

次の方程式、不等式を解け。

(1) $(\sqrt{2}-1)x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

(2) $2x^3 + x + 3 = 0$

(3) $(x^2 + 6x)^2 + 7(x^2 + 6x) - 18 = 0$

(4) $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ 2xy - (x + y) = 7 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2 - 4x - 8 \leq 0 \\ 6x^2 + 7x - 3 > 0 \end{cases}$

(1)

$$(\sqrt{2}-1)x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}-1 & & -1 & \longrightarrow -1 \\ & 1 & & \longrightarrow -\sqrt{2}+1 \\ & & -1 & \longrightarrow -\sqrt{2} \end{array} \right)$$

$$\{(\sqrt{2}-1)x - 1\}(x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, 1$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{2}+1, 1}}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = 2x^3 + x + 3 \quad \text{とき} \\ f(-1) = -2 - 1 + 3 = 0 \\ \text{から} \quad x+1 \quad \text{は 因数にも} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ & & -2 & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$f(x) = (x+1)(2x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{or} \quad 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{1-6}}{2}$$

$$\underline{\underline{x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}}}$$

(3)

$$(x^2 + 6x)^2 + 7(x^2 + 6x) - 18 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 6x - 2) = 0$$

$$(x+3)^2(x^2 + 6x - 2) = 0$$

$$x+3=0 \quad \text{or} \quad x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$x = -3, -3 \pm \sqrt{9+2}$$

$$\underline{\underline{x = -3, -3 \pm \sqrt{11}}}$$

(4)

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 & \text{--- ①} \\ 2xy - (x + y) = 7 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① + ②

$$3xy = 18 \quad \text{③} \quad xy = 6$$

① - ②

$$-xy + 2(x+y) = 4$$

$$-6 + 2(x+y) = 4$$

$$x+y = 5$$

$$x+y = 5, \quad xy = 6 \quad \text{であり}$$

 x と y を 解 に も つ 2 次 方 程 式 は

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0$$

$$t = 2, 3$$

$$\therefore \underline{\underline{\{x, y\} = \{2, 3\}}}$$

$$(5) \begin{cases} x^2 - 4x - 8 \leq 0 & \text{--- ①} \\ 6x^2 + 7x - 3 > 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① $x^2 - 4x - 8 \leq 0$

$$x^2 - 4x - 8 = 0 \quad \text{とき}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$2-2\sqrt{3} \leq x \leq 2+2\sqrt{3}$$

② $6x^2 + 7x - 3 > 0$

$$6x^2 + 7x - 3 = 0 \quad \text{とき}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & & -3 & \longrightarrow -2 \\ & 3 & & \longrightarrow 9 \\ & & -1 & \longrightarrow 1 \end{array} \right)$$

$$(3x-1)(2x+3) = 0$$

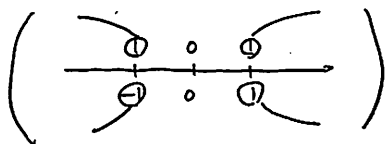
$$x = \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$$

$$x < -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3} < x$$

①, ② より

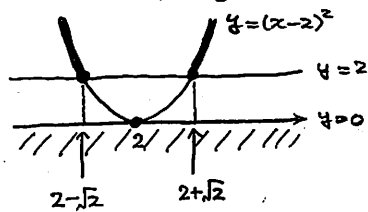
$$\underline{\underline{\frac{1}{3} < x \leq 2+2\sqrt{3}}}$$

$$(4) \quad |(x-2)^2 - 1| \geq 1$$



$$(x-2)^2 - 1 \leq -1, \quad 1 \leq (x-2)^2 - 1$$

$$(x-2)^2 \leq 0, \quad 2 \leq (x-2)^2$$



$$\underline{\underline{x \leq 2 - \sqrt{2}, \quad x = 2, \quad 2 + \sqrt{2} \leq x}}$$

方程式 $x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 9 = 0$ を満たす実数 x, y の組を求めよ。

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$x = -2y \pm \sqrt{4y^2 - 5y^2 + 6y - 9}$$

$$= -2y \pm \sqrt{-y^2 + 6y - 9}$$

$$= -2y \pm \sqrt{-(y-3)^2}$$

$$-(y-3)^2 \leq 0 \quad \text{なので}$$

$x \in \mathbb{R}$ が存在するためには

$$-(y-3)^2 = 0$$

$$y = 3$$

このとき

$$x = -6 \pm 0 = -6$$

よって

$$\underline{\underline{(x, y) = (-6, 3)}}$$

x に関する不等式 $(a-5)a^2+2(3-2x)a+8x<0$ の解が $x>1$ となるような定数 a の値を求めよ。

(2011 福井工業大)

$$(a-5)a^2+2(3-2x)a+8x<0$$

$$a^3-5a^2+6a-4ax+8x<0$$

$$(8-4a)x<-a^3+5a^2-6a$$

$$4(a-2)x>a^3-5a^2+6a$$

$$4(a-2)x>a(a^2-5a+6)$$

$$4(a-2)x>a(a-2)(a-3)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{解が } x>1 \text{ となるには} \\ a>2 \text{ となることが必要であり} \end{array} \right)$$

このとき

$$x>\frac{a(a-3)}{4} \text{ であり.}$$

$$\frac{a(a-3)}{4}=1$$

$$a^2-3a-4=0$$

$$(a-4)(a+1)=0$$

$$a=4, -1$$

$$a>2 \text{ より } \underline{\underline{a=4}}$$

(1) $y = x + \frac{1}{x}$ とおく。 x の4次方程式 $2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$ から y の2次方程式を導け。

(2) (1)を利用して、方程式 $2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$ を解け。

(2005 日本医科大)

(1)

$$2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$$

で $x=0$ は解ではないので

両辺 $x^2 (\neq 0)$ で割ると

$$2x^2 - 9x - 1 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\right\} - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$2(y^2 - 2) - 9y - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{2y^2 - 9y - 5 = 0}}$$

(2)

$$2y^2 - 9y - 5 = 0$$

$$(2y+1)(y-5) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}, 5$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}, 5$$

(i) $x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$ のとき

$$2x^2 + x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4} \end{aligned}$$

(ii) $x + \frac{1}{x} = 5$ のとき

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}}}$$

(1) 不等式 $|x-1|-5 < 3$ を満たす整数 x は何個あるか。

(2016 金沢工大)

(2) 不等式 $|4x^2-1|-|6x^2-x-2| \geq 0$ を解け。

(2009 昭和薬大)

(1)

$$|x-1|-5 < 3$$

$$-3 < |x-1|-5 < 3$$

$$2 < |x-1| < 8$$

$$-8 < x-1 < -2, \quad 2 < x-1 < 8$$

$$-7 < x < -1, \quad 3 < x < 9$$

$$x \in \mathbb{Z} \text{ より}$$

$$x = -6, -5, -4, -3, -2,$$

$$4, 5, 6, 7, 8$$

5.7

10 個

(2) 解法1

$$4x^2-1 = (2x+1)(2x-1) \text{ の符号!}$$

$$6x^2-x-2 = (3x-2)(2x+1) \text{ の符号!}$$

+	-	+	$4x^2-1$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	x
+	-	+	$6x^2-x-2$

$$(i) \quad x \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \text{ かつ}$$

$$|4x^2-1| - |6x^2-x-2| \geq 0$$

$$4x^2-1 - 6x^2+x+2 \geq 0$$

$$2x^2-x-1 \leq 0$$

$$(2x+1)(x-1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$x \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \text{ より}$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ かつ}$$

$$|4x^2-1| - |6x^2-x-2| \geq 0$$

$$4x^2-1 + 6x^2-x-2 \geq 0$$

$$10x^2-x-3 \geq 0$$

$$(5x-3)(2x+1) \geq 0$$

$$x \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5} \leq x$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ より}$$

$$\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$(iii) \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ かつ}$$

$$|4x^2-1| - |6x^2-x-2| \geq 0$$

$$-4x^2+1+6x^2-x-2 \geq 0$$

$$2x^2-x-1 \geq 0$$

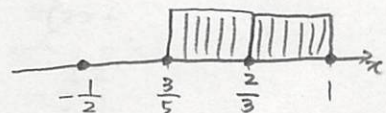
$$(2x+1)(x-1) \geq 0$$

$$x \leq -\frac{1}{2}, \quad 1 \leq x$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

(i) ~ (iii) より



$$x = -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

解法2

$$|4x^2-1| - |6x^2-x-2| \geq 0$$

$$|4x^2-1| \geq |6x^2-x-2|$$

両辺ともに0以上なので2乗して

$$(2x+1)^2(2x-1)^2 \geq (3x-2)^2(2x+1)^2$$

$$(2x+1)^2 \{ (2x-1)^2 - (3x-2)^2 \} \geq 0$$

$$(2x+1)^2 (5x-3)(-x+1) \geq 0$$

$$(2x+1)^2 (5x-3)(x-1) \leq 0$$



$$x = -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

(1) 連立方程式 $\begin{cases} x^2 = 4x + 2y \\ y^2 = 2x + 4y \end{cases}$ を解け。

(2006 倉敷 農科大)

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 11 \\ x + y - xy = 9 \end{cases}$ を解け。ただし、 $x \leq y$ とする。

(2008 上智大)

(1)

$$\begin{cases} x^2 = 4x + 2y & \text{--- ①} \\ y^2 = 2x + 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6(x + y) & \text{--- ②} \\ x^2 - y^2 = 2(x - y) \end{cases}$$

(i) $x = y$ のとき

① より

$$x^2 = 4x + 2x$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0, 6$$

$$\therefore (x, y) = (0, 0), (6, 6)$$

(ii) $x \neq y$ のとき

$$\text{②} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6(x + y) \\ x + y = 2 \end{cases}$$

よって

$$x^2 + y^2 = 12$$

$$(x + y)^2 - 2xy = 12$$

$$4 - 2xy = 12$$

$$xy = -4$$

$$x + y = 2, xy = -4 \text{ より}$$

x, y を解にもつ 2次方程式は

$$t^2 - 2t - 4 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\{x, y\} = \{1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\}$$

(i), (ii) より

$$(x, y) = (0, 0), (6, 6),$$

$$(1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}), (1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$$

(2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 11 \\ x + y - xy = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 + xy = 11 \\ x + y - xy = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 + (x + y) = 20 & \text{--- ①} \\ x + y - xy = 9 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$(x + y)^2 + (x + y) - 20 = 0$$

$$(x + y + 5)(x + y - 4) = 0$$

$$x + y = -5, 4$$

② とあわせて

$$(x + y, xy) = (-5, -14), (4, -5)$$

(i) $x + y = -5, xy = -14$ のとき

x, y を解にもつ 2次方程式は

$$t^2 + 5t - 14 = 0$$

$$(t + 7)(t - 2) = 0$$

$$t = -7, 2$$

$$x \leq y \text{ より } x = -7, y = 2$$

(ii) $x + y = 4, xy = -5$ のとき

x, y を解にもつ 2次方程式は

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t - 5)(t + 1) = 0$$

$$t = 5, -1$$

$$x \leq y \text{ より } x = -1, y = 5$$

(i), (ii) より

$$(x, y) = (-7, 2), (-1, 5)$$

2つの2次方程式 $x^2 - 3x + k - 1 = 0$, $x^2 + (k-2)x - 2 = 0$ が、共通の実数解をただ1つもつとする。このとき、 k の値とその共通解を求めよ。

(2010 甲南大)

共通解 $x = \alpha$ とおくと

$$\begin{cases} \alpha^2 - 3\alpha + k - 1 = 0 & \text{--- ①} \\ \alpha^2 + (k-2)\alpha - 2 = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① - ②

$$(-k-1)\alpha + k+1 = 0$$

$$(k+1)(-\alpha+1) = 0$$

$$k = -1 \quad \text{or} \quad \alpha = 1$$

ii) $k = -1$ かつ α は任意 α とし.

① $\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$

② $\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$

いずれかが α 判別式 D とし

$$D = 9 + 8 = 17 > 0$$

よって

共通の実数解が2個 となり

不適

(ii) $\alpha = 1$ α とし

① $1 - 3 + k - 1 = 0$

$$k = 3$$

このとき

① $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

$$(\alpha-1)(\alpha-2) = 0$$

$$\alpha = 1, 2$$

② $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$$(\alpha+2)(\alpha-1) = 0$$

$$\alpha = -2, 1$$

確かに $\alpha = 1$ をただ1つの

共通の実数解としてもつ.

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{k = 3, \quad \text{共通解 } \alpha = 1}}$$

$x^2 - (a+b^2)x - 3a + a^2 = 0$, $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$ が、ただ1つの共通解をもつという。
 a, b の値を求めよ。ただし、 a, b は実数で、 $a > 0$ とする。 (2005 皇學館大)

$$\begin{cases} x^2 - (a+b^2)x - 3a + a^2 = 0 & \text{--- ①} \\ x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① - ② より、

$$-(3a+b^2)x - 3a - b^2 = 0$$

$$(3a+b^2)(x+1) = 0$$

$a > 0, b^2 \geq 0$ より $3a+b^2 > 0$ となる

$$x = -1$$

① + ② より

$$2x^2 + (a-b^2)x + 2a^2 - 3a + b^2 = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$(\text{①} \neq \text{②}) \Leftrightarrow (\text{①} + \text{②} \neq \text{①} - \text{②})$$

③で $x = -1$ とし、

$$2 - a + b^2 + 2a^2 - 3a + b^2 = 0$$

$$2b^2 = -2a^2 + 4a - 2$$

$$b^2 = -a^2 + 2a - 1$$

ここで $b^2 \geq 0$ より

$$-a^2 + 2a - 1 \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 \leq 0$$

$$(a-1)^2 \leq 0$$

よって、 $a = 1, b = 0$

このとき

$$\text{① } x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

$$\text{② } x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

となり、ただ1つの共通解をもつ。

よって $a = 1, b = 0$

a を定数とする。3 次不等式 $x^3 - (a+2)x^2 + (2a-3)x + 3a \leq 0$ を解け。 (2017 大阪経済大)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -a-2 & 2a-3 & 3a & \\ \hline & & -1 & a+3 & -3a & \\ 3 & 1 & -a-3 & 3a & & 0 \\ \hline & & 3 & -3a & & \\ \hline 1 & -a & & & & 0 \end{array} \right)$$

$$x^3 - (a+2)x^2 + (2a-3)x + 3a \leq 0$$

$$(x+1)(x-3)(x-a) \leq 0$$

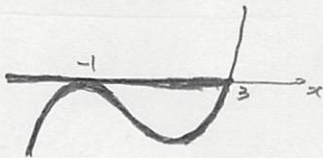
(i) $a < -1$ のとき



$$x \leq a, -1 \leq x \leq 3$$

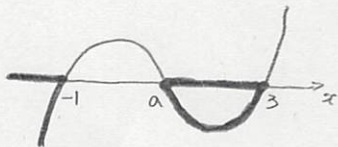
(ii) $a = -1$ のとき

$$(x+1)^2(x-3) \leq 0$$



$$x \leq 3$$

(iii) $-1 < a < 3$ のとき



$$x \leq -1, a \leq x \leq 3$$

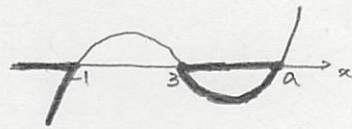
(iv) $a = 3$ のとき

$$(x+1)(x-3)^2 \leq 0$$



$$x \leq -1, x = 3$$

(v) $a > 3$ のとき



$$x \leq -1, 3 \leq x \leq a$$

(i) ~ (v) より

$$\begin{cases} a < -1 & \text{のとき} & x \leq a, -1 \leq x \leq 3 \\ a = -1 & \text{のとき} & x \leq 3 \\ -1 < a < 3 & \text{のとき} & x \leq -1, a \leq x \leq 3 \\ a = 3 & \text{のとき} & x \leq -1, x = 3 \\ a > 3 & \text{のとき} & x \leq -1, 3 \leq x \leq a \end{cases}$$

a を定数とすると、 x についての不等式 $(a-2)x^2 + (4-a)x - 2 \geq 0$ を解け。 (2003 愛知教育大)

$$(a-2)x^2 + (4-a)x - 2 \geq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc} a-2 & \times & 2 \rightarrow 2 \\ 1 & & -1 \rightarrow \frac{-a+2}{-a+4} \end{array} \right)$$

$$\{(a-2)x+2\}(x-1) \geq 0 \quad \text{--- ①}$$

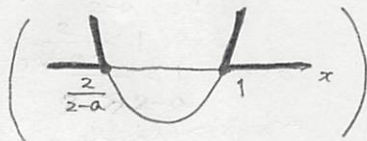
(i) $a=2$ のとき

$$\text{① } 2(x-1) \geq 0$$

$$x \geq 1$$

(ii) $a > 2$ のとき $\frac{2}{2-a} < 0$

$$\text{① } \left(x + \frac{2}{a-2}\right)(x-1) \geq 0$$



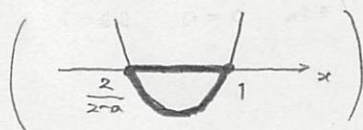
$$x \leq \frac{2}{2-a}, 1 \leq x$$

(iii) $a < 2$ のとき $\frac{2}{2-a} > 0$

$$\text{① } \left(x + \frac{2}{a-2}\right)(x-1) \leq 0$$

(iv) $\frac{2}{2-a} < 1$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 < 2-a \\ \text{つまり} & a < 0 & \text{のとき} \end{array} \right)$$



$$\frac{2}{2-a} \leq x \leq 1$$

(v) $\frac{2}{2-a} = 1$ のとき

(つまり) $a=0$ のとき

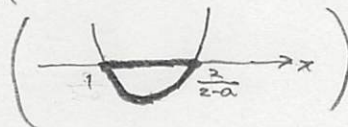
$$\text{① } (x-1)^2 \leq 0$$



$$x=1$$

(vi) $\frac{2}{2-a} > 1$ のとき

(つまり) $0 < a < 2$ のとき



$$1 \leq x \leq \frac{2}{2-a}$$

(i) ~ (vi) より

$$\left\{ \begin{array}{ll} a < 0 \text{ のとき} & \frac{2}{2-a} \leq x \leq 1 \\ a = 0 \text{ のとき} & x = 1 \\ 0 < a < 2 \text{ のとき} & 1 \leq x \leq \frac{2}{2-a} \\ a = 2 \text{ のとき} & x \geq 1 \\ a > 2 \text{ のとき} & x \leq \frac{2}{2-a}, 1 \leq x \end{array} \right.$$

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{5} \text{ とおく。}$$

(1) 2次方程式 $f(x) = x$ の2つの解 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を求めよ。また、 $f(f(\alpha))$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $f(f(x)) = x$ を解け。

(2011 日本女子大)

(1)

$$f(x) = x$$

$$x^2 - \frac{4}{5} = x$$

$$5x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 80}}{10}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{105}}{10}$$

$$\alpha < \beta \text{ より}$$

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{105}}{10}, \beta = \frac{5 + \sqrt{105}}{10}$$

α は $f(x) = x$ の解なので

$$f(\alpha) = \alpha \text{ を満たす。}$$

よって

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha = \frac{5 - \sqrt{105}}{10}$$

(2)

$$f(x) = y \text{ とおくと } y = x^2 - \frac{4}{5} \text{ --- ①}$$

$$f(y) = x$$

$$y^2 - \frac{4}{5} = x \text{ --- ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ より}$$

$$x^2 - y^2 = y - x$$

$$(x + y)(x - y) = -(x - y)$$

$$(x - y)(x + y + 1) = 0$$

$$y = x, y = -x - 1$$

(i) $y = x$ のとき

$$\text{① } x = x^2 - \frac{4}{5}$$

$$(i) \text{ より } x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{10}$$

(ii) $y = -x - 1$ のとき

$$\text{① } -x - 1 = x^2 - \frac{4}{5}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$$

$$5x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 20}}{10} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

(i), (ii) より

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{10}, \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

実数 x に対して, x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。例えば $[3]=3$, $[3.14]=3$, $[-3.14]=-4$ である。

(1) 方程式 $4x-3[x]=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $x^2-3x+[3x]=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2012 産業医科大)

(1)

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{より}$$

$$\left(\begin{array}{l} 4x-3[x]=0 \quad \text{より} \\ [x] = \frac{4}{3}x \end{array} \right)$$

$$\frac{4}{3}x \leq x < \frac{4}{3}x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x \leq x & \text{--- ①} \\ x < \frac{4}{3}x + 1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$4x \leq 3x$$

$$x \leq 0$$

② より

$$3x < 4x + 3$$

$$-3 < x$$

①, ② より

$$-3 < x \leq 0$$

$$-4 < \frac{4}{3}x \leq 0$$

$$-4 < [x] \leq 0$$

$[x]$ は整数なので

$$[x] = -3, -2, -1, 0$$

(i) $[x] = -3$ のとき

$$4x + 9 = 0 \quad x = -\frac{9}{4}$$

(ii) $[x] = -2$ のとき

$$4x + 6 = 0 \quad x = -\frac{3}{2}$$

(iii) $[x] = -1$ のとき

$$4x + 3 = 0 \quad x = -\frac{3}{4}$$

(iv) $[x] = 0$ のとき

$$4x = 0 \quad x = 0$$

(i) ~ (iv) より

$$x = -\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0$$

(2)

$$[3x] \leq 3x < [3x] + 1 \quad \text{より}$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2-3x+[3x]=0 \quad \text{より} \\ [3x] = -x^2+3x \end{array} \right)$$

$$-x^2+3x \leq 3x < -x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x \leq 3x & \text{--- ③} \\ 3x < -x^2+3x+1 & \text{--- ④} \end{cases}$$

③ より

$$-x^2 \leq 0$$

$$x^2 \geq 0$$

解はすべて実数

④ より

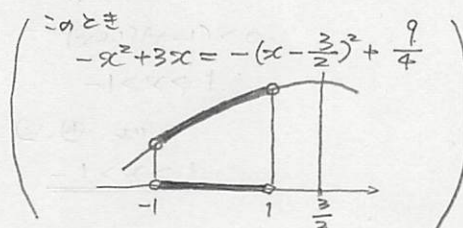
$$x^2 - 1 < 0$$

$$(x+1)(x-1) < 0$$

$$-1 < x < 1$$

③, ④ より

$$-1 < x < 1$$



$$-4 < -x^2+3x < 2$$

$$-4 < [3x] < 2$$

$[3x]$ は整数なので

$$[3x] = -3, -2, -1, 0, 1$$

(i) $[3x] = -3$ のとき

$$(-3 \leq 3x < -2 \quad \text{より}) \quad -1 \leq x < -\frac{2}{3}$$

$$x^2-3x-3=0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$-1 \leq x < -\frac{2}{3} \quad \text{より} \quad x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

(ii) $[3x] = -2$ のとき

$$(-2 \leq 3x < -1 \quad \text{より}) \quad -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3}$$

$$x^2-3x-2=0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \quad \text{より} \quad x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

(iii) $[3x] = -1$ のとき

$$(-1 \leq 3x < 0 \quad \text{より}) \quad -\frac{1}{3} \leq x < 0$$

$$x^2-3x-1=0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < 0 \quad \text{より} \quad x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$(iv) [3x] = 0 \quad \text{a.k.a.}$$

$$(0 \leq 3x < 1 \quad \text{or} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3})$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0, 3$$

$$0 \leq x < \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad x = 0$$

$$(v) [3x] = 1 \quad \text{a.k.a.}$$

$$(1 \leq 3x < 2 \quad \text{or} \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3})$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(i) \sim (v) \text{ or}$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, 0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$