

を数字で埋めて x の恒等式にせよ。

$$(1) \quad x^4 - 5x^2 - 6x + 3 = (x^2 + \boxed{}x + \boxed{})(x^2 - 3x + \boxed{})$$

$$(2) \quad \frac{x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{\boxed{}}{x} + \frac{\boxed{}}{x^2} + \frac{\boxed{}}{x+1}$$

(1)

$$x^4 - 5x^2 - 6x + 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 - 3x + c)$$

として

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= x^4 - 3x^3 + cx^2 \\ &\quad + ax^3 - 3ax^2 + acx \\ &\quad + bx^2 - 3bx + bc \\ &= x^4 + (a-3)x^3 + (-3a+b+c)x^2 + (ac-3b)x + bc \end{aligned}$$

x についての恒等式 となる

$$\begin{cases} a-3=0 & \text{--- ①} \\ -3a+b+c=-5 & \text{--- ②} \\ ac-3b=-6 & \text{--- ③} \\ bc=3 & \text{--- ④} \end{cases}$$

① より $a=3$ となる

② $b+c=4$

③ $-b+c=-2$

④ $bc=3$

これを解いて

$$\underline{\underline{a=3, \quad b=3, \quad c=1}}$$

(2)

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} \quad \text{として}$$

両辺に $x^3+x^2 = x^2(x+1)$ をかけると

$$x^2+1 = ax(x+1) + b(x+1) + cx^2$$

$$x^2+1 = (a+c)x^2 + (a+b)x + b$$

x についての恒等式 となる

$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases}$$

これを解いて

$$\underline{\underline{a=-1, \quad b=1, \quad c=2}}$$

次の条件を満たす定数 a, b の値を求めよ。

(1) $x^2 + ax + b$ を $x-1, x-4$ で割った余りが、それぞれ $4, -2$ である。

(2) $ax^3 - 5x^2 - 16x + b$ は $(x-1)(2x-3)$ で割り切れる。

(1)

$x^2 + ax + b$ を $x-1, x-4$ で割った商

をそれぞれ $Q_1(x), Q_2(x)$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = (x-1)Q_1(x) + 4 & \text{--- ①} \\ x^2 + ax + b = (x-4)Q_2(x) - 2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① で $x=1$ とし $1+a+b=4$

よって $a+b=3$

② で $x=4$ とし $16+4a+b=-2$

よって $4a+b=-18$

これを解いて

$$\underline{\underline{a=-7, b=10}}$$

(2)

商 $Q(x)$ とおくと

$$ax^3 - 5x^2 - 16x + b = (x-1)(2x-3)Q(x)$$

$x=1$ とし

$$a-5-16+b=0$$

よって $a+b=21$

$x=\frac{3}{2}$ とし

$$\frac{27}{8}a - \frac{45}{4} - 24 + b = 0$$

よって $\frac{27}{8}a + b = \frac{141}{4}$

これを解いて

$$\underline{\underline{a=6, b=15}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題7]

x の多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると 8 余り, $x+3$ で割ると -7 余る。 $P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

$P(x)$ は $x-2$, $x+3$, $(x-2)(x+3)$

で割った商をそれぞれ $q_1(x)$, $q_2(x)$, $Q(x)$,

$(x-2)(x+3)$ で割った余りを $ax+b$

とおく。

$$\begin{cases} P(x) = (x-2)q_1(x) + 8 & \text{①} \\ P(x) = (x+3)q_2(x) - 7 & \text{②} \\ P(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + ax+b & \text{③} \end{cases}$$

①, ② より

$$P(2) = 8, P(-3) = -7$$

③ より

$$\begin{cases} P(2) = 2a+b \\ P(-3) = -3a+b \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} 2a+b = 8 \\ -3a+b = -7 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = 3, b = 2$$

つまり, 余り: $3x+2$

x, y, z が $x-2y+z=4$ および $2x+y-3z=-7$ を満たすとき, $ax^2+2by^2+3cz^2=18$ が常に成立するような定数 a, b, c の値を求めよ.

(2010 西南学院大)

解法1

$$\begin{cases} x-2y+z=4 & \text{--- ①} \\ 2x+y-3z=-7 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より $z = -x + 2y + 4$ --- ①'

② に代入して.

$$2x + y + 3(-x + 2y + 4) = -7$$

$$5x - 5y = 5$$

$$y = x - 1$$

①' に代入して.

$$z = -x + 2(x - 1) + 4$$

$$= x + 2$$

このとき

$$ax^2 + 2by^2 + 3cz^2 = 18 \quad \text{より}$$

$$ax^2 + 2b(x-1)^2 + 3c(x+2)^2 = 18. \quad \text{--- ③}$$

$$ax^2 + 2bx^2 - 4bx + 2b + 3cx^2 + 12cx + 12c = 18$$

$$(a+2b+3c)x^2 + (-4b+12c)x + (2b+12c) = 18$$

x についての恒等式 となるとよいので

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -4b+12c=0 \\ 2b+12c=18 \end{cases}$$

これを解いて.

$$\underline{\underline{a=-9, b=3, c=1}}$$

解法2 (③ 以降)

③ が x についての恒等式 となるためには

$x=0, 1, -2$ についても成り立つことが必要

$$x=0 \text{ とし } 2b+12c=18$$

$$b+6c=9 \quad \text{--- ④}$$

$$x=1 \text{ とし } a+27c=18 \quad \text{--- ⑤}$$

$$x=-2 \text{ とし } 4a+18b=18$$

$$2a+9b=9 \quad \text{--- ⑥}$$

④, ⑤, ⑥ を解いて

$$a=-9, b=3, c=1 \quad (\text{必要})$$

逆にこのとき.

(③ の左辺)

$$= -9x^2 + 6(x-1)^2 + 3(x+2)^2$$

$$= -9x^2 + 6x^2 - 12x + 6 + 3x^2 + 12x + 12$$

$$= 18$$

となり. 成り立つので十分.

よって

$$\underline{\underline{a=-9, b=3, c=1}}$$

$x^2 - xy - 2y^2 + ax - y + 1$ が1次式の積に因数分解されるように定数 a の値を定めよ。 (2013 中部大)

解法1

$$x^2 - xy - 2y^2 + ax - y + 1 = (x + by + c)(x + dy + \frac{1}{c})$$

を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ が存在するといふ。

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= x^2 + dx + \frac{1}{c}x \\ &\quad + bx + y + \frac{1}{c}x \\ &\quad + bx^2 + \frac{b}{c}x \\ &\quad + cx + cd + 1 \\ &= x^2 + (b+d)x + bx^2 + (c + \frac{1}{c})x + (\frac{b}{c} + cd)y + 1 \end{aligned}$$

x について「恒等式」として

$$\begin{cases} b+d = -1 & \text{①} \\ b = -2 & \text{②} \\ c + \frac{1}{c} = a & \text{③} \\ \frac{b}{c} + cd = -1 & \text{④} \end{cases}$$

①, ② より $b = -2, d = 1$.

④ に代入して

$$\frac{-2}{c} + c = -1$$

$$c^2 + c - 2 = 0$$

$$(c+2)(c-1) = 0$$

$$c = -2, 1$$

③ より

$$c = -2 \text{ のとき } a = -2 - \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$c = 1 \text{ のとき } a = 1 + 1 = 2$$

よって $a = -\frac{5}{2}, 2$

$$\Delta/4 = (-a+2)^2 - 9(a^2-4)$$

$$= a^2 - 4a + 4 - 9a^2 + 36$$

$$= -8a^2 - 4a + 40 = 0$$

$$2a^2 + a - 10 = 0$$

$$(2a+5)(a-2) = 0$$

$$a = -\frac{5}{2}, 2$$

解法2

$$f(x) = x^2 - xy - 2y^2 + ax - y + 1$$

$$= x^2 + (-y+a)x + (-2y^2 - y + 1)$$

とおく

$$f(x) = 0 \text{ の判別式 } D = \dots$$

$$D = (-y+a)^2 - 4(-2y^2 - y + 1)$$

$$= y^2 - 2ay + a^2 + 8y^2 + 4y - 4$$

$$= 9y^2 + (-2a+4)y + (a^2-4) = 0$$

これを「完全平方式」となるように a を

$$D = 0 \text{ の判別式 } D' = 0$$

となるように。

$f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 + (10 - 2\sqrt{2})x + 23$ とする。実数 α に対して、 $f(x)$ を $x^2 + \alpha$ で割ったときの余りを求めよ。
 さらに、このことを用いて $f(x)$ を実数の範囲で因数分解せよ。 (2002 横浜市立大)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 2 & 10-\alpha & \\
 1 & 0 & \alpha &) & 1 & 2 & 10 & 10-2\sqrt{2} & 23 \\
 & & 1 & 0 & \alpha & & & & \\
 \hline
 & & & 2 & 10-\alpha & 10-2\sqrt{2} & 23 \\
 & & & 2 & 0 & 2\alpha & \\
 \hline
 & & & & 10-\alpha & 10-2\sqrt{2}-2\alpha & 23 \\
 & & & & 10-\alpha & 0 & 10\alpha-\alpha^2 \\
 \hline
 & & & & & 10-2\sqrt{2}-2\alpha & 23-10\alpha+\alpha^2
 \end{array}
 \end{array}$$

よ、て、

$$\text{余り} : (-2\alpha + 10 - 2\sqrt{2})x + (\alpha^2 - 10\alpha + 23)$$

$f(x)$ が $x^2 + \alpha$ で割り切れるとき、

$$(-2\alpha + 10 - 2\sqrt{2})x + (\alpha^2 - 10\alpha + 23) = 0$$

を満たす α が存在する。

x について α の恒等式 α として

$$\begin{cases}
 -2\alpha + 10 - 2\sqrt{2} = 0 & \text{--- ①} \\
 \alpha^2 - 10\alpha + 23 = 0 & \text{--- ②}
 \end{cases}$$

$$\text{① より } \alpha = 5 - \sqrt{2}$$

$$\alpha - 5 = -\sqrt{2}$$

両辺を2乗して

$$\alpha^2 - 10\alpha + 25 = 2$$

$$\alpha^2 - 10\alpha + 23 = 0$$

$$\text{よ、て } \alpha = 5 - \sqrt{2} \text{ は}$$

①, ② をともに満たす。

つまり

$$f(x) \text{ は } x^2 + \alpha = x^2 + 5 - \sqrt{2} \text{ で割り切れる}$$

$$f(x) = (x^2 + \alpha)(x^2 + 2x + 10 - \alpha)$$

$$= (x^2 + 5 - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 5 + \sqrt{2})$$

ここで

$$x^2 + 5 - \sqrt{2} = 0, \quad x^2 + 2x + 5 + \sqrt{2} = 0$$

α 判別式をそれぞれ D_1, D_2 とおくと、

$$D_1/4 = -5 + \sqrt{2} < 0$$

$$\begin{aligned}
 D_2/4 &= 1 - (5 + \sqrt{2}) \\
 &= -4 - \sqrt{2} < 0
 \end{aligned}$$

となり、これ以上 因数分解

はできない。

よ、て

$$\underline{f(x) = (x^2 + 5 - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 5 + \sqrt{2})}$$

x の多項式 $4x^3 - 2x^2 - 9x + 7$ を x の多項式 A で割ると、その商が B で余りが $x+1$ となる。また、 A と B の和は $2x^2 + 4x - 5$ である。このとき、 A と B を求めよ。

(2003 岩手大)

題意より

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x^2 - 9x + 7 = AB + x + 1 \\ A + B = 2x^2 + 4x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = 4x^3 - 2x^2 - 10x + 6 \\ A + B = 2x^2 + 4x - 5 \end{cases}$$

A と B を解にもつ 2次方程式は

$$t^2 - (2x^2 + 4x - 5)t + 4x^3 - 2x^2 - 10x + 6 = 0$$

$$t^2 + (-2x^2 - 4x + 5)t + 2(2x^3 - x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \frac{3}{2} & 2 & -1 & -5 & 3 \\ & & 3 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$t^2 + (-2x^2 - 4x + 5)t + (2x - 3)(2x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \times & -2x + 3 \longrightarrow -2x + 3 \\ 1 & \times & -2x^2 - 2x + 2 \longrightarrow \frac{-2x^2 - 2x + 2}{-2x^2 - 4x + 5} (+) \end{array} \right]$$

$$(t - 2x + 3)(t - 2x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$t = 2x - 3, 2x^2 + 2x - 2$$

ここで

A は 2次式 以上 で あるから

$$\underline{\underline{A = 2x^2 + 2x - 2, B = 2x - 3}}$$

3次式 $f(x)$ は x^3 の係数が1であり、すべての実数 x に対して

$$(x-8)f(2x) = 8(x-1)f(x)$$

を満たしている。このとき、 $f(x)$ を求めよ。

(2010 東京電機大)

解法1

$$(x^3 \text{ の係数}) = 1 \quad \text{なので}$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とできる。

$$(x-8)f(2x) = 8(x-1)f(x)$$

$$(x-8)(8x^3 + 4ax^2 + 2bx + c) = 8(x-1)(x^3 + ax^2 + bx + c)$$

$$(\text{左辺}) = 8x^4 + (4a-64)x^3 + (2b-32a)x^2 + (c-16b)x - 8c$$

$$(\text{右辺}) = 8x^4 + (8a-8)x^3 + (8b-8a)x^2 + (8c-8b)x - 8c$$

x についての恒等式 なので

$$\begin{cases} 4a-64 = 8a-8 \\ 2b-32a = 8b-8a \\ c-16b = 8c-8b \end{cases}$$

これを解いて

$$a = -14, b = 56, c = -64$$

よって

$$\underline{f(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64}$$

解法2

与等式で

$$x=1 \quad \text{とすると}$$

$$-7f(2) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$x=8 \quad \text{とすると}$$

$$0 = 8 \times 7 \times f(8)$$

$$f(8) = 0$$

$$x=2 \quad \text{とすると}$$

$$-6f(4) = 8f(2)$$

$$f(4) = 0$$

$$f(2) = f(4) = f(8) = 0 \quad \text{なので}$$

$$f(x) \text{ は } (x-2)(x-4)(x-8)$$

を因数にもつ。

x^3 の係数が1であることと合わせて

$$\underline{f(x) = (x-2)(x-4)(x-8)}$$

逆にこのとき

$$(x-8)f(2x) = (x-8)(2x-2)(2x-4)(2x-8)$$

$$= 8(x-8)(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$= 8(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$$

$$= 8(x-1)f(x)$$

となり、与等式を満たす。

よって

$$\underline{f(x) = (x-2)(x-4)(x-8)}$$

整式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ると $18x+9$ 余り, $x-2$ で割ると 9 余る。 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りを求めよ。

解法1

(2017 神奈川大)

$P(x)$ を $(x+1)^2$, $x-2$ で割った商を

それぞれ $Q_1(x), Q_2(x)$,

$(x+1)^2(x-2)$ で割った商と余りを

それぞれ $Q_3(x), ax^2+bx+c$

とすると

$$\begin{cases} P(x) = (x+1)^2 Q_1(x) + 18x+9 & \text{--- ①} \\ P(x) = (x-2) Q_2(x) + 9 & \text{--- ②} \\ P(x) = (x+1)^2(x-2) Q_3(x) + ax^2+bx+c & \text{--- ③} \end{cases}$$

① の両辺を x で微分して

$$P'(x) = 2(x+1)Q_1(x) + (x+1)^2 Q_1'(x) + 18 \quad \text{--- ④}$$

①, ②, ④ より

$$\begin{cases} P(-1) = -9 \\ P(2) = 9 \\ P'(-1) = 18 \end{cases}$$

③ の両辺を x で微分して

$$P'(x) = 2(x+1)(x-2)Q_3(x) + (x+1)^2 Q_3'(x) + (x+1)^2(x-2)Q_3'(x) + 2ax+b \quad \text{--- ⑤}$$

③, ⑤ にて

$$\begin{cases} P(-1) = a-b+c = -9 \\ P(2) = 4a+2b+c = 9 \\ P'(-1) = -2a+b = 18 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = -4, b = 10, c = 5$$

$$\text{よって、余り: } \underline{\underline{-4x^2+10x+5}}$$

解法2

$P(x)$ を $x-2$ で割った商 $Q_1(x)$,

$(x+1)^2(x-2)$ で割った商, 余りを

それぞれ $Q_2(x), ax^2+bx+c$

とすると

$$\begin{cases} P(x) = (x-2)Q_1(x) + 9 \\ P(x) = (x+1)^2(x-2)Q_2(x) + ax^2+bx+c \end{cases}$$

とできる。

$$P(2) = 9 = 4a+2b+c \quad \text{--- ⑥}$$

$$\begin{array}{r} (x-2)Q_2(x) + a \\ (x+1)^2 \overline{) (x+1)^2(x-2)Q_2(x) + ax^2+bx+c} \\ \underline{(x+1)^2(x-2)Q_2(x)} \quad \quad \quad ax^2+bx+c \\ \underline{ax^2+2ax+a} \quad \quad \quad (b-2a)x+(c-a) \end{array}$$

$$\text{余り: } (b-2a)x+(c-a) = 18x+9$$

x に >117 の恒等式より

$$\begin{cases} b-2a = 18 & \text{--- ⑦} \\ c-a = 9 & \text{--- ⑧} \end{cases}$$

⑥, ⑦, ⑧ を解いて

$$a = -4, b = 10, c = 5$$

よって

$$\underline{\underline{\text{余り: } -4x^2+10x+5}}$$

整式 $f(x)$ について、恒等式 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ が成り立つとする。

- (1) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ の値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の次数を求めよ。
- (3) $f(x)$ を決定せよ。

(1998 東京都立大)

(1)

$$x=0 \text{ とし}$$

$$f(0) = 0$$

$$x=1 \text{ とし}$$

$$f(1) = f(2) - 2 + 2$$

$$f(1) = f(2)$$

$$x=-1 \text{ とし}$$

$$f(1) = -f(0) - 2 + 2$$

$$= 0$$

よって

$$\underline{\underline{f(0) = f(1) = f(2) = 0}}$$

(2)

(1) より

$f(x)$ は $x(x-1)(x-2)$ を因数にもつ n 次式
3次式以上である。

よって

$f(x)$ は n 次式 ($n \geq 3$) とすると

$$f(x) = ax^n + \dots \quad \text{とおく}$$

$$f(x^2) = ax^{2n} + \dots$$

$$x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$$

$$= x^3 \{a(x+1)^n + \dots\} - 2x^4 + 2x^2$$

$$= ax^{n+3} + \dots \quad \left(\begin{array}{l} n \geq 3 \text{ より} \\ n+3 \geq 6 \end{array} \right)$$

最高次の項を比較して

$$2n = n+3$$

$$n = 3 \quad (n \geq 3 \text{ を満たす})$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) \text{ の次数は } 3}}$$

(3)

(2) より

$$f(x) = ax(x-1)(x-2)$$

よって

与等式より

$$\begin{aligned} ax^2(x^2-1)(x^2-2) &= x^3 \{a(x+1)x(x-1) - 2x^4 + 2x^2\} \\ &= x^3 \cdot a(x+1)x(x-1) - 2x^4 + 2x^2 \end{aligned}$$

 $x=2$ とし も成り立つので

$$a \cdot 4 \times 3 \times 2 = 8 \times a \times 3 \times 2 \times 1 - 32 + 8$$

$$24a = 48a - 24$$

$$-24a = -24$$

$$a = 1$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = x(x-1)(x-2)}}$$

- (1) $f(0)=1$ で, $f(x^2)$ が $f(x)$ で割り切れるような2次式 $f(x)$ をすべて求めよ。 (1999 防衛大)
 (2) 最高次の係数が1の整式 $P(x)$ で, 条件 $P(2)=0$, $P(0)=1$, $P(1)=2$ を満たすもののうち, 最も次数の低いものを求めよ。 (2012 立教大)

(1)

 $f(0)=1$ なる2次式 $f(x)$ は

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ とできる. } (a \neq 0)$$

 $f(x^2)$ を $f(x)$ で割った商 $g(x)$ として

$$f(x^2) = f(x)g(x)$$

 x^4 の係数と定数項に注意して

$$g(x) = x^2 + px + 1 \text{ とできる}$$

$$\begin{cases} f(x^2) = ax^4 + bx^2 + 1 \\ f(x)g(x) = (ax^2 + bx + 1)(x^2 + px + 1) \\ \quad = ax^4 + (ap + b)x^3 + (a + bp + 1)x^2 \\ \quad \quad + (b + p)x + 1 \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} ap + b = 0 & \text{--- ①} \\ a + bp + 1 = b & \text{--- ②} \\ b + p = 0 & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$\text{③より } p = -b$$

①は

$$-ab + b = 0$$

$$b(-a + 1) = 0$$

$$b = 0, a = 1$$

(i) $b = 0$ のとき

$$\text{③より } p = 0$$

$$\text{②より } a + 1 = 0$$

$$a = -1$$

$$\text{よって } f(x) = -x^2 + 1$$

(ii) $a = 1$ のとき

$$\text{②より } 1 - b^2 + 1 = b$$

$$b^2 + b - 2 = 0$$

$$(b + 2)(b - 1) = 0$$

$$b = -2, 1$$

$$\text{よって } f(x) = x^2 - 2x + 1, x^2 + x + 1$$

(i), (ii)より

$$\underline{\underline{f(x) = -x^2 + 1, x^2 - 2x + 1, x^2 + x + 1}}$$

(2) 解法1

 $P(x)$ が1次 a のとき $P(x) = x + a$ とできる条件を満たす a は存在しない。 $P(x)$ が2次 a のとき $P(x) = x^2 + ax + b$ とできる条件を満たす a, b は存在しない。 $P(x)$ が3次 a のとき $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とできる

条件より

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ c = 1 \\ 1 + a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -9 \\ c = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = -\frac{9}{2}, b = \frac{9}{2}, c = 1$$

よって

$$\underline{\underline{P(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1}}$$

解法2

 $P(x) = 0$ より

$$P(x) = (x-2)Q(x)$$

$$\begin{pmatrix} \text{よって} \\ Q(x) \text{ を } x(x-1) \text{ で割った商 } R(x) \\ \text{余り } ax + b \text{ とおく。} \\ Q(x) = x(x-1)R(x) + ax + b \end{pmatrix}$$

$$P(x) = (x-2)\{x(x-1)R(x) + ax + b\}$$

$$\begin{cases} P(0) = -2b = 1 \\ P(1) = -(a+b) = 2 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

最高次の係数が1で, 次数が最も低くなるためには $R(x) = 1$ とおくとよい。

よって

$$P(x) = (x-2)\left\{x(x-1) - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= (x-2)\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1}}$$

n を 3 以上の自然数とすると、整式 x^{2n} を x^2+x+1 で割った余りを求めると、 $n=3k$ のときは $\boxed{}$,
 $n=3k+1$ のときは $\boxed{}$, $n=3k+2$ のときは $\boxed{}$ となる。ただし、 k は自然数とする。 (2016 立命館)

x^n を x^2+x+1 で割った商 $q(x)$,

余り $ax+b$ とおくと

$$x^{2n} = (x^2+x+1)q(x) + ax+b \quad \text{--- ①}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ x^2+x+1=0 \text{ の解 } \omega \text{ とし} \\ \omega^2+\omega+1=0 \text{ より} \\ \omega^2 = -\omega-1 \\ \omega^3 = (-\omega-1)\omega \\ \quad = -\omega^2-\omega \\ \quad = \omega+1-\omega \\ \quad = 1 \end{array} \right)$$

① で $x=\omega$ とおくと

$$a\omega+b = \omega^{2n}$$

(i) $n=3k$ のとき

$$\begin{aligned} \omega^{2n} &= \omega^{6k} \\ &= (\omega^3)^{2k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって $a=0, b=1$

つまり、余り 1

(ii) $n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \omega^{2n} &= \omega^{6k+2} \\ &= (\omega^3)^{2k} \omega^2 \\ &= -\omega-1 \end{aligned}$$

よって $a=-1, b=-1$

つまり、余り $-x-1$

(iii) $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} \omega^{2n} &= \omega^{6k+4} \\ &= (\omega^3)^{2k+1} \omega \\ &= \omega \end{aligned}$$

よって $a=1, b=0$

つまり、余り x

(i) ~ (iii) より

$$\begin{cases} n=3k \text{ のとき} & 1 \\ n=3k+1 \text{ のとき} & -x-1 \\ n=3k+2 \text{ のとき} & x \end{cases}$$

多項式 $f(x)$ について、次の条件(A), (B), (C)を考える。

(A) $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ (B) $f(1-x) = f(x)$ (C) $f(1) = 1$

(1) 条件(A)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は4以下であることを示せ。

(2) 条件(A), (B), (C)をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(2008 東北大)

(1) (証明)

$f(x)$ の次数が 5以上 と仮定すると。

$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)$ の次数は 4以下 であることに矛盾。

よって、 $f(x)$ の次数は 4以下 である。

(2) 解法1

(B)より $y=f(x)$ のグラフは

直線 $x=\frac{1}{2}$ に関して対称なため

$$f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + b\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c$$

(C)より

$$f(1) = \frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c = 1$$

$$c = 1 - \frac{a}{16} - \frac{b}{4}$$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + b\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a}{16} - \frac{b}{4} \\ &= a\left(x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) \\ &\quad + b\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{a}{16} - \frac{b}{4} \\ &= ax^4 - 2ax^3 + \left(\frac{3}{2}a + b\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}a - b\right)x + 1 \end{aligned}$$

(A)より

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = a - 2ax + \left(\frac{3}{2}a + b\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}a - b\right)x^3 + x^4$$

よって

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a = -\frac{1}{2}a - b \end{cases}$$

これを解くと、

$$a = 1, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = 1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}$$

解法2

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{とおく。}$$

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

(A)より

$$a = e, \quad b = d$$

よって

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

(B)より $x=1, 2$ とし

$$f(0) = f(1), \quad f(-1) = f(2) \quad \text{であることが必要}$$

$$\begin{cases} a = a + b + c + b + a \\ a - b + c - b + a = 16a + 8b + 4c + 2b + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 & \text{--- ①} \\ 5a + 4b + c = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

(C)より

$$a + b + c + b + a = 1$$

$$2a + 2b + c = 1 \quad \text{--- ③}$$

①, ②, ③ を解いて

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 3 \quad (\text{必要})$$

このとき

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

となり、

B を満たす。(十分)

よって

$$\underline{\underline{f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}$$