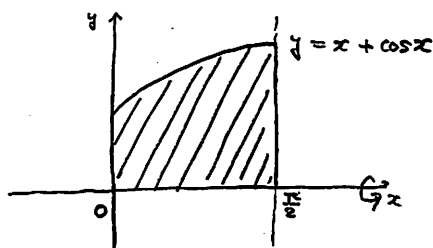


次の曲線と直線で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$$y = x + \cos x, \quad x \text{ 軸}, \quad y \text{ 軸}, \quad \text{直線 } x = \frac{\pi}{2}$$



求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \pi (x + \cos x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} (x^2 + 2x \cos x + \cos^2 x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \because \int_0^{\pi/2} x^2 dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} \\ \int_0^{\pi/2} x \cos x dx &= \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \\ \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$V = \pi \left(\frac{\pi^3}{24} + \pi - 2 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{\pi^3}{24} + \frac{5}{4} \pi - 2 \right)$$

放物線 $y=x^2-4$ ……① と、直線 $y=3x$ ……② について、次の問いに答えよ。

(1) ①と②の交点を求めよ。

(2) ①と②で囲まれた部分を、 x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

(1)

$$x^2-4=3x \quad \text{と} \quad \text{②}$$

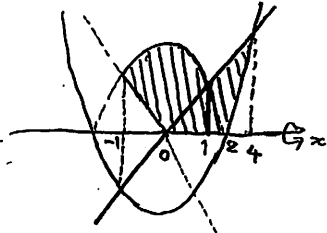
$$x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

$$x=4, -1$$

よって、交点 $(4, 12), (-1, -3)$

(2)



$$-(x^2-4)=3x \quad \text{と} \quad \text{②}$$

$$x^2+3x-4=0$$

$$(x+4)(x-1)=0$$

$$x=-4, 1$$

求める体積 V は

$$V = \text{図1} + \text{図2} - \text{図3} - \text{図4}$$

$$= \int_{-1}^1 \pi(-x^2+4)^2 dx + \int_1^4 \pi(3x)^2 dx$$

$$- \frac{1}{3} \times \pi \times 3 \times 1 - \int_2^4 \pi(x^2-4)^2 dx$$

==>

$$\int_{-1}^1 \pi(-x^2+4)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^4-8x^2+16) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 \right)$$

$$= 2\pi \times \frac{3-40+240}{15}$$

$$= 2\pi \times \frac{203}{15}$$

$$= \frac{406}{15}\pi$$

$$\int_1^4 \pi(3x)^2 dx = 9\pi \int_1^4 x^2 dx$$

$$= 9\pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^4$$

$$= 3\pi(64-1)$$

$$= 3\pi \times 63$$

$$= 189\pi$$

$$\int_2^4 \pi(x^2-4)^2 dx = \pi \int_2^4 (x^4-8x^2+16) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right]_2^4$$

$$= \pi \left(\frac{1024-32}{5} - \frac{8}{3} \times (64-8) + 16(4-2) \right)$$

$$= \pi \left(\frac{992}{5} - \frac{448}{3} + 32 \right)$$

$$= \pi \times \frac{2976-2240+480}{15}$$

$$= \frac{1216}{15}\pi$$

$$V = \frac{406}{15}\pi + 189\pi - 3\pi - \frac{1216}{15}\pi$$

$$= 186\pi - \frac{810}{15}\pi$$

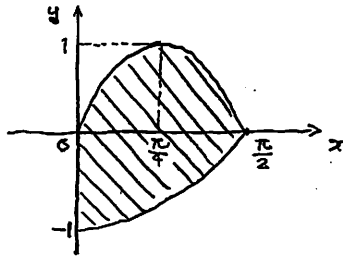
$$= 186\pi - 54\pi$$

$$= \underline{\underline{132\pi}}$$

連立不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-\cos x \leq y \leq \sin 2x$ の表す領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 領域 D の面積を求めよ。
- (3) 領域 D を x 軸の周りに 1 回転したときにできる立体の体積を求めよ。

(1)



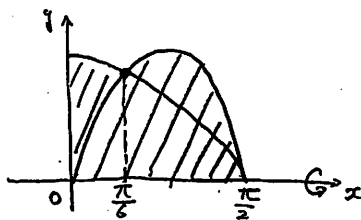
領域 D は図の斜線部
ただし、境界を含む。

(2)

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} (\sin 2x + \cos x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

(3)



$$\cos x = \sin 2x \quad \geq 1$$

$$\cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos x \neq 0 \quad \text{より}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/6} \pi \cos^2 x dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \pi \sin^2 2x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/6} + \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi(4\pi + 3\sqrt{3})}{16}}} \end{aligned}$$

- (1) y を x の式で表せ。
- (2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。
- (3) D を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$$y = \sin 2t$$
$$= 2 \sin t \cos t$$

$\therefore \cos t = \sqrt{1-x^2}$

$$y = 2x\sqrt{1-x^2}$$

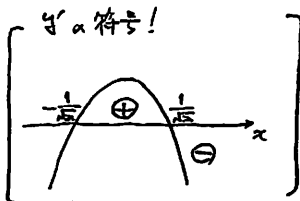
$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \tau$$
 α は τ について単調増加で、

$0 \leq x \leq 1.$

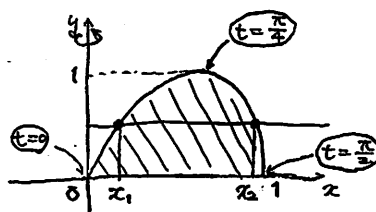
このとき $\psi \geq 0$ であり,

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2x \sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= - \int_0^1 (-2x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= - \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= - \frac{2}{3} (0-1) \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2-2x^2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-4x^2+2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$


x	0	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\dots$	1
y			+	0	-
y	0	$\nearrow$		1	$\searrow$ 0



求める体積 V は

$$V = \int_0^1 \pi x_2^2 dy_1 - \int_0^1 \pi x_1^2 dy_2$$

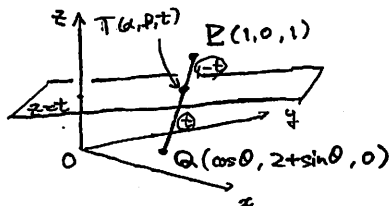
$$\left(\begin{array}{l} z = z'' \\ y = \sin 2t \text{ and} \\ dy = 2 \cos 2t \, dt \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 t \cos 2t \, dt - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos 2t \, dt \\ &= -2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t \cos 2t \, dt \\ &= -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \cdot \cos 2t \, dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2t - \cos 2t) \, dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 4t}{2} - \cos 2t \right) dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

xyz空間内の点 $P(1, 0, 1)$ と, xy 平面上の円 $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$ に属する点 $Q(\cos\theta, 2+\sin\theta, 0)$ を考える。

- (1) 直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を (α, β, t) とするとき, $\alpha^2 + \beta^2$ を t と θ で表せ。
- (2) 線分 PQ を z 軸の周りに1回転させてできる曲面と平面 $z=0, z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。
- (3) Q が C 上を1周するとき, (2) で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。

(1)



$T(\alpha, \beta, t)$ とおく。

$$\begin{aligned}\vec{OT} &= \frac{(1-t)\vec{OQ} + t\vec{OP}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 2+\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)\cos\theta + t \\ (1-t)(2+\sin\theta) \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = (1-t)\cos\theta + t \\ \beta = (1-t)(2+\sin\theta) \end{cases}$$

が成り立ち。

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (1-t)(2+\sin\theta + \cos\theta) + t \\ &= (-1 - \sin\theta - \cos\theta)t + (2 + \sin\theta + \cos\theta) \\ \alpha\beta &= (1-t)^2 (2\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) \\ &\quad + t(1-t)(2 + \sin\theta) \\ &= (1-2t+t^2)(2\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) \\ &\quad + (t-t^2)(2 + \sin\theta) \\ &= (-2 - \sin\theta + 2\cos\theta + \sin\theta\cos\theta)t^2 \\ &\quad + (2 + \sin\theta - 4\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta)t \\ &\quad + (2\cos\theta + \sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

よ)

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\cos\theta)t^2 \\ &\quad - 2(\sin\theta + \cos\theta + 1)(\sin\theta + \cos\theta + 2)t \\ &\quad + (4 + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 4\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 4\cos\theta) \\ &\quad + (4 + 2\sin\theta - 4\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta)t^2 \\ &\quad + (-4 - 2\sin\theta + 8\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta)t \\ &\quad + (-4\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= (6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta)t^2 \\ &\quad - 2(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + 3\sin\theta + 3\cos\theta + 2)t \\ &\quad + (-4 - 2\sin\theta + 8\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta)t \\ &\quad + (5 + 4\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta)t^2 + (-10 - 8\sin\theta + 2\cos\theta)t + (5 + 4\sin\theta)$$

(2)

求める体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 \pi(\alpha^2 + \beta^2) dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}(6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta)t^3 + (-5 - 4\sin\theta + \cos\theta)t^2 + (5 + 4\sin\theta)t \right]_0^1 \\ &= \pi \left(2 + \frac{4}{3}\sin\theta - \frac{2}{3}\cos\theta - 5 - 4\sin\theta + \cos\theta + 5 + 4\sin\theta \right) \\ &= \pi \left(2 + \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{1}{3}\cos\theta \right)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}V &= \pi \left(2 + \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{1}{3}\cos\theta \right) \\ &= \pi \left(2 + \frac{\sqrt{17}}{3}\cos(\theta + \alpha) \right)\end{aligned}$$

∵ $\cos$

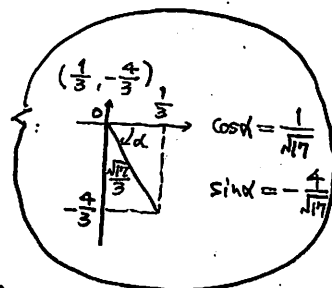
$$-1 \leq \cos(\theta + \alpha) \leq 1$$

よ)

$$\pi \left(2 - \frac{\sqrt{17}}{3} \right) \leq \pi \left(2 + \frac{\sqrt{17}}{3}\cos(\theta + \alpha) \right) \leq \pi \left(2 + \frac{\sqrt{17}}{3} \right)$$

∴ π

$$\begin{cases} \text{Max } V = \left(2 + \frac{\sqrt{17}}{3} \right) \pi \\ \text{min } V = \left(2 - \frac{\sqrt{17}}{3} \right) \pi \end{cases}$$



(1) 定積分 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$ を求めよ。(2) 不等式 $x^2 + y^2 + \log(1+z^2) \leq \log 2$ の定める立体の体積を求めよ。

(1)

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$\left(\begin{array}{l} z=t \\ t = \tan \theta \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \end{array} \right) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$= [t]_0^1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{\pi}{4}}}$$

(2)

 $z=t$ で固定すると

$$x^2 + y^2 + \log(1+t^2) \leq \log 2$$

$$x^2 + y^2 \leq \log 2 - \log(1+t^2)$$

$$x^2 + y^2 \leq \log \frac{2}{1+t^2}$$

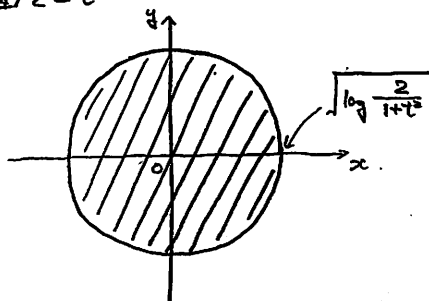
これを満たす領域が存在するためには

$$\frac{2}{1+t^2} > 1 \quad \text{より}$$

$$1+t^2 < 2$$

$$t^2 - 1 < 0$$

$$-1 < t < 1$$

平面 $z=t$  $z=t$ における断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \log \frac{2}{1+t^2}$$

よって、求める体積 V は

$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 \log \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\log 2 - \log(1+t^2)) dt$$

$$V = 2\pi \log 2 - 2\pi \int_0^1 \log(1+t^2) dt$$

$$= 2\pi \log 2 - 2\pi \left\{ \left[t \log(1+t^2) \right]_0^1 - \int_0^1 t \frac{2t}{1+t^2} dt \right\}$$

$$= 2\pi \log 2 - 2\pi \left\{ \log 2 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \right\}$$

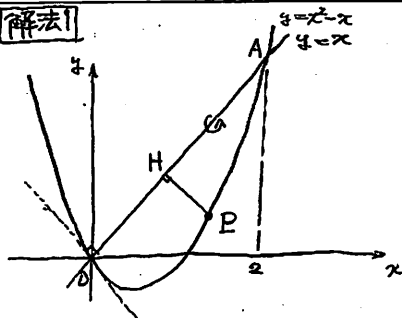
$$= 2\pi \log 2 - 2\pi \left(\log 2 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2\pi \left(\log 2 - \log 2 + 2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\pi(4-\pi)}}$$

放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解法1



$$y=x^2-x$$

$$y=x-1$$

$$y(x=0) = -1$$

$$V = \int_0^{2\sqrt{2}} \pi PH^2 dOH$$

∵ r

$$P(x, x^2-x) \text{ とおくと}$$

$$PH = \frac{|x - x^2 + x|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2x - x^2}{\sqrt{2}}$$

$$OP^2 = x^2 + (x^2-x)^2$$

$$= x^4 - 2x^3 + 2x^2$$

$$\triangle OPH \text{ 中 } \angle PHO = 90^\circ \text{ より}$$

$$OH = \sqrt{OP^2 - PH^2}$$

$$= \sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - \frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}x^4}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$dOH = \sqrt{2}x dx$$

OH	0	→	$2\sqrt{2}$
x	0	→	2

$$V = \pi \int_0^2 \frac{(2x-x^2)^2}{2} \cdot \sqrt{2}x dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^2 (x^5 - 4x^4 + 4x^3) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + x^4 \right]_0^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{128}{5} + 16 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \times \frac{160 - 384 + 240}{15}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \times \frac{16}{15}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}$$

解法2

$$y=x^2-x \text{ のグラフ上の点 } (x, y) \text{ を}$$

原点まわりに -45° 回転した点 (X, Y)

とすると

$$X + Yi = (x + yi)(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))$$

$$= \left\{ x + (x^2-x)i \right\} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ x - xi + (x^2-x)i + (x^2-x)i \right\}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^2-2x}{\sqrt{2}}i$$

$$\begin{cases} X = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{x^2-2x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

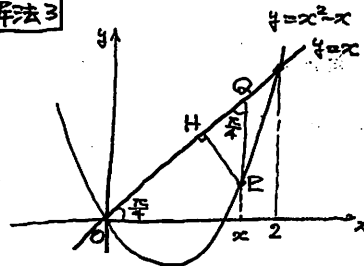
よって

$$V = \int_0^{2\sqrt{2}} \pi Y^2 dX$$

$$= \pi \int_0^2 \frac{(x^2-2x)^2}{2} \cdot \sqrt{2}x dx$$

(後は同様)

解法3



$$V = \int_0^{2\sqrt{2}} \pi PH^2 dOH$$

∵ r

$$f(x) = x - (x^2-x)$$

$$= -x^2 + 2x$$

とおくと

$$PH = PQ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$$

$$QH = PQ \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$$

∵ θ より

$$OH = OQ - QH$$

$$= \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$$

$$dOH = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} f'(x) \right) dx$$

$$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} (-2x+2) \right) dx$$

$$= \sqrt{2}x dx$$

OH	0	→	$2\sqrt{2}$
x	0	→	2

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{2} (-x^2 + 2x)^2 \sqrt{2} x \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^2 x (x^2 - 2x)^2 \, dx$$

(後は同じ)

a を正の定数とする。 xy 座標平面において、曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ と、直線 $x+y=a$ とで囲まれた部分を D とおく。

(1) D の概形をかき、その面積を求めよ。

(2) 直線 $x+y=a$ を軸として、 D を1回転してできる図形の体積を求めよ。

(1)

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad \text{より}$$

$$\sqrt{y} = -\sqrt{x} + \sqrt{a}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{y} \geq 0 \quad \text{より} \\ -\sqrt{x} + \sqrt{a} \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq \sqrt{a} \\ \text{よって } 0 \leq x \leq a \end{array} \right)$$

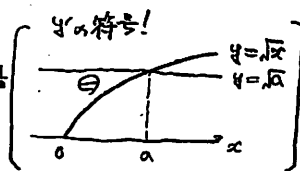
$$y = x - 2\sqrt{ax} + a$$

$$0 < x < a \quad \text{の時}$$

$$y' = 1 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{a}{x}} = 1 - \sqrt{a} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}} < 0$$



$$y'' = -\sqrt{a} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} > 0$$

よって $0 < x < a$ のとき y のグラフは

単調減少かつ下に凸である。

また、

$$y = x - 2\sqrt{ax} + a \quad \text{と} \quad x + y = a$$

を連立すると

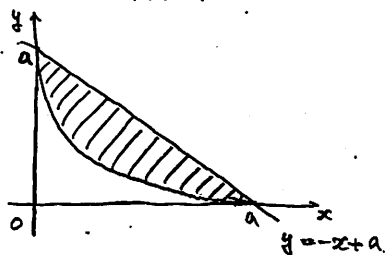
$$x + x - 2\sqrt{ax} + a = a$$

$$2x - 2\sqrt{ax} = 0$$

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{a}) = 0$$

$$x = 0, a$$

よって D は図の斜線部。



求める面積 S は、

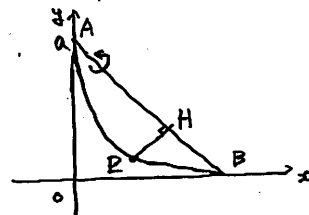
$$S = \frac{1}{2} \times a \times a - \int_0^a (x - 2\sqrt{ax} + a) dx$$

$$= \frac{1}{2} a^2 - \left[\frac{1}{2} x^2 - 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3} x\sqrt{x} + ax \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2} a^2 - \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{4}{3} a^2 + a^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} a^2$$

(2)



求める体積 V は

$$V = \int_0^a \pi PH^2 dAH$$

ここで

$P(x, y)$ とおくと、

$$PH = \frac{|x + y - a|}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |x + x - 2\sqrt{ax} + a - a|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |2x - 2\sqrt{ax}|$$

$$= \sqrt{2} |x - \sqrt{ax}|$$

$$AE^2 = x^2 + (y-a)^2$$

$$= x^2 + (x - 2\sqrt{ax})^2$$

$$= 2x^2 - 4\sqrt{a}x\sqrt{x} + 4ax$$

$\triangle AEH$ の $\angle E$ は直角より

$$AH^2 = AE^2 - PH^2$$

$$= (2x^2 - 4\sqrt{a}x\sqrt{x} + 4ax) - 2(x^2 - 2\sqrt{a}x\sqrt{x} + ax)$$

$$= 2ax$$

$AH > 0$ より

$$AH = \sqrt{2ax}$$

$$dAH = \sqrt{2a} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2x}} dx$$

AH	$0 \rightarrow \sqrt{2a}$
x	$0 \rightarrow a$

$$V = \pi \int_0^a 2(x^2 - 2\sqrt{a}x\sqrt{x} + ax) \cdot \sqrt{\frac{a}{2x}} dx$$

$$= \sqrt{2a} \pi \int_0^a (x\sqrt{x} - 2\sqrt{a}x + a\sqrt{x}) dx$$

$$= \sqrt{2a} \pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \sqrt{a} x^2 + \frac{2}{3} a x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$

$$= \sqrt{2a} \pi \left(\frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} a^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$= \sqrt{2a} \pi \times \frac{6 - 15 + 10}{15} a^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{15} \pi a^{\frac{5}{2}}$$

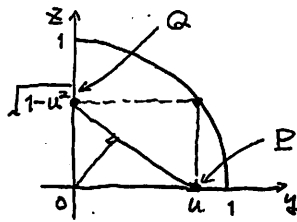
xyz 空間内に2点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が0から1まで動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸の周りに1回転させて得られる立体の体積を求めよ。

(1)

平面 $x=u$



点 $(u, 0, 0)$ と線分 PQ の距離 d を求.

$$S(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} u \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{2} \times 1 \times d$$

$$\therefore d = u \sqrt{1-u^2}$$

(2)

(i) $u \leq \sqrt{1-u^2}$ のとき.

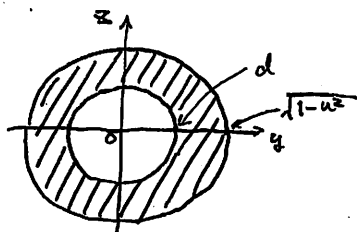
$$u^2 \leq 1-u^2$$

$$u^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき、 S は



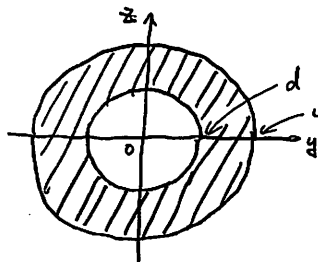
$$S = \pi(1-u^2) - \pi d^2$$

$$= \pi((1-u^2) - u^2(1-u^2))$$

$$= \pi(1-u^2)^2$$

(ii) $u \geq \sqrt{1-u^2}$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u \leq 1$$



$$\begin{aligned} S &= \pi u^2 - \pi d^2 \\ &= \pi(u^2 - u^2(1-u^2)) \\ &= \pi u^4 \end{aligned}$$

(i), (ii) より

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi(1-u^2)^2 du + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi u^4 du \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2u^2+u^4) du + \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^4 du \\ &= \pi \left(\int_0^1 u^4 du + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2u^2+1) du \right) \\ &= \pi \left\{ \left[\frac{1}{5} u^5 \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3} u^3 + u \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \end{aligned}$$