[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題1]

次の式を展開せよ。

(1) $(x-1)(x+4)(x+2)(x-3)$　　(2) $(x^2-4xy+5y^2)(x+y)(x-5y)$

(1)

$(x-1)(x+4)(x+2)(x-3)$

$= (\underbrace{x^2+x}_{A}-2)(\underbrace{x^2+x}_{A}-12)$

$= (A-2)(A-12)$

$= A^2-14A+24$

$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$= x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$

$= \underline{\underline{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}}$

(2)

$(x^2-4xy+5y^2)(x+y)(x-5y)$

$= (\underbrace{x^2-4xy}_{A}+5y^2)(\underbrace{x^2-4xy}_{A}-5y^2)$

$= (A+5y^2)(A-5y^2)$

$= A^2-25y^4$

$= (x^2-4xy)^2-25y^4$

$= \underline{\underline{x^4-8x^3y+16x^2y^2-25y^4}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題2]

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2y-2xyz-y-xy^2+x-2z$　　(2) $6x^2-xy-2y^2-7x+7y-3$

(3) x^4-13x^2+36　　(4) x^4+4

(1)

$x^2y-2xyz-y-xy^2+x-2z$

$=(-2xy-2)z+(x^2y-y-xy^2+x)$

$=-2(xy+1)z+\{yx^2+(-y^2+1)x-y\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc} y & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \times & -y & \longrightarrow & -y^2 \end{array}\right)$$

$=-2(xy+1)z+(yx+1)(x-y)$

$=\underline{\underline{(xy+1)(-2z+x-y)}}$

(2) $\boxed{\text{解法1}}$

$6x^2-xy-2y^2-7x+7y-3$

$=6x^2+(-y-7)x+(-2y^2+7y-3)$

$=6x^2+(-y-7)x-(2y^2-7y+3)$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & \times & -3 & \longrightarrow & -6 \end{array}\right)$$

$=6x^2+(-y-7)x-(2y-1)(y-3)$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & & y-3 & \longrightarrow & 3y-9 \\ 3 & \times & -(2y-1) & \longrightarrow & \underline{-4y+2}\ (+ \\ & & & & -y-7 \end{array}\right)$$

$=\underline{\underline{(2x+y-3)(3x-2y+1)}}$

$\boxed{\text{解法2}}$

$6x^2-xy-2y^2-7x+7y-3$　　$t=1$ としている

$=(6x^2-xy-2y^2)t^2+(-7x+7y)t-3$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 3 & & -2y & \longrightarrow & -4y \\ 2 & \times & y & \longrightarrow & 3y \end{array}\right)$$

$=(3x-2y)(2x+y)t^2+(-7x+7y)t-3$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 3x-2y & & 1 & \longrightarrow & 2x+y \\ 2x+y & \times & -3 & \longrightarrow & \underline{-9x+6y}\ (+ \\ & & & & -7x+7y \end{array}\right)$$

$=\big((3x-2y)t+1\big)\big((2x+y)t-3\big)$

$=\underline{\underline{(3x-2y+1)(2x+y-3)}}$

(3)

x^4-13x^2+36

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=\underline{\underline{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}}$

(4)

x^4+4

$=(x^2+2)^2-4x^2$

$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

$=\underline{\underline{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題3]

次の式を計算せよ。ただし，$i^2=-1$ である。

(1) $\sqrt{8}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$　　(2) $\dfrac{5-i}{1-3i}+\dfrac{9+5i}{3+i}$　　(3) $(\sqrt{3}-i)^6$

(1)

$$\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=2\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$=\underline{\underline{0}}$$

(2)

$$\frac{5-i}{1-3i}+\frac{9+5i}{3+i}$$

$$=\frac{(5-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}+\frac{(9+5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$=\frac{5+15i-i-3i^2}{1-9i^2}+\frac{27-9i+15i-5i^2}{9-i^2}$$

$$=\frac{8+14i}{10}+\frac{32+6i}{10}$$

$$=\frac{40+20i}{10}$$

$$=\underline{\underline{4+2i}}$$

(3) $\boxed{\text{解法1}}$

$$(\sqrt{3}-i)^6$$

$$={}_6C_0(\sqrt{3})^6(-i)^0+{}_6C_1(\sqrt{3})^5(-i)^1+{}_6C_2(\sqrt{3})^4(-i)^2$$
$$+{}_6C_3(\sqrt{3})^3(-i)^3+{}_6C_4(\sqrt{3})^2(-i)^4+{}_6C_5(\sqrt{3})^1(-i)^5$$
$$+{}_6C_6(\sqrt{3})^0(-i)^6$$

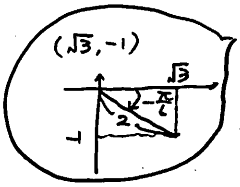
$$=27-6\times9\sqrt{3}i+15\times9i^2-20\times3\sqrt{3}i^3+15\times3i^4$$
$$-6\sqrt{3}i^5+i^6$$

$$=27-54\sqrt{3}i-135+60\sqrt{3}i+45-6\sqrt{3}i-1$$

$$=\underline{\underline{-64}}$$

$\boxed{\text{解法2}}$ (数Ⅲ)

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$



$$(\sqrt{3}-i)^6$$

$$=2^6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^6$$

$$=64\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)$$

$$=\underline{\underline{-64}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題4]

次の式を簡単にせよ。

$$\frac{4x^3+6x^2+9x}{x^2+4x+4}\div\frac{8x^3-27}{2x^2+x-6}-\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{4x^3+6x^2+9x}{x^2+4x+4}\div\frac{8x^3-27}{2x^2+x-6}-\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{4x^3+6x^2+9x}{x^2+4x+4}\times\frac{2x^2+x-6}{8x^3-27}-\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{x\cancel{(4x^2+6x+9)}}{(x+2)^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(2x-3)}}{\cancel{(2x-3)}\cancel{(4x^2+6x+9)}}-\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x+3)}$$

$$=\frac{x}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(x+2)(x+3)}-\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x^2+3x)-(x^2-4)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{3x+4}{(x+2)(x+3)}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A1]

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)+24$　　(2) $xy+xz+y^2+yz+3x+5y+2z+6$

(3) $(a-b)^2c+(b-c)^2a+(c-a)^2b+8abc$　　(4) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

(5) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

(1) 2015 愛知学院大　(2) 岐阜聖徳学園大 2010

(3) 2012 実践女子大　(4) 2016 札幌学院大　(5) 2015 静岡県大

(1)

$$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)+24$$
$$=(\underbrace{x^2-x}_{A}-2)(\underbrace{x^2-x}_{A}-12)+24$$
$$=(A-2)(A-12)+24$$
$$=A^2-14x+48$$
$$=(A-6)(A-8)$$
$$=(x^2-x-6)(x^2-x-8)$$
$$=\underline{\underline{(x-3)(x+2)(x^2-x-8)}}$$

(2)

$$xy+xz+y^2+yz+3x+5y+2z+6$$
$$=(y+z+3)x+(y^2+yz+5y+2z+6)$$
$$=(y+z+3)x+\{(y+2)z+(y^2+5y+6)\}$$
$$=(y+z+3)x+\{(y+2)z+(y+2)(y+3)\}$$
$$=(y+z+3)x+(y+2)(z+y+3)$$
$$=\underline{\underline{(y+z+3)(x+y+2)}}$$

(3)

$$(a-b)^2c+(b-c)^2a+(c-a)^2b+8abc$$
$$=(a^2-2ab+b^2)c+(b^2-2bc+c^2)a$$
$$+(c^2-2ca+a^2)b+8abc$$
$$=a^2c-2abc+b^2c+ab^2-2abc+ac^2$$
$$+bc^2-2abc+a^2b+8abc$$
$$=a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+a^2b+2abc$$
$$=(c+b)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$$
$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)(a^2+(b+c)a+bc)$$
$$=\underline{\underline{(b+c)(a+b)(a+c)}}$$

(4)

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$$
$$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc$$
$$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2$$
$$+bc^2+abc+abc$$
$$=a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+3abc$$
$$=(b+c)a^2+(c^2+b^2+3bc)a+b^2c+bc^2$$
$$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} b+c & & bc & \longrightarrow & bc \\ & \times & & & \\ 1 & & b+c & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2\ (+) \\ \hline & & & & b^2+3bc+c^2 \end{array}\right)$$

$$=((b+c)a+bc)(a+b+c)$$
$$=\underline{\underline{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}$$

(5) $\boxed{\text{解法1}}$

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$
$$=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$$
$$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$$
$$=\underline{\underline{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}$$

$\boxed{\text{解法2}}$

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$
$$=a^4+(-2b^2-2c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)$$
$$=a^4+(-2b^2-2c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$$
$$=a^4+(-2b^2-2c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$$
$$=a^4+(-2b^2-2c^2)a^2+(b^2+2bc+c^2)(b^2-2bc+c^2)$$
$$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=\underline{\underline{(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A2]

(1) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。	(愛知学院大)
(2) $\dfrac{2-\sqrt{5}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}+\dfrac{2+\sqrt{5}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ の実部と虚部を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。	(2016 東京都市大)

(1)

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$=\underline{\underline{1}}$$

(2)

$$\frac{2-\sqrt{5}i}{1+\sqrt{3}i}+\frac{2+\sqrt{5}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{5}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}+\frac{(2+\sqrt{5}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}i-\sqrt{5}i+\sqrt{15}i^2}{1-3i^2}+\frac{2+2\sqrt{3}i+\sqrt{5}i+\sqrt{15}i^2}{1-3i^2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{15}+(-2\sqrt{3}-\sqrt{5})i}{4}+\frac{2-\sqrt{15}+(2\sqrt{3}+\sqrt{5})i}{4}$$

$$=\frac{2-\sqrt{15}}{2}$$

$$\underline{\underline{(\text{実部})=\frac{2-\sqrt{15}}{2}\quad,(\text{虚部})=0}}$$

共役複素数の和
なので明らか.

[2018スタンダードＩⅡAB受 問題A3]

(1) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$ を簡単にせよ。 (2005 共立女子大)

(2) $\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{x-6}{x-4}$ を簡単にせよ。 (女子栄養大)

(1)

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\underline{\underline{x}}$$

(2)

$$\frac{x+2}{x}-\frac{x+3}{x+1}-\frac{x-5}{x-3}+\frac{x-6}{x-4}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x(x+3)}{x(x+1)}-\frac{(x-5)(x-4)}{(x-3)(x-4)}+\frac{(x-3)(x-6)}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{(x^2+3x+2)-(x^2+3x)}{x(x+1)}+\frac{-(x^2-9x+20)+(x^2-9x+18)}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{2}{x(x+1)}-\frac{2}{(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{2(x-3)(x-4)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}-\frac{2x(x+1)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{2\{(x^2-7x+12)-(x^2+x)\}}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{2(-8x+12)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{-8(2x-3)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A4]

$P=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4)$ を展開し，a，b，c のみの式で表せ。
ただし，ω は $\omega^2+\omega+1=0$ を満たす複素数とする。　(2008　鳥取大)

$$\left(\begin{aligned}&\omega^2+\omega+1=0 \quad \text{より}\\ &\omega^2=-\omega-1\\ &\omega^3=-\omega^2-\omega\\ &\quad=-(-\omega-1)-\omega\\ &\quad=1\end{aligned}\right)$$

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4)\\ &=(a+b+c)(a+b\omega+c(-\omega-1))(a+b(-\omega-1)+c\omega)\\ &=(a+b+c)((a-c)+(b-c)\omega)((a-b)+(c-b)\omega)\\ &=(a+b+c)\left\{(a-c)(a-b)+(a-c)(c-b)\omega+(b-c)(a-b)\omega-(b-c)^2\omega^2\right\}\\ &=(a+b+c)\left\{(a-b)(a-c)+(\cancel{ac}-\cancel{ab}-c^2+bc+\cancel{ab}-b^2-\cancel{ac}+bc)\omega-(b-c)^2(-\omega-1)\right\}\\ &=(a+b+c)\left\{(a-b)(a-c)+(-b^2+2bc-c^2)\omega+(b-c)^2(\omega+1)\right\}\\ &=(a+b+c)\left\{(a-b)(a-c)-(b-c)^2\omega+(b-c)^2\omega+(b-c)^2\right\}\\ &=(a+b+c)(a^2-ac-ab+bc+b^2-2bc+c^2)\\ &=\underline{\underline{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}}\end{aligned}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題1]

(1) 係数が実数の範囲で x^6+1 を因数分解せよ。	(類 岩手医大)
(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ を因数分解せよ。	(2010 専修大)

(1)

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=(x^2+1)\left\{(x^2+1)^2-3x^2\right\}$$
$$=(x^2+1)(x^2+1+\sqrt{3}x)(x^2+1-\sqrt{3}x)$$
$$=\underline{\underline{(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)}}$$

(2)

$x-y=A$, $y-z=B$, $z-x=C$

とおくと　$A+B+C=0$　であり

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$
$$=A^3+B^3+C^3$$
$$=A^3+B^3+C^3-3ABC+3ABC$$
$$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$$
$$=3ABC$$
$$=\underline{\underline{3(x-y)(y-z)(z-x)}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B5]

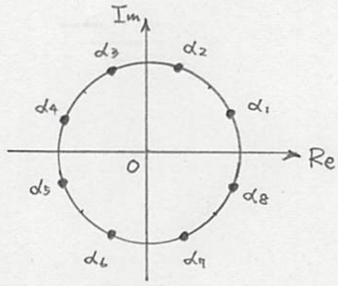
(1) 係数が実数の範囲で x^8+1 を因数分解せよ。 (類 岩手医大)

(2) 係数が実数の範囲で $a^3+b^3-3ab+1$ を因数分解せよ。 (2015 鶴見大)

(3) $(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$ を因数分解せよ。 (2012 愛知大)

(1)

$$
\begin{aligned}
&x^8+1\\
&=(x^4+1)^2-2x^4\\
&=(x^4+\sqrt{2}x^2+1)(x^4-\sqrt{2}x^2+1)\\
&=\left\{(x^2+1)^2-(2-\sqrt{2})x^2\right\}\left\{(x^2+1)^2-(2+\sqrt{2})x^2\right\}\\
&=(x^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+1)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+1)\\
&\quad\times(x^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+1)(x^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x+1)
\end{aligned}
$$



α_i $(i=1,2,3,\cdots,8)$ は虚数であるが

α_i と α_{9-i} は共役なので

$\alpha_i+\alpha_{9-i}$ と $\alpha_i\alpha_{9-i}$ は実数

つまり

$x^2-(\alpha_i+\alpha_{9-i})x+\alpha_i\alpha_{9-i}$

を因数にもつ。

(2)

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3-3ab+1\\
&=a^3+b^3+1-3ab\cdot 1\\
&=(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-b-a)
\end{aligned}
$$

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

を用いた。

$b=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
(与式)&=(a+2)(a^2-2a+1)\\
&=(a+2)(a-1)^2
\end{aligned}
$$

$a^2+b^2+1-ab-b-a$

$=a^2+(-b-1)a+b^2-b+1=0$ として

$$
\begin{aligned}
判別式\ D&=(-b-1)^2-4(b^2-b+1)\\
&=b^2+2b+1-4b^2+4b-4\\
&=-3b^2+6b-3\\
&=-3(b-1)^2\leqq 0
\end{aligned}
$$

$b=1$ のときに限り $D=0$ で完全平方式となり

$b\neq 1$ のときは完全平方式とならない。

よって

$b\neq 1$ のとき

$(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-b-a)$

$b=1$ のとき

$(a+2)(a-1)^2$

(3)

$x-y=A$, $z-y=B$ とおくと

$x-2y+z=A+B$

$$
\begin{aligned}
(与式)&=A^3+B^3-(A+B)^3\\
&=A^3+B^3-(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)\\
&=-3A^2B-3AB^2\\
&=-3AB(A+B)\\
&=-3(x-y)(z-y)(x-2y+z)
\end{aligned}
$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B6]

(1) $\{(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n\}^2-\{(9+4\sqrt{5})^n-(9-4\sqrt{5})^n\}^2$ を簡単にせよ。ただし，nは整数とする。(実践女子大)

(2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}$ を簡単にせよ。ただし，pは奇数，iは虚数単位とする。(2010 自治医科大)

(3) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ を簡単にせよ。(2006 中央大)

(1)

$9+4\sqrt{5}=\alpha$，$9-4\sqrt{5}=\beta$ とおくと

$\alpha+\beta=18$，$\alpha\beta=81-80=1$

$$
\begin{aligned}
(与式)&=(\alpha^n+\beta^n)^2-(\alpha^n-\beta^n)^2\\
&=(\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n})-(\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n})\\
&=4\alpha^n\beta^n\\
&=4(\alpha\beta)^n\\
&=\underline{\underline{4}}
\end{aligned}
$$

(2) $\boxed{解法1}$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}\\
&=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^p+\left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^p\\
&=i^p+(-i)^p\\
&=i^p-i^p\\
&=\underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{解法2}$ (数Ⅲ 複素数平面)

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

$\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ より

$$
\begin{aligned}
(与式)&=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2p}+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2p}\\
&=\cos\frac{\pi}{2}p+i\sin\frac{\pi}{2}p+\cos\left(-\frac{\pi}{2}p\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}p\right)\\
&=\cos\frac{\pi}{2}p+i\sin\frac{\pi}{2}p+\cos\frac{\pi}{2}p-i\sin\frac{\pi}{2}p\\
&=2\cos\frac{\pi}{2}p\\
&=\underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\\
&=-\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
(分子)&=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+b^3c-bc^3\\
&=(b-c)a^3-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)\\
&=(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}\\
&=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}\\
&=(b-c)\{(-a+c)b^2+(-ac+c^2)b+a^3-ac^2\}\\
&=(b-c)\{(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\}\\
&=(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}\\
&=(b-c)(c-a)(b-a)(b+c+a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(与式)&=-\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\underline{\underline{a+b+c}}
\end{aligned}
$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B7]

x を正の実数とする。$x=y+z$ で，$0 \leqq z < 1$ かつ y が整数のとき，z を x の小数部分という。$(3+2\sqrt{2})^4$ の小数部分は $1-(3-2\sqrt{2})^4$ であることを証明せよ。　（京都教育大）

（証明）

$n=(3+2\sqrt{2})^4-\{1-(3-2\sqrt{2})^4\}$

$=(3+2\sqrt{2})^4+(3-2\sqrt{2})^4-1$　とおく.

$\alpha=3+2\sqrt{2}$，$\beta=3-2\sqrt{2}$　とすると

$\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=1$　であり.

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=36-2\\&=34\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\\&=34^2-2\\&=1154\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n&=\alpha^4+\beta^4-1\\&=1153.\end{aligned}$$

よって.

$(3+2\sqrt{2})^4=1153+\{1-(3-2\sqrt{2})^4\}$ ——①

が成り立つ.

$2<2\sqrt{2}<3$　より

$0<3-2\sqrt{2}<1.$

$0<(3-2\sqrt{2})^4<1.$

つまり

$0<1-(3-2\sqrt{2})^4<1.$ ——②

①，②　より

$(3+2\sqrt{2})^4$ の小数部分は

$1-(3-2\sqrt{2})^4$　である. ∎