

(1) 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが点 $(4, -4)$ を通り、 y が $x=2$ で最大値8をとるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

(2) 関数 $y=-x^2+ax-a$ ($0 \leq x \leq 5$) の最大値が3であるとき、定数 a の値を求めよ。

(1)

$x=2$ で "最大値8" をとるから、

求める2次関数は

$$y=a(x-2)^2+8 \quad (a < 0)$$

とできる。

これが点 $(4, -4)$ を通るから

$$4a+8=-4$$

$$a=-3$$

これは $a < 0$ を満たす。

よって

$$y=-3(x-2)^2+8$$

$$=-3x^2+12x-4$$

つまり

$$\underline{a=-3, b=12, c=-4}$$

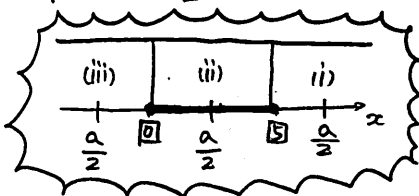
(2)

$$y=-x^2+ax-a$$

$$=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}-a$$

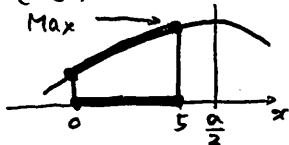
(頂点 $(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-a)$)

軸: $x=\frac{a}{2}$, 上に凸



i) $5 \leq \frac{a}{2}$ $a \geq 10$ のとき

(つまり $10 \leq a$ のとき)



$$\text{Max} = 4a - 25 \quad (x=5)$$

$$\text{Max} = 3 \quad \text{より}$$

$$4a - 25 = 3$$

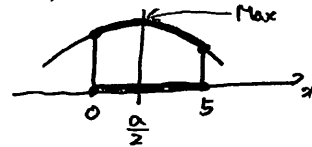
$$4a = 28$$

$$a = 7$$

$10 \leq a$ より 不適

(ii) $0 \leq \frac{a}{2} \leq 5$ $0 \leq a \leq 10$ のとき

(つまり $0 \leq a \leq 10$ のとき)



$$\text{Max} = \frac{a^2}{4} - a \quad (x=\frac{a}{2})$$

$$\text{Max} = 3 \quad \text{より}$$

$$\frac{a^2}{4} - a = 3$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a-6)(a+2) = 0$$

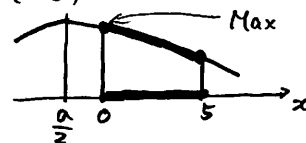
$$a = 6, -2$$

$$0 \leq a \leq 10 \quad \text{より}$$

$$a = 6$$

(iii) $\frac{a}{2} \leq 0$ $a \leq 0$ のとき

(つまり $a \leq 0$ のとき)



$$\text{Max} = -a \quad (x=0)$$

$$\text{Max} = 3 \quad \text{より}$$

$$-a = 3$$

$$a = -3$$

$$a \leq 0 \quad \text{より}$$

$$a = -3$$

(i) ~ (iii) より

$$\underline{a = 6, -3}$$

- (1) 実数 x, y が $x+3y=1$ を満たすとき, x^2+y^2 の最小値を求めよ。
 (2) 実数 x, y が $x^2+y^2=4$ を満たすとき, $2x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。
 (3) 正の数 a, b が $ab=6$ を満たすとき, $3a+8b$ の最小値を求めよ。

(1)

$$x+3y=1 \quad \text{より}$$

$$x = -3y+1$$

このとき

$$x^2+y^2 = (-3y+1)^2+y^2$$

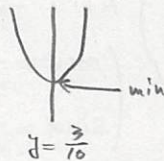
$$= 10y^2-6y+1$$

$$= 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{10} + 1$$

$$= 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}$$

$$\text{頂点} \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

$$\text{軸: } y = \frac{3}{10}, \text{ 下に凸}$$



$$\min(x^2+y^2) = \frac{1}{10} \quad \left(x = \frac{1}{10}, y = \frac{3}{10}\right)$$

(2) 解法1

$$2x+y=k \quad \text{とおく}$$

$$y = -2x+k$$

$$x^2+y^2=4 \quad \text{に代入して}$$

$$x^2+(-2x+k)^2=4$$

$$5x^2-4kx+k^2-4=0$$

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \text{で実数解をもつとき}$$

もつとよい

$$f(x) = 5x^2-4kx+k^2-4$$

とおく



(i) 解を1つだけもつとき

$$(p) f(-2) f(2) < 0$$

$$(k^2+8k+16)(k^2-8k+16) < 0$$

$$(k+4)^2(k-4)^2 < 0$$

解なし

実際は判別式
だけでよい。

$$(1) f(-2) = 0 \quad \text{るとき}$$

$$k^2+8k+16=0$$

$$(k+4)^2=0$$

$$k=-4$$

このとき

$$f(x) = 5x^2+16x+12=0$$

$$(5x+6)(x+2)=0$$

$$x = -\frac{6}{5}, -2$$

となり

$-2 \leq x \leq 2$ に2つの解をもつ

$$(1) f(2) = 0 \quad \text{るとき}$$

$$k^2-8k+16=0$$

$$(k-4)^2=0$$

$$k=4$$

このとき

$$f(x) = 5x^2-16x+12=0$$

$$(5x-6)(x-2)=0$$

$$x = \frac{6}{5}, 2$$

となり

$-2 \leq x \leq 2$ に2つの解をもつ

(ii) 重解を含めて2つの解をもつとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{判別式 } D \geq 0 \quad \text{--- ①} \\ -2 < \text{軸} < 2 \quad \text{--- ②} \\ f(-2) \geq 0 \quad \text{--- ③} \\ f(2) \geq 0 \quad \text{--- ④} \end{array} \right.$$

① より

$$D/4 = 4k^2-5(k^2-4)$$

$$=-k^2+20 \geq 0$$

$$k^2-20 \leq 0$$

$$(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5}) \leq 0$$

$$-2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$$

② より

$$-2 < \frac{2k}{5} < 2$$

$$-5 < k < 5$$

(裏に続く)

③ よし

$$k^2 + 8k + 16 \geq 0$$

$$(k+4)^2 \geq 0$$

解はすべての実数

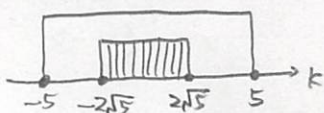
④ よし

$$k^2 - 8k + 16 \geq 0$$

$$(k-4)^2 \geq 0$$

解はすべての実数

① ~ ④ よし



$$-2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$$

(i), (ii) よし

$$-2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$$

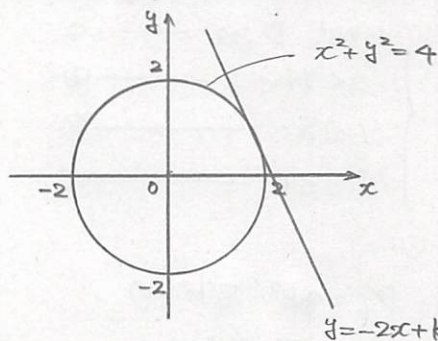
よし

$$\begin{cases} \text{Max}(2x+y) = 2\sqrt{5} \\ \text{min}(2x+y) = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

解法2

$$2x + y = k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y = -2x + k \quad (\text{傾き } -2, \text{切片 } k \text{ の直線})$$



直線 $2x + y - k = 0$ と原点との距離 d は

$$d = \frac{|-k|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

半径 $r = 2$

共有点をもつための条件は

$$d \leq r \quad \text{つまり}$$

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 2$$

$$|k| \leq 2\sqrt{5}$$

$$-2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$$

$$\text{よし} \quad \begin{cases} \text{Max}(2x+y) = 2\sqrt{5} \\ \text{min}(2x+y) = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

解法3

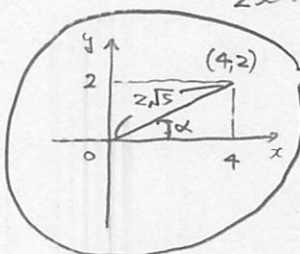
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{よし}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とておき

とおき

$$2x + y = 4\cos\theta + 2\sin\theta$$



$$= 2\sqrt{5} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし α は

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

を満たす角

$$-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \quad \text{よし}$$

$$-2\sqrt{5} \leq 2\sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) \leq 2\sqrt{5}$$

$$-2\sqrt{5} \leq 2x + y \leq 2\sqrt{5}$$

よし

$$\begin{cases} \text{Max}(2x+y) = 2\sqrt{5} \\ \text{min}(2x+y) = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

解法4

$$\vec{a} = (2, 1), \quad \vec{r} = (x, y)$$

とおく

$$2x + y = \vec{a} \cdot \vec{r}$$

$$= |\vec{a}| |\vec{r}| \cos\theta \quad (\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{r} \text{ のなす角})$$

$$= \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \cos\theta$$

$$= 2\sqrt{5} \cos\theta$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \text{つまり}$$

$$-2\sqrt{5} \leq 2\sqrt{5} \cos\theta \leq 2\sqrt{5}$$

$$-2\sqrt{5} \leq 2x + y \leq 2\sqrt{5}$$

よし

$$\begin{cases} \text{Max}(2x+y) = 2\sqrt{5} \\ \text{min}(2x+y) = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

(3) $a > 0, b > 0$ かつ

(相加) $\geq$ (相乗)

$$3a + 8b \geq 2\sqrt{3a \times 8b}$$

$$3a + 8b \geq 4\sqrt{6ab}$$

$$3a + 8b \geq 24$$

等号成立は

$$\left(\begin{array}{l} 3a = 8b \quad \text{かつ} \quad 3a + 8b = 24 \\ \text{つまり} \\ a = 4, b = \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{\min (3a + 8b) = 24}}$$

a は定数とする。2次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ について考える。

(1) $0 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を m とするとき、 m を a を用いて表せ。

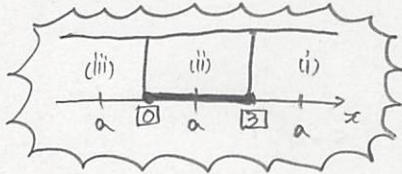
(2) $0 \leq x \leq 3$ において常に $f(x) > 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(2014 東北学院大)

(1)

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 \\ = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$$

頂点 $(a, -a^2 + a + 2)$
軸: $x = a$, 下向き

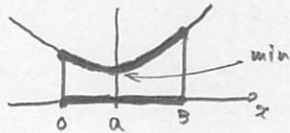


(i) $3 \leq a$ $a > 3$



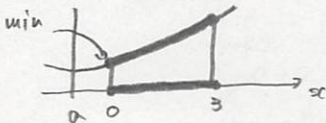
$$m = -5a + 11 \quad (x=3)$$

(ii) $0 \leq a \leq 3$ $a > 3$



$$m = -a^2 + a + 2 \quad (x=a)$$

(iii) $a \leq 0$ $a > 3$



$$m = a + 2 \quad (x=0)$$

(i) ~ (iii) より

$$m = \begin{cases} -5a + 11 & (3 \leq a \text{ とき}) \\ -a^2 + a + 2 & (0 \leq a \leq 3 \text{ とき}) \\ a + 2 & (a \leq 0 \text{ とき}) \end{cases}$$

(2)

$$m > 0 \quad \text{となるように}$$

(i) $3 \leq a$ $a > 3$

$$m = -5a + 11 > 0$$

$$-5a > -11$$

$$a < \frac{11}{5}$$

$3 \leq a$ より 不適

(ii) $0 \leq a \leq 3$ $a > 3$

$$m = -a^2 + a + 2 > 0$$

$$a^2 - a - 2 < 0$$

$$(a-2)(a+1) < 0$$

$$-1 < a < 2$$

$$0 \leq a \leq 3 \text{ より}$$

$$0 \leq a < 2$$

(iii) $a \leq 0$ $a > 3$

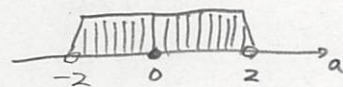
$$m = a + 2 > 0$$

$$a > -2$$

$$a \leq 0 \text{ より}$$

$$-2 < a \leq 0$$

(i) ~ (iii) より



$$\underline{\underline{-2 < a < 2}}$$

a は実数の定数とする。2次関数 $f(x) = x^2 - 4x + a$ の $a \leq x \leq a+1$ における最小値を $g(a)$ とする。

(1) $g(a)$ を求めよ。

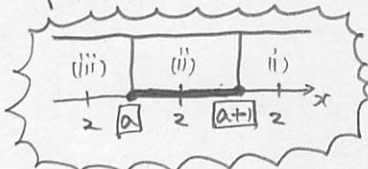
(2) $g(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(2012 実践女子大)

(1)

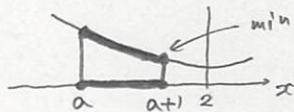
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + a \\ &= (x-2)^2 - 4 + a \end{aligned}$$

(頂点 $(2, -4+a)$)
軸: $x=2$, 下に凸



(i) $a+1 \leq 2$ a とき

(とき) $a \leq 1$ a とき



$$\begin{aligned} \min &= (a-1)^2 - 4 + a \\ &= a^2 - a - 3 \quad (x=a+1) \end{aligned}$$

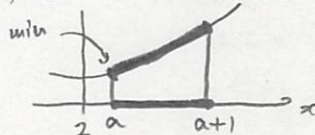
(ii) $a \leq 2 \leq a+1$ a とき

(とき) $1 \leq a \leq 2$ a とき



$$\min = -4 + a \quad (x=2)$$

(iii) $2 \leq a$ a とき



$$\min = a^2 - 3a \quad (x=a)$$

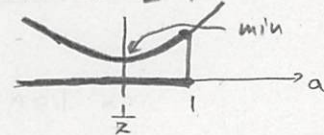
(i) ~ (iii) より

$$g(a) = \begin{cases} a^2 - a - 3 & (a \leq 1 \text{ } a \text{ とき}) \\ a - 4 & (1 \leq a \leq 2 \text{ } a \text{ とき}) \\ a^2 - 3a & (2 \leq a \text{ } a \text{ とき}) \end{cases}$$

(2) (i) $a \leq 1$ a とき

$$\begin{aligned} g(a) &= a^2 - a - 3 \\ &= (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4} \end{aligned}$$

(頂点 $(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$)
軸: $a = \frac{1}{2}$, 下に凸



$$\min = -\frac{13}{4} \quad (a = \frac{1}{2})$$

(ii) $1 \leq a \leq 2$ a とき

$$g(a) = a - 4$$

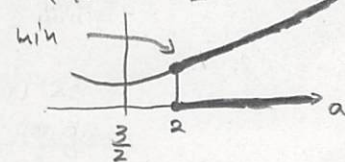


$$\min = -3 \quad (a = 1)$$

(iii) $2 \leq a$ a とき

$$\begin{aligned} g(a) &= a^2 - 3a \\ &= (a - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

(頂点 $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$)
軸: $a = \frac{3}{2}$, 下に凸



$$\min = -2 \quad (a = 2)$$

(i) ~ (iii) より

$$\begin{aligned} \min g(a) &= \min \left\{ -\frac{13}{4}, -3, -2 \right\} \\ &= \underline{\underline{-\frac{13}{4}}} \quad (a = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

関数 $f(x) = x(x-1)(x-3)(x-4)$ ($0 \leq x \leq 4$) の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

(2012 慶応義塾大)

よ、こ

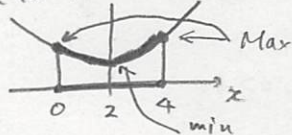
$$\begin{cases} \text{Max} = 4 & (x=2) \\ \text{min} = -\frac{9}{4} & (x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-1)(x-3)(x-4) \\ &= (x^2-4x)(x^2-4x+3) \end{aligned}$$

ここで

$$x^2-4x = t \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} t &= x^2-4x \\ &= (x-2)^2-4 \end{aligned}$$

頂点 $(2, -4)$ 軸: $x=2$, 下に凸

$$\begin{cases} \text{Max} = 0 & (x=0, 4) \\ \text{min} = -4 & (x=2) \end{cases}$$

よ、こ

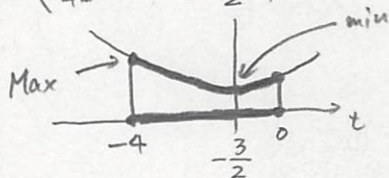
$$-4 \leq t \leq 0$$

$$f(x) = t(t+3)$$

$$= t^2 + 3t$$

$$= (t + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = g(t)$$

とおく

頂点 $(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ 軸: $t = -\frac{3}{2}$, 下に凸

$$\begin{cases} \text{Max} = 4 & (t=-4) \\ \text{min} = -\frac{9}{4} & (t=-\frac{3}{2}) \end{cases}$$

ここで

$$t = -4 \quad \text{なとき} \quad x = 2$$

$$t = -\frac{3}{2} \quad \text{なとき}$$

$$x^2-4x = -\frac{3}{2}$$

$$2x^2-8x+3=0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2} \quad (0 \leq x \leq 4 \text{ を満たす})$$

(1) x, y が実数全体を動くとき、関数 $Q = x^2 - 8xy + 17y^2 + 6x - 30y + 10$ の最小値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。 (2015 北海道大)

(2) $x + 2y + 3z = 7$ のとき、 $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求めよ。 (2007 早稲田大)

(1)

$$\begin{aligned} Q &= x^2 - 8xy + 17y^2 + 6x - 30y + 10 \\ &= x^2 + (-8y + 6)x + (17y^2 - 30y + 10) \\ &= (x - 4y + 3)^2 - (4y - 3)^2 + 17y^2 - 30y + 10 \\ &= (x - 4y + 3)^2 + y^2 - 6y + 1 \\ &= (x - 4y + 3)^2 + (y - 3)^2 - 8 \end{aligned}$$

$$x = 4y - 3 \quad \text{かつ} \quad y = 3$$

つまり

$$\underline{\underline{x = 9, y = 3 \text{ かつ } \min Q = -8}}$$

(2) 解法1

$$x + 2y + 3z = 7 \quad \text{より}$$

$$x = -2y - 3z + 7$$

これを

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned} &= (-2y - 3z + 7)^2 + y^2 + z^2 \\ &= 4y^2 + 9z^2 + 49 + 12yz - 42z - 28y + y^2 + z^2 \\ &= 5y^2 + 10z^2 + 49 + 12yz - 42z - 28y \\ &= 5y^2 + (12z - 28)y + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5 \left\{ y^2 + \frac{12z - 28}{5} y \right\} + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5 \left\{ \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 - \left(\frac{6z - 14}{5} \right)^2 \right\} + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 - \frac{36z^2 - 168z + 196}{5} + \frac{50z^2 - 210z + 245}{5} \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 + \frac{1}{5} (14z^2 - 42z + 49) \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 + \frac{1}{5} \left\{ 14 \left(z - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{63}{2} + \frac{98}{2} \right\} \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 + \frac{14}{5} \left(z - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{-6z + 14}{5} \quad \text{かつ} \quad z = \frac{3}{2} \quad \text{かつ} \quad x = -2y - 3z + 7$$

$$\text{つまり} \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{2}, y = 1, z = \frac{3}{2} \text{ かつ}}}$$

$$\underline{\underline{\min (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{7}{2}}}$$

(2) 解法2

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{x} = (x, y, z)$$

$$\vec{a} \text{ と } \vec{x} \text{ のなす角 } \theta \quad 0 \leq \theta < \pi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos \theta$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{より}$$

$$-|\vec{a}| |\vec{x}| \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq |\vec{a}| |\vec{x}|$$

$$-|\vec{a}| |\vec{x}| \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq |\vec{a}| |\vec{x}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{x}| \leq |\vec{a}| |\vec{x}|$$

$$|\vec{a}| \leq \sqrt{1+4+9} \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$7 \leq \sqrt{14} \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{7}{\sqrt{14}}$$

両辺ともに正なので2乗して

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{49}{14} = \frac{7}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{\min (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{7}{2}}}$$

$x > 0$ における関数 $f(x) = \left(2x + \frac{27}{x+1} + 2\right)\left(x + \frac{6}{x+1} + 1\right)$ の最小値と、最小値を与える x の値を求めよ。

(2017 防衛医科大学校)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x + \frac{27}{x+1} + 2\right)\left(x + \frac{6}{x+1} + 1\right) \\ &= \left\{2(x+1) + \frac{27}{x+1}\right\} \left\{(x+1) + \frac{6}{x+1}\right\} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} x+1 = t \quad \text{とおく} \\ x > 0 \quad \text{より} \quad x+1 > 1. \\ \quad \quad \quad \text{つまり} \quad t > 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(2t + \frac{27}{t}\right)\left(t + \frac{6}{t}\right)$$

$$= 2t^2 + 12 + 27 + \frac{162}{t^2}$$

$$= 2t^2 + \frac{162}{t^2} + 39$$

とおく

$$t^2 > 0 \quad \text{なので}$$

$$2t^2 > 0, \quad \frac{162}{t^2} > 0$$

(相加) $\geq$ (相乗) より

$$2t^2 + \frac{162}{t^2} \geq 2\sqrt{2t^2 \times \frac{162}{t^2}}$$

$$2t^2 + \frac{162}{t^2} \geq 36$$

$$2t^2 + \frac{162}{t^2} + 39 \geq 75$$

$$f(x) \geq 75$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ 2t^2 = \frac{162}{t^2} \quad \text{のとき} \\ t^4 = 81 \\ t^2 = 9 \quad (\text{⑤ } t^2 > 0) \\ t = 3 \quad (\text{⑥ } t > 1) \\ x+1 = 3 \\ x = 2 \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{\min f(x) = 75 \quad (x=2)}}$$

変数 x の範囲が実数全体であるとき、 $\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2011 日本獣医生命科学大)

解法1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & 3 & 0 & \end{array} \right)$$

$$\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} = 1 + \frac{3x}{x^2+x+1} = f(x)$$

と置く

$$f(0) = 1 \quad \text{であり}$$

 $x \neq 0$ のとき

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x+1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{3}{x+\frac{1}{x}+1}$$

ii) $x > 0$ のとき

$$x > 0, \frac{1}{x} > 0 \text{ であり}$$

(相加) $\geq$ (相乗)

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

$$x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$$

$$0 < \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1} \leq \frac{1}{3}$$

$$0 < \frac{3}{x + \frac{1}{x} + 1} \leq 1$$

$$1 < 1 + \frac{3}{x + \frac{1}{x} + 1} \leq 2$$

$$1 < f(x) \leq 2$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = 2 \text{ となるのは} \\ x = \frac{1}{x} \text{ かつ } x > 0 \\ \text{つまり } x = 1 \text{ のとき} \end{array} \right)$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$-x = t \quad \text{とすると } t > 0$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{-t - \frac{1}{t} + 1}$$

$$= 1 - \frac{3}{t + \frac{1}{t} - 1}$$

$$t > 0, \frac{1}{t} > 0 \text{ であり}$$

(相加) $\geq$ (相乗)

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

$$t + \frac{1}{t} - 1 \geq 1$$

$$0 < \frac{1}{t + \frac{1}{t} - 1} \leq 1$$

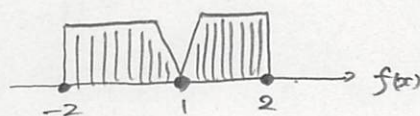
$$0 > -\frac{3}{t + \frac{1}{t} - 1} \geq -3$$

$$1 > 1 - \frac{3}{t + \frac{1}{t} - 1} \geq -2$$

$$1 > f(x) \geq -2$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = -2 \text{ となるのは} \\ t = \frac{1}{t} \text{ かつ } t > 0 \\ t = 1 \\ -x = 1 \\ \text{つまり } x = -1 \text{ のとき} \end{array} \right)$$

以上より



$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

つまり

$$\underline{\underline{-2 \leq \frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} \leq 2}}$$

(裏に続く)

解法2

$$\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} = k$$

とおく、分母を払って、

$$x^2+4x+1 = k(x^2+x+1)$$

$$(1-k)x^2 + (4-k)x + (1-k) = 0$$

(i) $k=1$ のとき

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

(ii) $k \neq 1$ のとき

判別式 $D \geq 0$ とおき、

$$D = (4-k)^2 - 4(1-k)^2$$

$$= 16 - 8k + k^2 - 4 + 8k - 4k^2$$

$$= -3k^2 + 12 \geq 0$$

$$k^2 - 4 \leq 0$$

$$(k+2)(k-2) \leq 0$$

$$-2 \leq k \leq 2$$

$k \neq 1$ のとき

$$-2 \leq k < 1, 1 < k \leq 2$$

(i), (ii) より

$$-2 \leq k \leq 2$$

つまり

$$\underline{\underline{-2 \leq \frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1} \leq 2}}$$

$4x+3y=7$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす x , y について考える。

(1) xy の最大値と最小値を求めよ。

(2) $x^2y^2 - 16x^2 - 9y^2 - 26xy$ の最大値と最小値を求めよ。

(2012 敬愛大)

(1)

$$4x+3y=7 \text{ より}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

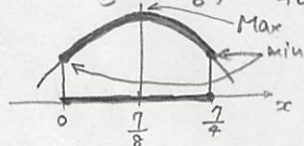
$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ y \geq 0 \text{ より} \\ -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{4} \\ x \geq 0 \text{ とあわせて} \\ 0 \leq x \leq \frac{7}{4} \end{array} \right)$$

このとき

$$xy = x\left(-\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{3}x$$

$$= -\frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{49}{48}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} = \frac{49}{48} \quad (x, y) = \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{6}\right) \\ \text{min} = 0 \quad (x, y) = \left(0, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{4}, 0\right) \end{array} \right.$$

(2)

$$x^2y^2 - 16x^2 - 9y^2 - 26xy$$

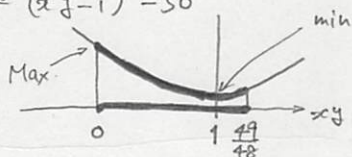
$$= x^2y^2 - (16x^2 + 9y^2) - 26xy$$

$$= x^2y^2 - \{(4x+3y)^2 - 24xy\} - 26xy$$

$$= x^2y^2 - (49 - 24xy) - 26xy$$

$$= x^2y^2 - 2xy - 49$$

$$= (xy - 1)^2 - 50$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} = -49 \quad (xy = 0 \text{ とき}) \\ \text{min} = -50 \quad (xy = 1 \text{ とき}) \end{array} \right.$$

x が実数全体を動くとき、 $\frac{x^4+4x^3+4x^2+5}{x^2+2x+2}$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

(2017 岩手大)

$$\left(\begin{array}{r} x^2 + 2x - 2 \\ x^2 + 2x + 2 \overline{) x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 5} \\ \underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \\ 2x^3 + 2x^2 + 5 \\ \underline{2x^3 + 4x^2 + 4x} \\ -2x^2 - 4x + 5 \\ \underline{-2x^2 - 4x - 4} \\ 9 \end{array} \right)$$

$$\frac{x^4+4x^3+4x^2+5}{x^2+2x+2} = x^2+2x-2 + \frac{9}{x^2+2x+2}$$

$$= x^2+2x+2 + \frac{9}{x^2+2x+2} - 4$$

ここで

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1 > 0 \quad \text{なので}$$

(相加) $\geq$ (相乗)

$$x^2+2x+2 + \frac{9}{x^2+2x+2} \geq 2 \sqrt{(x^2+2x+2) \cdot \frac{9}{x^2+2x+2}}$$

$$x^2+2x+2 + \frac{9}{x^2+2x+2} - 4 \geq 6 - 4$$

$$\frac{x^4+4x^3+4x^2+5}{x^2+2x+2} \geq 2$$

等号成立は

$$x^2+2x+2 = \frac{9}{x^2+2x+2}$$

$$x^2+2x+2 = \pm 3$$

$$x^2+2x+2 > 0 \text{ より } x^2+2x-1=0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2} \quad , \quad \text{判別式 } D/4 = -4 < 0$$

よって

$$\underline{\underline{\min = 2 \quad (x = -1 \pm \sqrt{2})}}$$

実数 x, y が $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ を満たすとする。 $k = \frac{x}{y}$, $z = \frac{x^2 + 4xy + 9y^2}{xy + 2y^2}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) z を k の式で表せ。
- (3) z の最小値とそのときの k の値を求めよ。

(2012 関西学院大)

(1)

$$k = \frac{x}{y} \quad \text{より} \quad x = ky$$

こゝより y と x は 1 対 1 に対応する。

$$x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \quad \text{に代入して}$$

$$k^2 y^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$(k^2 + 1)y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$k^2 + 1 \neq 0 \quad \text{なので}$$

$$\text{判別式 } D \geq 0 \quad \text{とするとよい。}$$

$$\frac{D}{4} = 4 - (k^2 + 1) \cdot 2$$

$$= -2k^2 + 2 \geq 0$$

$$k^2 - 1 \leq 0$$

$$(k+1)(k-1) \leq 0$$

$$\underline{\underline{-1 \leq k \leq 1}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ k+2 = \frac{5}{k+2} \\ k+2 = \pm\sqrt{5} \\ k = -2 \pm \sqrt{5} \\ -1 \leq k \leq 1 \quad \text{より} \\ k = -2 + \sqrt{5} \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{\min z = 2\sqrt{5} \quad (k = \sqrt{5} - 2)}}$$

(2)

$$z = \frac{x^2 + 4xy + 9y^2}{xy + 2y^2} \quad \div y^2$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right) + 9}{\frac{x}{y} + 2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{k^2 + 4k + 9}{k + 2}}}$$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 9 \\ & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$z = k + 2 + \frac{5}{k+2}$$

∵ z

$$k+2 > 0 \quad \text{なので}$$

$$(\text{相加}) \geq (\text{相乗}) \quad \text{より}$$

$$k+2 + \frac{5}{k+2} \geq 2\sqrt{(k+2) \cdot \frac{5}{k+2}}$$

$$z \geq 2\sqrt{5}$$

[2018スタンダードⅡAB受問題B41]

a を実数の定数とする。関数 $f(x) = x^2 - |x-a| - a^2 + 3a$ の最小値を $m(a)$ とする。

(1) $m(a)$ を求めよ。

(2) a が $-1 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき、 $m(a)$ の最大値を求めよ。

(2001 富山大)

(1)

(i) $x \geq a$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (x-a) - a^2 + 3a \\ &= x^2 - x - a^2 + 4a \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 + 4a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(\frac{1}{2}, -a^2 + 4a - \frac{1}{4}\right)$
軸: $x = \frac{1}{2}$, 下に凸

(ii) $x \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + (x-a) - a^2 + 3a \\ &= x^2 + x - a^2 + 2a \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - a^2 + 2a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(-\frac{1}{2}, -a^2 + 2a - \frac{1}{4}\right)$
軸: $x = -\frac{1}{2}$, 下に凸

∴ $-a^2 + 4a - \frac{1}{4} \leq -a^2 + 2a - \frac{1}{4}$ のとき、

$$2a \leq 0$$

$$a \leq 0$$

∴ $a \geq 0$ のとき

$$m(a) = \begin{cases} -a^2 + 4a - \frac{1}{4} & (a \leq 0) \\ -a^2 + 2a - \frac{1}{4} & (a \geq 0) \end{cases}$$

(2) (i) $a \leq 0$ のとき

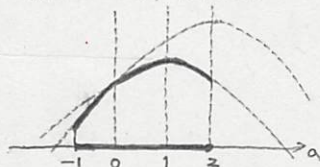
$$\begin{aligned} m(a) &= -a^2 + 4a - \frac{1}{4} \\ &= -(a-2)^2 + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(2, \frac{15}{4}\right)$
軸: $a = 2$, 上に凸

(ii) $a \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} m(a) &= -a^2 + 2a - \frac{1}{4} \\ &= -(a-1)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$
軸: $a = 1$, 上に凸



$$\text{Max} = \frac{3}{4} \quad (a=1)$$