

a を正の定数とし、2つの放物線 $ay=x^2$ と $ax=y^2$ について考える。

- (1) 2つの放物線の交点の座標を求めよ。
 (2) 2つの放物線で囲まれた部分の面積が3となるように、 a の値を定めよ。

(1)

$$\begin{aligned} ay &= x^2 & \text{--- ①} \\ \rightarrow ax &= y^2 & \text{--- ②} \\ a(y-x) &= (x+y)(x-y) \end{aligned}$$

(i) $x=y$ のとき ① は、

$$ax = x^2$$

$$x(x-a) = 0$$

$$x = 0, a$$

$$\therefore (x, y) = (0, 0), (a, a)$$

(ii) $x \neq y$ のとき

$$a = x + y$$

$$ay = x^2$$

$$+ \rightarrow ax = y^2$$

$$a(x+y) = x^2 + y^2$$

$$a(x+y) = (x+y)^2 - 2xy$$

$$a^2 = a^2 - 2xy$$

$$xy = 0$$

$\therefore$

$$(x, y) = (0, a), (a, 0)$$

このとき ①, ② はともに

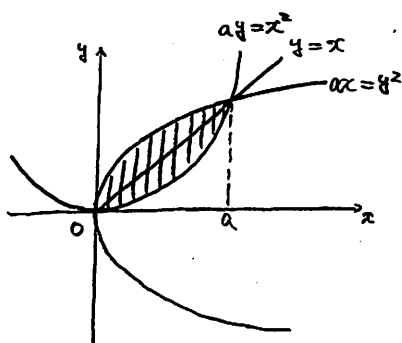
$$a^2 = 0 \quad \text{となり}$$

$a > 0$ は不合理。

(i), (ii) より

$$\underline{\text{交点 } (0, 0), (a, a)}$$

(2)



求める面積 S は

$$S = 2 \int_0^a \left(x - \frac{1}{a} x^2 \right) dx$$

$$= -\frac{2}{a} \int_0^a x(x-a) dx$$

$$= \frac{1}{3a} \times a^3$$

$$= \frac{a^2}{3}$$

$$S=3 \quad \text{より}$$

$$\frac{a^2}{3} = 3$$

$$a^2 = 9$$

$$a > 0 \quad \text{より}$$

$$\underline{a=3}$$

曲線 $C_1: y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と、正の定数 p に対して、

曲線 $C_2: y = p \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を考える。 C_1 と C_2 が原点とは異なる共有点をもつとし、この共有点の x 座標を α とする。

(1) $\cos \alpha$ を p で表せ。

(2) C_2 が、 C_1 と x 軸で囲まれた領域の面積を 2 等分するとき、 p の値を求めよ。

(1)

$$\sin 2x = p \sin x$$

$$2 \sin x \cos x = p \sin x$$

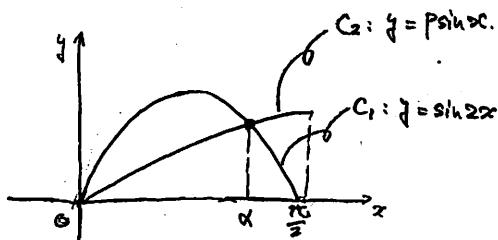
$$\sin x (2 \cos x - p) = 0$$

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad \therefore \sin x \neq 0$$

$$\cos x = \frac{p}{2}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{p}{2}$$

(2)



題意より、

$$\int_0^{\alpha} (\sin 2x - p \sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$\left[-\frac{1}{2} \cos 2x + p \cos x \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(-\frac{1}{2} \cos 2\alpha + p \cos \alpha \right) - \left(-\frac{1}{2} + p \right) = -\frac{1}{4} (-1 - 1)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2\alpha + p \cos \alpha - p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) + p \cos \alpha - p = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) + \frac{p^2}{2} - p = 0$$

$$\frac{1}{4} p^2 - p + \frac{1}{2} = 0$$

$$p^2 - 4p + 2 = 0$$

$$p = 2 \pm \sqrt{2}$$

ここで

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos x = \frac{p}{2}$$

が存在するためには

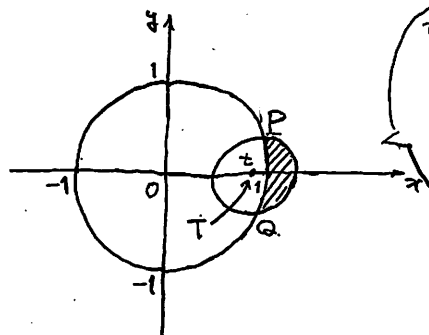
$$0 \leq \frac{p}{2} < 1 \quad \therefore$$

$$0 \leq p < 2$$

このとき

$$\underline{p = 2 - \sqrt{2}}$$

$0 \leq t \leq 1$ とする。連立不等式 $\begin{cases} (x-t)^2 + y^2 \leq 1-t^2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$ の表す領域の面積が最大になるときの t の値を求めよ。



$$\begin{aligned} t + \sqrt{1-t^2} &\geq 1 \\ \sqrt{1-t^2} &\geq 1-t \\ 1-t^2 &\geq 1-2t+t^2 \\ 2t^2-2t &\leq 0 \\ t(t-1) &\leq 0 \\ 0 &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

t	0	...	$\frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$	...	1
S'	+		0		-
S			$\nearrow$		$\searrow$

1.7

$$t = \frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$$

$t=0, 1$ のとき 領域の面積 $S=0$

なので $0 < t < 1$ としよ。

$$\begin{aligned} (x-t)^2 + y^2 &= 1-t^2 \\ \rightarrow x^2 + y^2 &= 1 \\ -2tx + t^2 &= -t^2 \\ -2tx &= -2t^2 \end{aligned}$$

$t \neq 0$ より

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

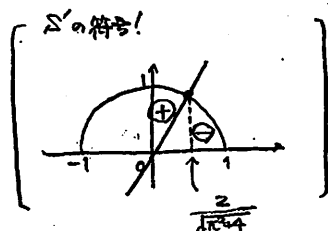
$$S = \left(\text{Area of circle centered at } (t,0) \right) - \left(\text{Area of circle centered at } (0,0) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi (1-t^2) - 2 \int_t^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} t^2 + 2 \int_1^t \sqrt{1-x^2} dx$$

$$S' = -\pi t + 2\sqrt{1-t^2}$$

$$= 2 \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{\pi}{2} t \right)$$



$$\begin{aligned} \sqrt{1-t^2} &= \frac{\pi}{2} t \quad \text{と仮定} \\ 1-t^2 &= \frac{\pi^2}{4} t^2 \\ \frac{\pi^2+4}{4} t^2 &= 1 \\ t^2 &= \frac{4}{\pi^2+4} \\ 0 &\leq t \leq 1 \quad \text{より} \\ t &= \frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}} \end{aligned}$$

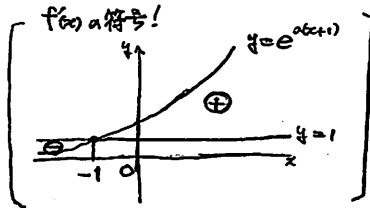
a を正の実数とする。関数 $f(x) = e^{a(x+1)} - ax$ とする。

- (1) $f(x)$ の最小値を求めよ。
- (2) 原点から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線の方程式を求めよ。
- (3) この曲線と y 軸、および (2) で求めた接線によって囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (4) $S(a)$ の最小値を求めよ。

(1)

$$f(x) = e^{a(x+1)} - ax$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{a(x+1)} - a \\ &= a(e^{a(x+1)} - 1) \end{aligned}$$



x	$\dots$	-1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow a+1 \nearrow$	

よって

$$\min f(x) = a+1 \quad (x=-1)$$

(2)

接点 $(t, e^{a(t+1)} - at)$

よって

$$f'(t) = a(e^{a(t+1)} - 1)$$

接線: $y - (e^{a(t+1)} - at) = a(e^{a(t+1)} - 1)(x - t)$

よって 原点を通るから

$$-e^{a(t+1)} + at = -at e^{a(t+1)} + at$$

$$\therefore e^{a(t+1)} \neq 0 \quad \text{よって}$$

$$-1 = -at$$

$$a \neq 0 \quad \text{よって}$$

$$t = \frac{1}{a}$$

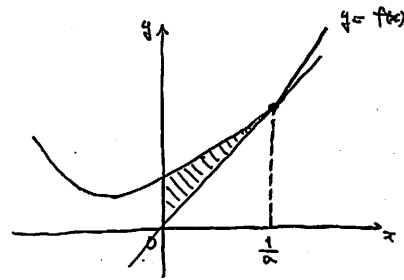
よって 接点 $(\frac{1}{a}, e^{1+a} - 1)$

$$f'(\frac{1}{a}) = a(e^{1+a} - 1)$$

よって

接線: $y = a(e^{1+a} - 1)x$

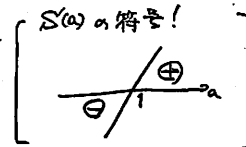
(3)



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\frac{1}{a}} (e^{a(x+1)} - ax) dx - \frac{1}{2} \times \frac{1}{a} \times (e^{1+a} - 1) \\ &= \left[\frac{1}{a} e^{a(x+1)} - \frac{a}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{e^{1+a} - 1}{2a} \\ &= \frac{1}{a} e^{1+a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} e^a - \frac{e^{1+a} - 1}{2a} \\ &= \frac{2e^{1+a} - 1 - 2e^a - e^{1+a} + 1}{2a} \\ &= \frac{e^{1+a} - 2e^a}{2a} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{(e^{1+a} - 2e^a)2a - (e^{1+a} - 2e^a) \cdot 2}{4a^2} \\ &= \frac{(e^{1+a} - 2e^a)(a-1)}{2a^2} \\ &= \frac{e^a(e-2)(a-1)}{2a^2} \end{aligned}$$



a	(0)	$\dots$	1	$\dots$
$S'(a)$	$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow \frac{e^2 - 2e}{2} \nearrow$		

よって

$$\min S(a) = \frac{e^2 - 2e}{2} \quad (a=1)$$

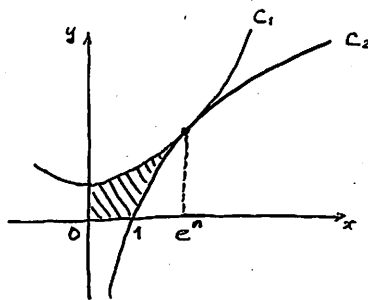
$a > 0$ とし, $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. 曲線 C_1 を $y = ax^2 + n - \frac{1}{2}$, 曲線 C_2 を $y = \log x$ とする. C_1 と C_2 が共有点 (p, q) をもち, この点で共通の接線をもつとする.

(1) a と (p, q) を n で表せ.

(2) C_1, C_2, x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S_n を n で表せ.

(3) (2) で求めた S_n に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ.

(2)



$$f(x) = ax^2 + n - \frac{1}{2}, \quad g(x) = \log x$$

とおくと

$$f'(x) = 2ax, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

接点 (p, q) で $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の

グラフが接するとき,

$$\begin{cases} f(p) = g(p) & \text{--- ①} \\ f'(p) = g'(p) & \text{--- ②} \end{cases}$$

であり,

① より

$$ap^2 + n - \frac{1}{2} = \log p \quad \text{--- ①'}$$

② より

$$2ap = \frac{1}{p}$$

$$a \neq 0 \text{ より } p^2 = \frac{1}{2a}$$

$$p > 0 \text{ より } p = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

このとき ①' は,

$$\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} = \log \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$n = -\frac{1}{2} \log 2a.$$

$$\log 2a = -2n.$$

$$\log 2a = \log e^{-2n}$$

$$2a = e^{-2n}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2e^{2n}}$$

このとき

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}}} = e^n$$

$$q = \log p = \log e^n = n$$

より

$$(p, q) = (e^n, n)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{e^n} (ax^2 + n - \frac{1}{2}) dx - \int_1^{e^n} \log x dx \\ &= \left[\frac{a}{3} x^3 + (n - \frac{1}{2})x \right]_0^{e^n} - [x \log x - x]_1^{e^n} \\ &= \frac{1}{6e^{2n}} \cdot e^{3n} + (n - \frac{1}{2})e^n - \{ne^n - e^n - (-1)\} \\ &= \frac{e^n}{6} + (n - \frac{1}{2})e^n + (1 - n)e^n - 1 \\ &= \frac{2}{3}e^n - 1 \end{aligned}$$

(3)

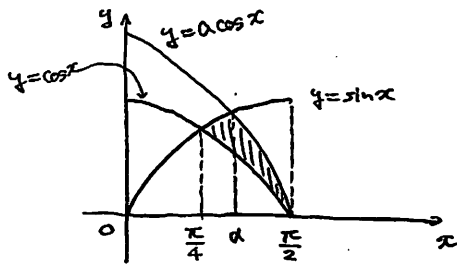
$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \frac{\frac{2}{3}e^{n+1} - 1}{\frac{2}{3}e^n - 1} \\ &= \frac{2e^{n+1} - 3}{2e^n - 3} \\ &= \frac{2e - \frac{3}{e^n}}{2 - \frac{3}{e^n}} \\ &\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \underline{\underline{e}} \end{aligned}$$

$a > 1$ に対して、 $S(a)$ を 3 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a \cos x$

$(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ で囲まれた部分の面積とする。

(1) $S(a)$ を a の式で表せ。

(2) $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ。



(1)

$$\begin{aligned}
 & a \cos x = \sin x \\
 & \therefore \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{よ) } \cos x \neq 0 \\
 & \text{よ) } a = \tan x \\
 & \text{解} \quad x = \alpha \quad \text{と} \quad \alpha < \frac{\pi}{2} \\
 & \tan \alpha = a \\
 & \begin{array}{c} \sqrt{a^2+1} \\ \alpha \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \sin x \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
 &= [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} + [a \sin x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} + a - a \sin \alpha - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} - 1 + \sqrt{2} \\
 &= -\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} + a - 1 + \sqrt{2} \\
 &= \underline{\underline{-\sqrt{a^2+1} + a - 1 + \sqrt{2}}}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{S(a)}{a-1} &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{a^2+1}}{a-1} + 1 \\
 &= \frac{1-a^2}{(a-1)(\sqrt{2} + \sqrt{a^2+1})} + 1 \\
 &= -\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{2}} + 1 \\
 &\xrightarrow{a \rightarrow 1} -\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + 1 \\
 &= \underline{\underline{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}}
 \end{aligned}$$

$a \geq 0$ とする。 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$, 直線 $y = ax$, 直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき, $S(a)$ の最小値を求めよ。
(ここで「囲まれた部分」とは, 上の曲線または直線のうち2つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。)

$$0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad \therefore$$

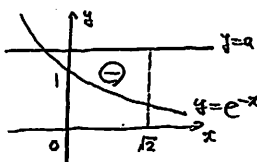
$$xe^{-x} \geq 0 \quad \therefore \quad ax \geq 0$$

で (i)

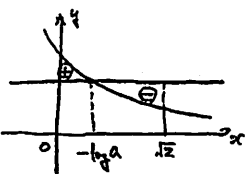
$$xe^{-x} - ax = x(e^{-x} - a)$$

$$xe^{-x} - ax \quad \text{の符号!}$$

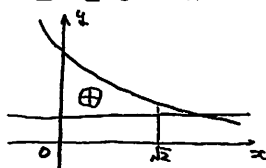
(i) $a \geq 1$ のとき



(ii) $e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ のとき



(iii) $0 \leq a \leq e^{-\sqrt{2}}$ のとき



(i) $a \geq 1$ のとき

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} (ax - xe^{-x}) dx$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-x} dx &= -xe^{-x} + \int 1 \cdot e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c \\ &= (-x-1)e^{-x} + c \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 + (-x-1)e^{-x} \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= a + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - 1$$

(ii) $e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ のとき

$$S(a) = \int_0^{-\log a} (xe^{-x} - ax) dx + \int_{-\log a}^{\sqrt{2}} (ax - xe^{-x}) dx$$

$$= \left[(-x-1)e^{-x} - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{-\log a} + \left[\frac{a}{2}x^2 + (-x-1)e^{-x} \right]_{-\log a}^{\sqrt{2}}$$

$$= (\log a - 1) \cdot a - \frac{a}{2}(\log a)^2 + 1$$

$$+ a + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - \frac{a}{2}(\log a)^2 - (-\log a + 1) \cdot a$$

$$= -2a \log a - 2a - a(\log a)^2 + 1 + a + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

$$= -a(\log a)^2 + 2a \log a - a + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$$

(iii) $0 \leq a \leq e^{-\sqrt{2}}$ のとき

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} (xe^{-x} - ax) dx$$

$$= -a - (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$$

ここで

$$e^{-\sqrt{2}} < a < 1 \quad \text{のとき}$$

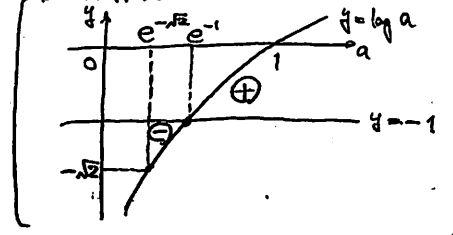
$$S'(a) = -(\log a)^2 - a \cdot 2(\log a) \cdot \frac{1}{a} + 2 \log a + 2a \cdot \frac{1}{a} - 1$$

$$= -(\log a)^2 - 2 \log a + 2 \log a + 1$$

$$= 1 - (\log a)^2$$

$$= (1 + \log a)(1 - \log a)$$

$S'(a)$ の符号!



よって

a	$0 \dots e^{-\sqrt{2}} \dots e^{-1} \dots 1 \dots$
$S'(a)$	$- \quad - \quad + \quad +$
$S(a)$	$\searrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow$

$$S(e^{-1}) = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e} \cdot (-1) - \frac{1}{e} + (\sqrt{2}+1) \cdot \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} + 1$$

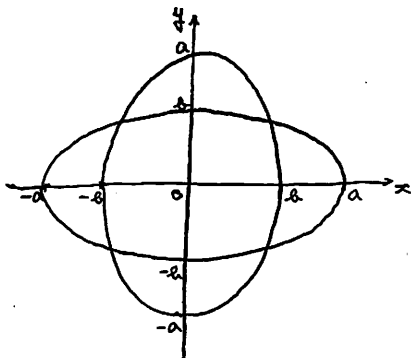
$$= \frac{\sqrt{2}+1}{e^{\sqrt{2}}} - \frac{4}{e} + 1$$

実数 a, b は $a > b > 0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域を A 、
楕円 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ で囲まれる領域を B で表す。共通部分 $A \cap B$ の面積を
 S 、和集合 $A \cup B$ の面積を T とする。

- (1) A の面積が πab であることを証明せよ。
(2) B に含まれて A に含まれない部分の面積を a, b, α を用いて表せ。

ただし、 $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (3) $T = 2S$ であるとき、 $\frac{b}{a}$ の値を求めよ。



- (1) (証明)

$$\begin{aligned} S_A &= 4 \int_0^a y \, dx \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2} \, dx \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\ &= \frac{4b}{a} \times \frac{1}{4} \pi a^2 \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

- (2)

2つの楕円は直線 $y = x$ に関して対称であり、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{と} \quad y = x \quad \text{を連立して}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$(a^2 + b^2)x^2 = a^2 b^2$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \quad \text{より}$$

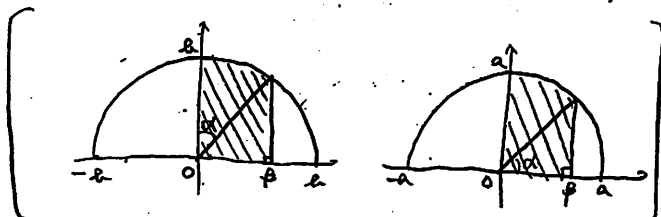
$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

第1象限の交点は

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = (p, p)$$

$b < a$ と

$$\begin{aligned} S_{B \cap A} &= 4 \left(\int_0^p \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} x^2} \, dx - \int_0^p \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2} \, dx \right) \\ &= 4 \left(\frac{a}{b} \int_0^p \sqrt{b^2 - x^2} \, dx - \frac{b}{a} \int_0^p \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \right) \end{aligned}$$



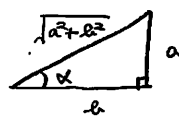
∴

$$\begin{aligned} \int_0^p \sqrt{b^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2} b^2 \alpha + \frac{1}{2} b^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} b^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} b^2 (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

∴

$$\frac{a}{b} \int_0^p \sqrt{b^2 - x^2} \, dx = \frac{ab}{2} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)$$

(また、



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^p \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{1}{2} ab \sin \alpha \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{1}{2} a^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{1}{2} a^2 (\alpha - \cos \alpha \sin \alpha) \end{aligned}$$

∴

$$\frac{a}{b} \int_0^p \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

以上より

$$\begin{aligned} S_{B \cap A} &= 4 \left\{ \frac{ab}{2} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi ab}{4} + \frac{ab}{2} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \right\} \\ &= 4 \left(ab \alpha - \frac{\pi ab}{4} \right) \\ &= ab(4\alpha - \pi) \end{aligned}$$

- (3)

$$\begin{aligned} T &= S_A + S_{B \cap A} \\ &= \pi ab + ab(4\alpha - \pi) \\ &= 4ab\alpha \end{aligned}$$

$$S = S_B - S_{B \cap A}$$

$$= S_A - S_{B \cap A}$$

$$= \pi ab - ab(4\alpha - \pi)$$

$$= ab(2\pi - 4\alpha)$$

$$T = 2S \quad \text{より}$$

$$4ab\alpha = 2ab(2\pi - 4\alpha)$$

$$ab \neq 0 \quad \text{より}$$

$$4\alpha = 4\pi - 8\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\text{つまり } \frac{u}{a} = u \text{ かつ } 0 < u < 1 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1+u^2 = \frac{4}{3}$$

$$u^2 = \frac{1}{3}$$

$$0 < u < 1 \text{ より}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{つまり } \underline{\underline{\frac{u}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}}}$$