

- (1) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について、頂点が点 $(6, 3)$ で、点 $(2, \frac{1}{3})$ を通るとき、定数 a, b, c の値を定めよ。
- (2) 3点 $A(1, 4), B(0, 2), C(-2, 16)$ を通る放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)

頂点 $(6, 3)$ で $(x^2$ の係数) $= a$
 の2次関数は

$$y = a(x-6)^2 + 3$$

とできる。

これが点 $(2, \frac{1}{3})$ を通るから

$$\frac{1}{3} = 16a + 3$$

$$16a = -\frac{8}{3}$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

よって

$$y = -\frac{1}{6}(x-6)^2 + 3$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 3$$

よって

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{6}, b = 2, c = -3}}$$

(2)

求める2次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおく。

3点 $A(1, 4), B(0, 2), C(-2, 16)$

を通るから

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ c = 2 \\ 4a - 2b + c = 16 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = 3, b = -1, c = 2$$

よって

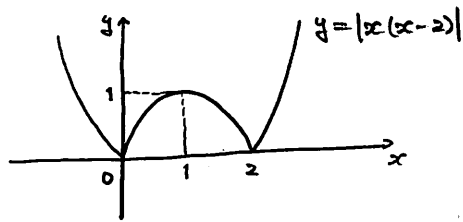
$$\underline{\underline{y = 3x^2 - x + 2}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題12]

(1) 関数 $y=|x(x-2)|$ のグラフをかけ。

(2) k は実数とする。(1) のグラフと $y=k$ のグラフを利用して、方程式 $|x(x-2)|=k$ の実数解の個数を調べよ。

(1)

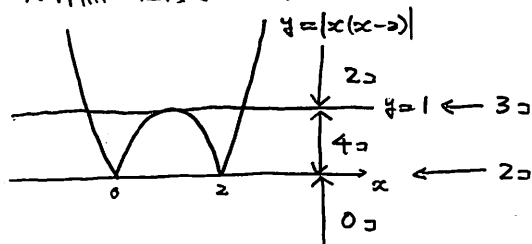


(2)

$$|x(x-2)| = k \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} y = |x(x-2)| \\ y = k \end{cases}$$

の共有点の個数を調べるとよい。



$0 < k < 1$	x とき	4
$k = 1$	x とき	3
$k = 0, 1 < k$	x とき	2
$k < 0$	x とき	0

放物線 $y=x^2+2x$ を y 軸に関して対称移動し、さらに x 軸方向に -4 、 y 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線を C_1 とする。また、放物線 $y=x^2+2x$ を x 軸に関して対称移動し、さらに y 軸方向に p だけ平行移動した放物線を C_2 とする。 C_1 と C_2 が接するとき、定数 p の値とそのときの接点の座標を求めよ。 (2017 摂南大)

$$y = x^2 + 2x$$

$$= (x+1)^2 - 1$$

頂点 $(-1, -1)$, 下に凸

↓ y 軸対称

頂点 $(1, -1)$, 下に凸

-4 ↓ ↓ $+4$

頂点 $(-3, 3)$, 下に凸

$$C_1: y = (x+3)^2 + 3$$

$$= x^2 + 6x + 12$$

頂点 $(-1, -1)$, 下に凸

↓ x 軸対称

頂点 $(-1, 1)$, 上に凸

↓ ↓ $+p$

頂点 $(-1, p+1)$, 上に凸

$$C_2: y = -(x+1)^2 + p+1$$

$$= -x^2 - 2x + p$$

C_1 と C_2 が接するとき

$$x^2 + 6x + 12 = -x^2 - 2x + p$$

$$2x^2 + 8x - p + 12 = 0 \quad \text{--- ①}$$

判別式 $D=0$ となるとよい。

$$D/4 = 16 - 2(-p+12)$$

$$= 2p - 8 = 0$$

$$p = 4$$

このとき ① は

$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

このとき C_1 で

$$y = 1 + 3 = 4$$

よって $p=4$, 接点 $(-2, 4)$

a, b, c を 0 でない定数とする。2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが相異なる 3 点 $(a, b), (b, c), (c, a)$ を通るとき、 a, b, c の値を求めよ。

(2015 早稲田大)

$$y = ax^2 + bx + c$$

3 点 $(a, b), (b, c), (c, a)$ を通るから

$$\begin{cases} a^3 + ab + c = b & \text{--- ①} \\ ab^2 + b^2 + c = c & \text{--- ②} \\ ac^2 + bc + c = a & \text{--- ③} \end{cases}$$

② より

$$ab^2 + b^2 = 0$$

$$b^2(a+1) = 0$$

$$b \neq 0 \quad \text{より} \quad a = -1$$

このとき

$$\text{①} \quad -1 - b + c = b$$

$$\text{③} \quad -c^2 + bc + c = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b + 1 & \text{--- ④} \\ c^2 - bc - c - 1 = 0 \end{cases}$$

c を消去して

$$(2b+1)^2 - (b+1)(2b+1) - 1 = 0$$

$$(2b+1)b - 1 = 0$$

$$2b^2 + b - 1 = 0$$

$$(2b-1)(b+1) = 0$$

$$b = \frac{1}{2}, -1$$

④ より

$$b = \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad c = 2$$

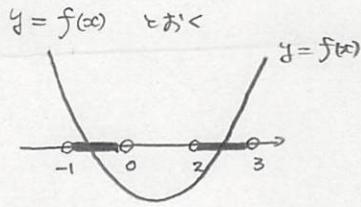
$$b = -1 \quad \text{のとき} \quad c = -1$$

3 点 は 互いに異なるから

$$\underline{\underline{(a, b, c) = (-1, \frac{1}{2}, 2)}}$$

整数係数の2次関数 $y = ax^2 - (a+2)x - 1$ のグラフは x 軸と2つの共有点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ をもち, $-1 < \alpha < 0$, $2 < \beta < 3$ を満たす。このとき, 整数 a の値を定めよ。

(2008 倉敷芸術科学大)



題意を満たす条件は

$$\begin{cases} f(-1)f(0) < 0 & \text{--- ①} \\ f(2)f(3) < 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$\{a + (a+2) - 1\} \{-1\} < 0$$

$$(2a+1)(-1) < 0$$

$$2a+1 > 0$$

$$a > -\frac{1}{2}$$

② より

$$\{4a - 2(a+2) - 1\} \{9a - 3(a+2) - 1\} < 0$$

$$(2a-5)(6a-7) < 0$$

$$\frac{7}{6} < a < \frac{5}{2}$$

①, ② より

$$\frac{7}{6} < a < \frac{5}{2}$$

$$a \in \mathbb{Z} \quad \text{より} \quad \underline{\underline{a = 2}}$$

関数 $y=|x^2-3x-4|+3x+3$ のグラフを C , 関数 $y=a(x-4)+15$ のグラフを L とする。ただし, a は定数である。(1) C の概形をかけ。(2) C と L の共有点の個数は, 定数 a の値によってどのように変わるか。

(2017 滋賀大)

(1)

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=(x-4)(x+1) \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \\ \text{---} \\ \ominus \\ \text{---} \\ \oplus \end{array} \\ \begin{array}{cc} -1 & 4 \end{array} \end{array} \right]$$

(i) $x \leq -1, 4 \leq x$ $a \geq 3$ とき

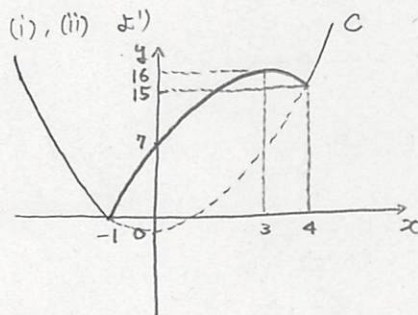
$$\begin{aligned} y &= \underbrace{|x^2-3x-4|}_{\oplus} + 3x+3 \\ &= x^2-3x-4+3x+3 \\ &= x^2-1 \end{aligned}$$

頂点 $(0, -1)$
軸: $x=0$, 下に凸

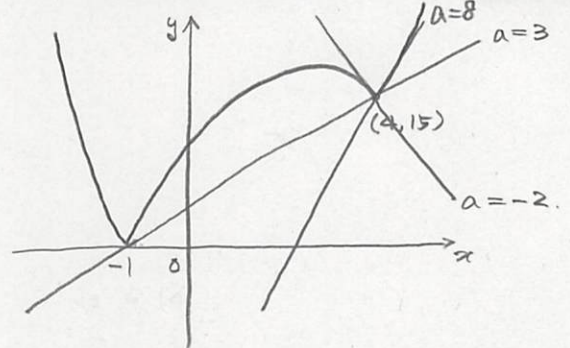
(ii) $-1 \leq x \leq 4$ $a \leq 3$ とき

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{|x^2-3x-4|}_{\ominus} + 3x+3 \\ &= -x^2+3x+4+3x+3 \\ &= -x^2+6x+7 \\ &= -(x-3)^2+16 \end{aligned}$$

頂点 $(3, 16)$
軸: $x=3$, 上に凸



(2)

 L は点 $(4, 15)$ を通る傾き a の直線である。 L が点 $(-1, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} -5a+15 &= 0 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

 L が点 $(4, 15)$ で $y=-x^2+6x+7$ のグラフと接するとき

$$\begin{aligned} a(x-4)+15 &= -x^2+6x+7 \\ x^2+(a-6)x-4a+8 &= 0 \\ \text{判別式 } D_1 &= 0 \text{ とおくとよい。} \\ D_1 &= (a-6)^2 - 4(-4a+8) \\ &= a^2-12a+36+16a-32 \\ &= a^2+4a+4 = 0 \\ (a+2)^2 &= 0 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

 L が点 $(4, 15)$ で $y=x^2-1$ のグラフと接するとき

$$\begin{aligned} a(x-4)+15 &= x^2-1 \\ x^2-ax+4a-16 &= 0 \\ \text{判別式 } D_2 &= 0 \text{ とおくとよい。} \\ D_2 &= a^2-4(4a-16) \\ &= a^2-16a+64 = 0 \\ (a-8)^2 &= 0 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} a \leq -2 & a \geq 3 & 2 \\ -2 < a < 3 & a \geq 3 & 3 \\ a = 3 & a \geq 3 & 2 \\ 3 < a \leq 8 & a \geq 3 & 1 \\ a > 8 & a \geq 3 & 2 \end{cases}$$

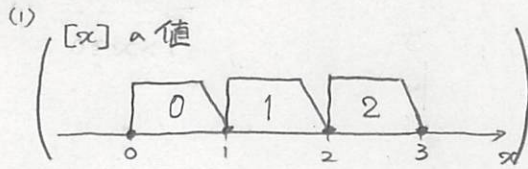
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 3 & a \geq 3 & 3 \\ a \leq -2, a = 3, a > 8 & a \geq 3 & 2 \\ 3 < a \leq 8 & a \geq 3 & 1 \end{cases}$$

実数 x に対し, $n \leq x < n+1$ を満たす整数 n を記号 $[x]$ で表す。

(1) 関数 $y = x[x]$ ($0 \leq x < 3$) のグラフをかけ。

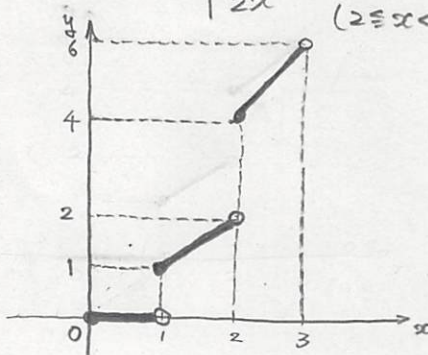
(2) a を正の定数とする。曲線 $y = ax^2 + \frac{5}{2}$ と (1) のグラフが異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2014 中央大)



よ、こ

$$y = x[x] = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ x & (1 \leq x < 2) \\ 2x & (2 \leq x < 3) \end{cases}$$



(2)

$$y = ax^2 + \frac{5}{2}$$

(頂点 $(0, \frac{5}{2})$)(軸: $x=0$, 下に凸)

が (1) のグラフと異なる 2 つの共有点をもつためには

(i) $1 \leq x < 2$ で異なる 2 つの共有点をもつとき

$$ax^2 + \frac{5}{2} = x \quad \text{よ、こ}$$

$$2ax^2 - 2x + 5 = 0 \quad \text{①}$$

が $1 \leq x < 2$ で異なる 2 つの実数解をもつとき

(p) 重解をもつとき

判別式 $D_1 = 0$ とおくと

$$\frac{D_1}{4} = 1 - 10a = 0$$

$$a = \frac{1}{10}$$

このとき ① は

$$\frac{1}{5}x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

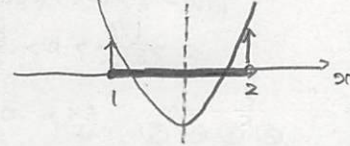
$$(x-5)^2 = 0$$

$$x = 5$$

これは $1 \leq x < 2$ を満たさない。

(i) 異なる 2 つの実数解をもつとき

$$f(x) = 2ax^2 - 2x + 5 \quad \text{とおく}$$



$$\begin{cases} D_1 > 0 \\ 1 < \text{軸} < 2 \\ f(1) \geq 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{10} \\ 1 < \frac{1}{2a} < 2 \\ 2a + 3 \geq 0 \\ 8a + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \\ a \geq -\frac{3}{2} \\ a > -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{これを満たす} \\ a \text{ は存在しない。} \end{array}$$

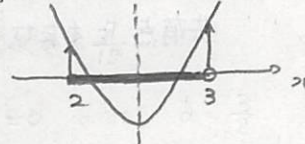
(ii) $2 \leq x < 3$ で異なる 2 つの共有点をもつとき

$$ax^2 + \frac{5}{2} = 2x \quad \text{よ、こ}$$

$$2ax^2 - 4x + 5 = 0$$

が $2 \leq x < 3$ で異なる 2 つの実数解をもつとき

$$g(x) = 2ax^2 - 4x + 5 \quad \text{とおく}$$



$$\begin{cases} g(x) = 0 \text{ の判別式 } D_2 > 0 & \text{②} \\ 2 < \text{軸} < 3 & \text{③} \\ f(2) \geq 0 & \text{④} \\ f(3) > 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

② よ、こ

$$\frac{D_2}{4} = 4 - 10a > 0$$

$$a < \frac{2}{5}$$

③ よ、こ

$$2 < \frac{2}{2a} < 3$$

$a > 0$ よ、こ

$$\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2} \quad (\text{裏に続く})$$

④ ㍈)

$$8a - 3 \geq 0$$

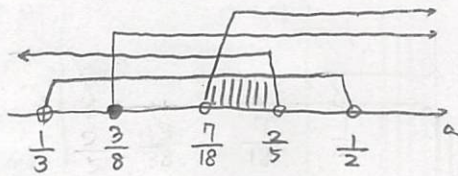
$$a \geq \frac{3}{8}$$

⑤ ㍈)

$$18a - 7 > 0$$

$$a > \frac{7}{18}$$

②③④⑤ ㍈)



$$\frac{7}{18} < a < \frac{2}{5}$$

(i), (ii) ㍈)

$$\underline{\underline{\frac{7}{18} < a < \frac{2}{5}}}$$

(i) は

$$y = x[x] \text{ で } 0 \leq x < 2 \text{ かつ } y < 2$$

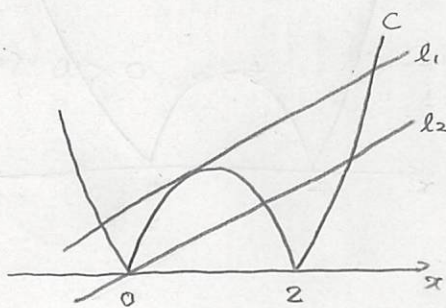
$$y = ax^2 + \frac{5}{2} \text{ で } y \geq \frac{5}{2}$$

㍈、㍈

共有点 をもたない。

a, b を 0 以上の実数とする。直線 $l: y = ax + b$ と曲線 $C: y = |x(2-x)|$ がちょうど 3 個の共有点をもつとき, a, b の条件を求めよ。

(2009 九州工業大)



$$C: y = |x(2-x)|$$

$$= \begin{cases} x(2-x) & (0 \leq x \leq 2 \text{ のとき}) \\ x(x-2) & (x \leq 0, 2 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $b = 0$ のとき $l: y = ax$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \\ C: y = -x^2 + 2x \\ y' = -2x + 2 \\ y'|_{x=1} = 2 \end{array} \right)$$

3 個の共有点をもつには

$$0 < a < 2$$

(ii) $b > 0$ のとき

$$l \text{ と } y = -x^2 + 2x \text{ が } 0 < x < 2$$

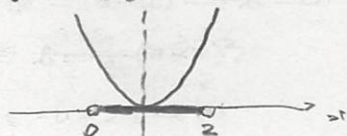
で接する必要がある。

$$ax + b = -x^2 + 2x \text{ かつ}$$

$$x^2 + (a-2)x + b = 0$$

かつ $0 < x < 2$ で重解をもつ

必要がある。



$$\begin{cases} \text{判別式 } D = 0 & \text{--- ①} \\ 0 \leq \text{軸} < 2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① かつ

$$(a-2)^2 - 4b = 0$$

$$b = \frac{1}{4}(a-2)^2$$

② かつ

$$0 < \frac{-a+2}{2} < 2$$

$$0 < -a+2 < 4$$

$$-2 < -a < 2$$

$$2 > a > -2$$

$$a \geq 0 \text{ かつ}$$

$$0 \leq a < 2$$

(i), (ii) かつ

$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ かつ } b = 0 \\ \text{or} \\ 0 \leq a < 2 \text{ かつ } b = \frac{1}{4}(a-2)^2 \end{cases}$$

xy 平面上の原点と点 $(1, 2)$ を結ぶ線分(両端を含む)を L とする。曲線 $y = x^2 + ax + b$ が L と共有点をもつような実数の組 (a, b) の集合を ab 平面上に図示せよ。 (2005 京都大)

$$L: y = 2x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

と曲線 $y = x^2 + ax + b$ を連立して、

$$x^2 + ax + b = 2x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$x^2 + (a-2)x + b = 0$$

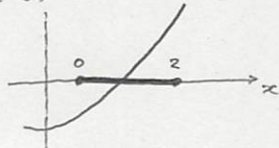
この x が $0 \leq x \leq 1$ で少なくとも1つの

実数解をもつとよい。

$$f(x) = x^2 + (a-2)x + b \quad \text{と置く。}$$

$$(i) \frac{-a+2}{2} < 0 \quad a < 2$$

(つまり $a > 2$ a と 2 と)



$$\begin{cases} f(0) \leq 0 & \text{--- ①} \\ f(1) \geq 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

と仮定とよい。

$$\text{① より } b \leq 0$$

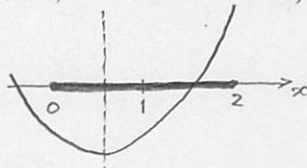
$$\begin{aligned} \text{② より } 4 + 2a - 4 + b &\geq 0 \\ b &\geq -2a \end{aligned}$$

よって

$$a > 2 \quad \text{かつ} \quad b \leq 0 \quad \text{かつ} \quad b \geq -2a$$

$$(ii) b \leq \frac{-a+2}{2} \leq 1 \quad a < 2$$

(つまり $0 \leq a \leq 2$ a と 2 と)



$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \text{--- ③} \\ f(1) \geq 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

と仮定とよい。

$$\begin{aligned} \text{③ より } (a-2)^2 - 4b &\geq 0 \\ b &\leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \end{aligned}$$

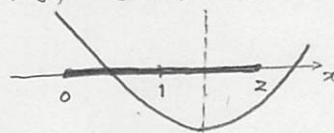
$$\text{② より } b \geq -2a$$

よって

$$0 \leq a \leq 2 \quad \text{かつ} \quad b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \quad \text{かつ} \quad b \geq -2a$$

$$(iii) 1 \leq \frac{-a+2}{2} \leq 2 \quad a < 2$$

(つまり $-2 \leq a \leq 0$ a と 2 と)



$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \text{--- ③} \\ f(0) \geq 0 & \text{--- ④} \end{cases}$$

と仮定とよい。

$$\text{③ より } b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2$$

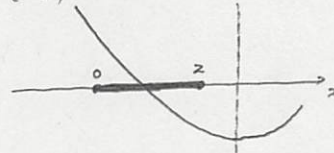
$$\text{④ より } b \geq 0$$

よって

$$-2 \leq a \leq 0 \quad \text{かつ} \quad b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \quad \text{かつ} \quad b \geq 0$$

$$(iv) 2 < \frac{-a+2}{2} \quad a < 2$$

(つまり $a < -2$ a と 2 と)



$$\begin{cases} f(0) \geq 0 & \text{--- ④} \\ f(1) \leq 0 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

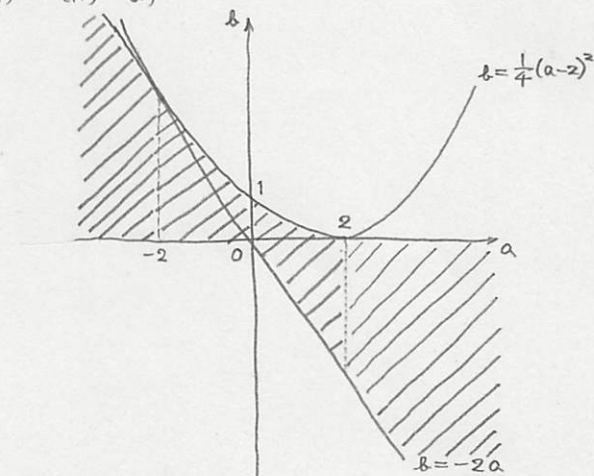
と仮定とよい。

$$\text{④ より } b \geq 0$$

$$\text{⑤ より } b \leq -2a$$

$$\text{よって } a < -2 \quad \text{かつ} \quad b \geq 0 \quad \text{かつ} \quad b \leq -2a$$

(i) ~ (iv) より



求める領域は

図の斜線部

ただし、境界を含む。

- (1) 関数 $y=x^2-4x$ のグラフ上の2点 $P(-2, 12)$, $Q(2, -4)$ に対して、直線 PQ と x 軸の共有点の x 座標を求めよ。
- (2) 2つの関数 $y=x^2-4x$, $y=k(x-a)$ のグラフが、どんな k の値に対しても $-2 \leq x \leq 2$ の範囲で少なくとも1つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2000 神戸大)

(1)

$$PQ: y+4 = \frac{-4-12}{2+2}(x-2)$$

$$y+4 = -4(x-2)$$

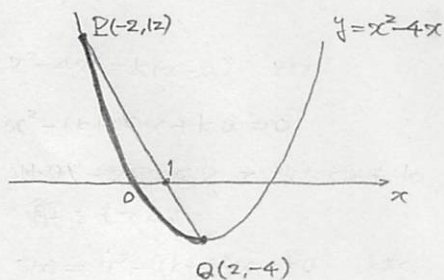
$$y = -4x + 4$$

$$y=0 \text{ とし}$$

$$-4x+4=0$$

$$\underline{x=1}$$

(2)



ℓ: $y=k(x-a)$ のグラフは

点 $(a, 0)$ を通り傾き k の直線である。

(i) $a > 1$ のとき

$k = -4$ とすると $\ell \parallel PQ$ となり

$-2 \leq x \leq 2$ で共有点をもつことはない。

(ii) $a < 0$ のとき

$$y = x^2 - 4x \text{ について}$$

$$y' = 2x - 4$$

$$y'(x=0) = -4 \text{ である}$$

$k = -4$ のとき $\ell \parallel$ 点 $(0, 0)$ における接線の傾き

なので、 $-2 \leq x \leq 2$ で共有点をもつことはない。

(iii) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$k \leq -4$ のとき $a \leq x \leq 2$ で共有点をもつ。

$k \geq -4$ のとき $-2 \leq x \leq a$ で共有点をもつ。

(i) ~ (iii) より

$$\underline{0 \leq a \leq 1}$$

関数 $f(x)$ は次の2つの条件を満たす。

(A) $0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = x$

(B) すべての実数 x に対して $f(x+1) = -f(x) + 1$ が成り立つ。

このとき、方程式 $f(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ の解を求めよ。

(2000 東京学芸大)

$$\begin{aligned}
 f(x+2) &= -f(x+1) + 1 \\
 &= -(-f(x) + 1) + 1 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

よて $f(x)$ は周期 2 の周期関数である。

$0 \leq x < 1$ に対して $f(x) = x$ となる

このとき

$f(x+1) = -x + 1$

よて

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ -x + 1 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

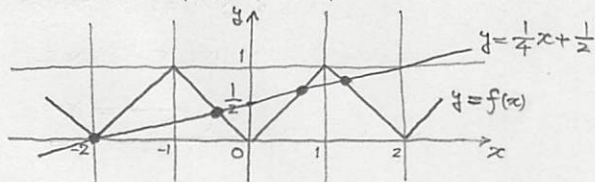
を周期 2 で繰り返す。

$f(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ より

$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$y = f(x)$ と $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ のグラフ

の共有点を調べるとよい。



$-1 \leq x \leq 0$ のとき

$-x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$-\frac{5}{4}x = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{2}{5}$

$0 \leq x \leq 1$ のとき

$x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3}$

$1 \leq x \leq 2$ のとき

$2 - x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$-\frac{5}{4}x = -\frac{3}{2}$

$x = \frac{6}{5}$

$$x = -2, -\frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{5}$$