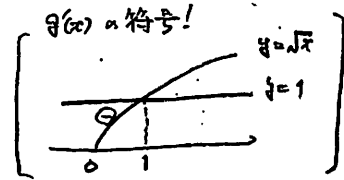
こゝで

$$1-x-t > 0 \text{ かつ } x > 0 \text{ より}$$

$$0 < x < 1-t < 1$$

つまり

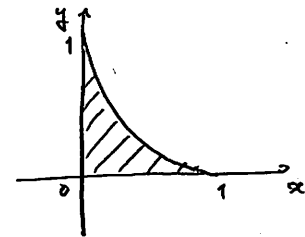
$$0 < x < 1 \text{ かつ}$$



$$g'(x) < 0 \text{ より}$$

$g(x)$ は単調減少

よって ℓ_t が通過する部分は下図の斜線部。ただし、境界は座標軸は含まず、他は含む。



よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x}-1)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ を満たす θ について, $r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$ とするとき, 座標平面上で円 $x^2 + y^2 = r(\theta)^2$ と直線 $y = (\tan \theta)x$ は2つの交点をもつ。そのうち, x 座標が正であるものを P とし, P の x 座標を $f(\theta)$, y 座標を $g(\theta)$ とする。 θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ の範囲で動かしたときの点 P の軌跡を C とする。

- (1) $f(\theta)$, $g(\theta)$ を求めよ。
- (2) $g(\theta)$ の最大値を求めよ。
- (3) 曲線 C と x 軸, 直線 $x = f(\frac{\pi}{6})$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)

$$x^2 + y^2 = 2\cos 2\theta \quad y = (\tan \theta)x$$

を連立して

$$x^2 + (\tan^2 \theta)x^2 = 2\cos 2\theta$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 \theta} = 2\cos 2\theta$$

$$x^2 = 2\cos^2 \theta \cos 2\theta$$

 $x > 0$ より

$$x = \sqrt{2\cos^2 \theta \cos 2\theta} = \sqrt{2\cos 2\theta} |\cos \theta|$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \therefore$$

$$x = \sqrt{2\cos 2\theta} \cos \theta$$

$$y = (\tan \theta) \sqrt{2\cos 2\theta} \cos \theta$$

$$= \sqrt{2\cos 2\theta} \sin \theta$$

よって

$$\begin{cases} f(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta} \cos \theta \\ g(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta} \sin \theta \end{cases}$$

(2)

$$g'(\theta) = \frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{2\cos 2\theta}} \cdot \sin \theta + \sqrt{2\cos 2\theta} \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{-2\sin 2\theta \sin \theta + 2\cos 2\theta \cos \theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$$

$$= \frac{2\cos 3\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} \geq 0$$

$$\therefore \text{したがって } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \therefore$$

 $g(\theta)$ は単調増加

$$\therefore g(\theta) \leq g(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2 \times \frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって

$$\text{Max } g(\theta) = \frac{1}{2} \quad (\theta = \frac{\pi}{6})$$

(3)

$$f'(\theta) = \frac{-2\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} \cos \theta + \sqrt{2\cos 2\theta} (-\sin \theta)$$

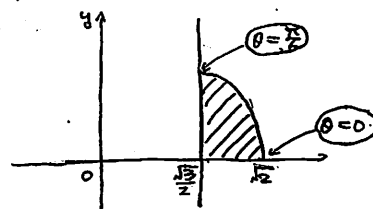
$$= \frac{-2\sin 2\theta \cos \theta - 2\cos 2\theta \sin \theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$$

$$= \frac{-2\sin 3\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} \leq 0$$

$$\therefore \text{したがって } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \therefore$$

 $f(\theta)$ は単調減少

$$f(0) = \sqrt{2}, \quad f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{2}} y \, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^0 g(\theta) f'(\theta) \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3\theta \sin \theta \, d\theta$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 4\theta - \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}$$