

(1) $x^2 + 2(k-3)x + 2k - 6 = 0$ が重解をもつように、実数 k の値を定めよ。

(2) $(k-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ が異なる2つの実数解をもつときの実数 k の値の範囲を求めよ。

(1)

判別式 $D = 0$ となるように。

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 2k + 6$$

$$= k^2 - 8k + 15 = 0$$

$$(k-3)(k-5) = 0$$

$$\underline{\underline{k = 3, 5}}$$

(2)

2つの解をもつためには

$$k-1 \neq 0 \quad \text{つまり} \quad k \neq 1$$

このとき

判別式 $D > 0$ となるように。

$$D = 9 - 4(k-1)(-1)$$

$$= 4k + 5 > 0$$

$$k > -\frac{5}{4}$$

よって

$$\underline{\underline{-\frac{5}{4} < k < 1, 1 < k}}$$

2次方程式 $x^2 + 2mx + 3m - 1 = 0$ の1つの解が他の解の2倍であるような、整数 m の値を求めよ。

2つの解を $x = \alpha, 2\alpha$ とおくと

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha = -2m \\ \alpha \cdot 2\alpha = 3m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = -2m & \text{--- ①} \\ 2\alpha^2 = 3m - 1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$\alpha = -\frac{2}{3}m$$

② に代入して

$$\frac{8}{9}m^2 = 3m - 1$$

$$8m^2 - 27m + 9 = 0$$

$$(8m - 3)(m - 3) = 0$$

$$m = \frac{3}{8}, 3$$

$m \in \mathbb{Z}$ より

$$\underline{\underline{m = 3}}$$

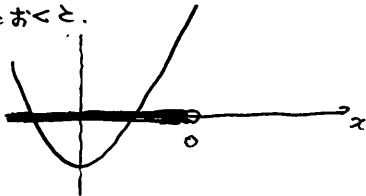
m を実数とする。 x の2次方程式 $x^2 + 2(2m-1)x + 4m^2 - 9 = 0$ が、次の条件を満たすような m の値の範囲を、それぞれ求めよ。

- (1) 2つの解がともに負(ただし、2つの解には重解も含める)
- (2) 1つの解は正、他の解は負
- (3) 異なる2つの解がともに1以上

(1) **解法1**

$$f(x) = x^2 + 2(2m-1)x + 4m^2 - 9$$

とおく。



$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \text{--- ①} \\ \text{軸} < 0 & \text{--- ②} \\ f(0) > 0 & \text{--- ③} \end{cases}$$

① より

$$\begin{aligned} D/4 &= (2m-1)^2 - (4m^2 - 9) \\ &= -4m + 10 \geq 0 \\ m &\leq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

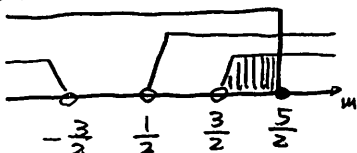
② より

$$\begin{aligned} -2m + 1 &< 0 \\ m &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

③ より

$$\begin{aligned} 4m^2 - 9 &> 0 \\ (2m+3)(2m-3) &> 0 \\ m &< -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} < m \end{aligned}$$

①, ②, ③ より



$$\frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2}$$

解法2

2つの解を $x = \alpha, \beta$ とおく。

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -4m + 2 \\ \alpha\beta = 4m^2 - 9 \end{cases}$$

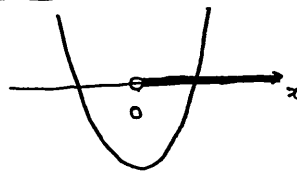
題意を満たす条件は

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ \alpha + \beta < 0 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ -4m + 2 < 0 \\ 4m^2 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{2} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} < m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2}}}$$

(2) **解法1**



$f(0) < 0$ となるより。

$$\begin{aligned} 4m^2 - 9 &< 0 \\ -\frac{3}{2} &< m < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

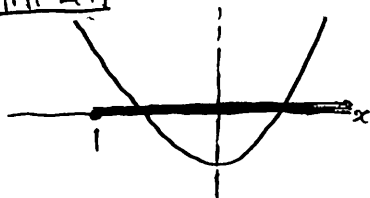
解法2

$\alpha\beta < 0$ となるより。

$$\begin{aligned} 4m^2 - 9 &< 0 \\ -\frac{3}{2} &< m < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(裏に続く)

(3) 解法1



$$\begin{cases} D > 0 & \text{--- ④} \\ \text{軸} > 1 & \text{--- ⑤} \\ f(1) \geq 0 & \text{--- ⑥} \end{cases}$$

④ よ) $m < \frac{5}{2}$

⑤ よ)

$$\begin{aligned} -2m+1 &> 1 \\ -2m &> 0 \\ m &< 0 \end{aligned}$$

⑥ よ)

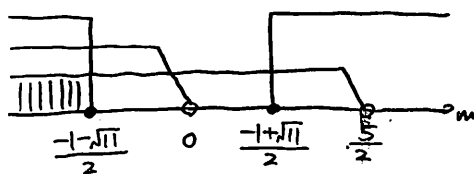
$$1+4m-2+4m^2-9 \geq 0$$

$$4m^2+4m-10 \geq 0$$

$$2m^2+2m-5 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2m^2+2m-5=0 \quad \text{と解く} \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \\ \left(\begin{array}{c} \text{Graph of } 2m^2+2m-5=0 \text{ showing roots at } \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \text{ and } \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \\ \text{The region between the roots is shaded.} \end{array} \right) \\ m \leq \frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \leq m \end{aligned}$$

④ ~ ⑥ よ)



$$m \leq \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$$

解法2

$$\begin{cases} D > 0 \\ \alpha \geq 1 \\ \beta \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} D > 0 \\ \alpha-1 \geq 0 \\ \beta-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} D > 0 & \text{--- ⑦} \\ (\alpha-1)+(\beta-1) \geq 0 & \text{--- ⑧} \\ (\alpha-1)(\beta-1) \geq 0 & \text{--- ⑨} \end{cases}$$

⑦ よ) $m < \frac{5}{2}$

⑧ よ)

$$\begin{aligned} \alpha+\beta-2 &\geq 0 \\ -4m+2-2 &\geq 0 \\ -4m &\geq 0 \\ m &\leq 0 \end{aligned}$$

⑨ よ)

$$\begin{aligned} \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1 &\geq 0 \\ 4m^2-9-(-4m+2)+1 &\geq 0 \\ 4m^2+4m-10 &\geq 0 \\ m \leq \frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \leq m \end{aligned}$$

⑦ ~ ⑨ よ)

$$m \leq \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$$

$f(x) = x^2 + 2mx + 2m + 3$, $g(x) = 4x^2 + 4(m+1)x + 5m^2 + 6m - 2$ について、次の問いに答えよ。ただし、 m は実数の定数とする。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が重解をもつとき、 m の値を求めよ。
- (2) 方程式 $g(x) = 0$ が正の解と負の解をもつような m の値の範囲を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ のうち、一方は異なる2つの実数解をもち、他方は虚数解をもつような m の値の範囲を求めよ。

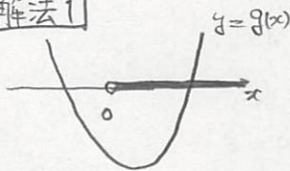
(2013 名城大)

(1)

判別式 $D_1 = 0$ とおくとよい。

$$\begin{aligned} \Delta/4 &= m^2 - (2m+3) \\ &= m^2 - 2m - 3 = 0 \\ (m+1)(m-3) &= 0 \\ \underline{\underline{m = -1, 3}} \end{aligned}$$

(2) 解法1

 $g(0) < 0$ とおくとよい。

$$5m^2 + 6m - 2 < 0$$

$$\left(\begin{aligned} 5m^2 + 6m - 2 &= 0 \quad \text{とおくと} \\ m &= \frac{-3 \pm \sqrt{19}}{5} \end{aligned} \right)$$

$$\underline{\underline{\frac{-3-\sqrt{19}}{5} < m < \frac{-3+\sqrt{19}}{5}}}$$

解法2

2つの解 $\alpha = \alpha, \beta$ とおくと

解と係数の関係より

$$\alpha\beta = \frac{5m^2 + 6m - 2}{4}$$

 $\alpha\beta < 0$ とおくとよいので

$$\frac{5m^2 + 6m - 2}{4} < 0$$

よって

$$\underline{\underline{\frac{-3-\sqrt{19}}{5} < m < \frac{-3+\sqrt{19}}{5}}}$$

(3)

 $g(x) = 0$ の判別式 D_2 とおくと

$$\begin{cases} D_1 > 0 \text{ かつ } D_2 < 0 \quad \dots\dots (i) \\ \text{or} \\ D_1 < 0 \text{ かつ } D_2 > 0 \quad \dots\dots (ii) \end{cases}$$

とおくとよい。

$$\Delta/4 = (m+1)(m-3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2/4 &= \{2(m+1)\}^2 - 4(5m^2 + 6m - 2) \\ &= 4m^2 + 8m + 4 - 20m^2 - 24m + 8 \\ &= -16m^2 - 16m + 12 \\ &= -4(4m^2 + 4m - 3) \\ &= -4(2m+3)(2m-1) \end{aligned}$$

(i) α とし

$$\begin{cases} (m+1)(m-3) > 0 \\ -4(2m+3)(2m-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-3) > 0 \\ (2m+3)(2m-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1, 3 < m \\ m < -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} < m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}, 3 < m$$

(ii) α とし

$$\begin{cases} (m+1)(m-3) < 0 \\ -4(2m+3)(2m-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ -\frac{3}{2} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

(i), (ii) より

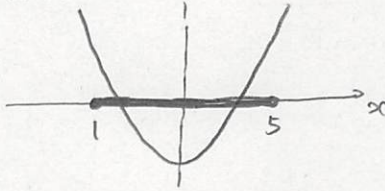
$$\underline{\underline{m < -\frac{3}{2}, -1 < m < \frac{1}{2}, 3 < m}}$$

2次方程式 $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ が異なる2つの実数解をもち、その2つの実数解がともに1以上5以下であるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

(2013 秋田大)

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$$

とおく。



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{判別式 } D > 0 \quad \text{--- ①} \\ 1 < \text{軸} < 5 \quad \text{--- ②} \\ f(1) \geq 0 \quad \text{--- ③} \\ f(5) \geq 0 \quad \text{--- ④} \end{array} \right.$$

となることを示す。

① より

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - (2a + 3) \\ &= a^2 - 2a - 3 > 0 \\ (a - 3)(a + 1) &> 0 \\ a < -1, 3 < a \end{aligned}$$

② より

$$1 < a < 5$$

③ より

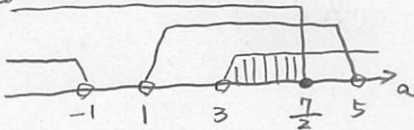
$$\begin{aligned} 1 - 2a + 2a + 3 &\geq 0 \\ 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

任意の a に対して成り立つ。

④ より

$$\begin{aligned} 25 - 10a + 2a + 3 &\geq 0 \\ -8a &\geq -28 \\ a &\leq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

① ~ ④ より



$$\underline{\underline{3 < a \leq \frac{7}{2}}}$$

2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ は、異なる2つの解 α, β をもつとする。2次方程式 $x^2 + qx + p = 0$ が2つの解 $\alpha(\beta-2), \beta(\alpha-2)$ をもつとき、定数 p, q の値を求めよ。

(2012 名城大)

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{--- ①}$$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

このとき

$$\begin{aligned} \alpha(\beta-2) + \beta(\alpha-2) \\ &= \alpha\beta - 2\alpha + \alpha\beta - 2\beta \\ &= 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) \\ &= 2q + 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta-2) \times \beta(\alpha-2) \\ &= \alpha\beta(\alpha-2)(\beta-2) \\ &= \alpha\beta(\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4) \\ &= q(q + 2p + 4) \end{aligned}$$

 $\alpha(\beta-2)$ と $\beta(\alpha-2)$ を解にもつ

2次方程式は

$$x^2 - (2p + 2q)x + q(2p + q + 4) = 0$$

$$x^2 + qx + p = 0 \quad \text{と比較して}$$

$$\begin{cases} q = -2p - 2q \quad \text{--- ①} \\ p = q(2p + q + 4) \quad \text{--- ②} \end{cases}$$

①より

$$3q = -2p$$

$$q = -\frac{2}{3}p \quad \text{--- ③}$$

②に代入して

$$p = -\frac{2}{3}p(2p - \frac{2}{3}p + 4)$$

$$p = -\frac{2}{3}p(\frac{4}{3}p + 4)$$

$$\begin{pmatrix} \text{ここで} \\ p = 0 \text{ とすると} \\ \text{③より } q = 0 \end{pmatrix}$$

このとき、①は

$$x^2 = 0 \quad \text{となり}$$

異なる2つの解をもつことに反する。

よって

$$p \neq 0$$

両辺を $p(\neq 0)$ で割って

$$1 = -\frac{8}{9}p - \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{9}p = -\frac{11}{3}$$

$$p = -\frac{33}{8}$$

このとき ③より

$$q = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{33}{8}\right) = \frac{11}{4}$$

よって

$$\underline{\underline{(p, q) = \left(-\frac{33}{8}, \frac{11}{4}\right)}}$$

a を実数とする。2次方程式 $x^2 + 2ax + (a-1) = 0$ の解を α, β とする。

- (1) α と β は異なる実数であることを示せ。
- (2) α と β のうち、少なくとも1つは負であることを示せ。
- (3) $\alpha \leq 0, \beta \leq 0$ であるとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の最小値を求めよ。

(2011 島根大)

(1) (証明)

判別式 D とおくと

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - (a-1) \\ &= a^2 - a + 1 \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{aligned}$$

よって α と β は異なる実数である。■

(2)

背理法 (1) のもとで

 $\alpha \geq 0$ かつ $\beta \geq 0$ と仮定する $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ のとき

$$\begin{aligned} a-1 &= 0 \quad \text{より} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 0 \\ x(x+2) &= 0 \\ x &= 0, -2 \end{aligned}$$

これは

 $\alpha \geq 0$ かつ $\beta \geq 0$ を満たさない。よって $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ としよ

このとき

$$\alpha + \beta > 0 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta > 0$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = a-1$$

よって

$$\begin{cases} -2a > 0 \\ a-1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

これを満たす $a \in \mathbb{R}$ は存在しない。

よって

$$\alpha < 0 \quad \text{または} \quad \beta < 0$$

つまり

 α と β のうち、少なくとも1つは

負である。■

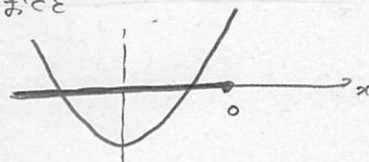
(3)

 $\alpha \leq 0, \beta \leq 0$ であるとき

(1) のもとで

$$f(x) = x^2 + 2ax + (a-1)$$

とおくと

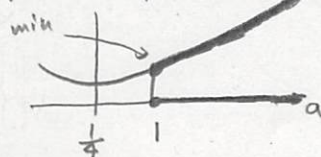


$$\begin{cases} \text{軸} < 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a < 0 \\ a-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a > 0 \\ a \geq 1 \end{cases} \iff a \geq 1$$

このとき

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4a^2 - 2(a-1) \\ &= 4a^2 - 2a + 2 \\ &= 4\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

頂点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right)$ 軸: $a = \frac{1}{4}$, 下に凸

$$\min = 4 \quad (a=1)$$

実数 a, b, c が $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=32$ を満たすとき、実数 c の最大値を求めよ。 (2014 早稲田大)

解法1

$$a+b+c=8 \quad \text{より}$$

$$a+b=-c+8 \quad \text{①}$$

$$a^2+b^2+c^2=32 \quad \text{より}$$

$$(a+b)^2-2ab+c^2=32$$

$$2ab=(-c+8)^2+c^2-32$$

$$2ab=2c^2-16c+32$$

$$ab=c^2-8c+16 \quad \text{②}$$

①, ② より

a と b を解にもつ 2次方程式は

$$t^2-(-c+8)t+c^2-8c+16=0$$

これが実数解をもつとよいから

判別式 $D \geq 0$

$$D=(-c+8)^2-4(c^2-8c+16)$$

$$=c^2-16c+64-4c^2+32c-64$$

$$=-3c^2+16c \geq 0$$

$$-3c^2+16c \leq 0$$

$$c(3c-16) \leq 0$$

$$0 \leq c \leq \frac{16}{3}$$

よって $\text{Max } c = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$

解法2

$$a=x, b=y \quad \text{とおく}$$

$$\begin{cases} x+y+c-8=0 \\ x^2+y^2=32-c^2 \end{cases}$$

を満たす $c \in \mathbb{R}$ の最大値を調べる。

直線 $x+y+c-8=0$ と原点 との

距離 d は

$$d = \frac{|c-8|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|c-8|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{半径 } r = \sqrt{32-c^2}$$

共有点をもつためには

$$d \leq r \quad \text{より}$$

$$\frac{|c-8|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{32-c^2}$$

両辺ともに0以上だから

2乗してよい。

$$\frac{c^2-16c+64}{2} \leq 32-c^2$$

$$c^2-16c+64 \leq 64-2c^2$$

$$3c^2-16c \leq 0$$

$$c(3c-16) \leq 0$$

$$0 \leq c \leq \frac{16}{3}$$

よって

$$\text{Max } c = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

実数 a, b, c が $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとする。

(1) $c=\frac{2}{3}$ であるとき, a, b の値を求めよ。

(2) c のとりうる値の範囲を求めよ。

(2006 甲南大)

(1)

$$c = \frac{2}{3} \text{ とき}$$

$$a+b+\frac{2}{3} = a^2+b^2+\frac{4}{9} = 1$$

$$\begin{cases} a+b = \frac{1}{3} & \text{--- ①} \\ a^2+b^2 = \frac{5}{9} & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{②より} \quad (a+b)^2 - 2ab = \frac{5}{9}$$

$$\frac{1}{9} - 2ab = \frac{5}{9}$$

$$ab = -\frac{2}{9} \quad \text{--- ③}$$

①, ③より

a, b を解にもつ 2次方程式は

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$$

$$9x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & \rightarrow & -6 \\ 3 & 1 & \rightarrow & 3(+1) \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3x-2)(3x+1) = 0$$

$$x = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$$

よって

$$(a, b) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

(2) **解法1**

$c=k$ とおくと

$$a+b+k = a^2+b^2+k^2 = 1$$

$$\begin{cases} a+b = 1-k & \text{--- ④} \\ a^2+b^2 = 1-k^2 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

⑤より

$$(a+b)^2 - 2ab = 1-k^2$$

$$(1-k)^2 - 2ab = 1-k^2$$

$$1-2k+k^2-2ab = 1-k^2$$

$$-2ab = -2k^2+2k$$

$$ab = k^2 - k \quad \text{--- ⑥}$$

④, ⑥より

a, b を解にもつ 2次方程式は

$$x^2 - (1-k)x + k^2 - k = 0$$

$$x^2 + (k-1)x + k^2 - k = 0$$

$$a+b+k=1 \text{ なら}$$

a, b が決まれば k も決まるから

判別式 $D \geq 0$ とおくとよい。

$$D = (k-1)^2 - 4(k^2-k)$$

$$= k^2 - 2k + 1 - 4k^2 + 4k$$

$$= -3k^2 + 2k + 1 \geq 0$$

$$3k^2 - 2k - 1 \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & \rightarrow & 1 \\ 1 & -1 & \rightarrow & -3(+1) \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3k+1)(k-1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

$$\text{よって} \quad \underline{\underline{-\frac{1}{3} \leq c \leq 1}}$$

解法2

$a=x, b=y$ とおくと

$$\begin{cases} x+y+c=1 \\ x^2+y^2+c^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+c-1=0 \\ x^2+y^2=1-c^2 \end{cases}$$

直線 $x+y+c-1=0$ と円 $x^2+y^2=1-c^2$

の中心 $(0,0)$ との距離 d とは

$$\begin{cases} d = \frac{|c-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|c-1|}{\sqrt{2}} \\ r = \sqrt{1-c^2} \end{cases}$$

共有点をもつとよいから

$$d \leq r$$

$$\frac{|c-1|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-c^2}$$

$$c^2 - 2c + 1 \leq 2 - 2c^2$$

$$3c^2 - 2c - 1 \leq 0$$

$$(3c+1)(c-1) \leq 0$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{3} \leq c \leq 1}}$$

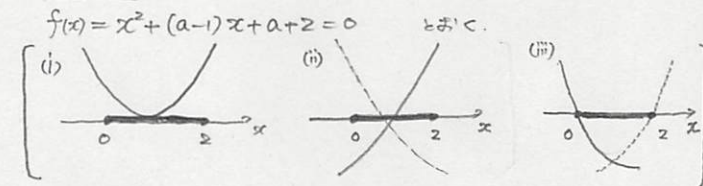
a を実数の定数とする。 x の2次方程式 $x^2 + (a-1)x + a+2 = 0$ ……①について、次の値の範囲を求めよ。
ただし、重解は1つと数える。

(1) ①が $0 \leq x \leq 2$ の範囲に実数解をただ1つもつとき、 a の値の範囲

(2) $-2 \leq a \leq -1$ のとき、①の実数解 x のとりうる値の範囲

(2000 金沢大)

(1) 解法1



(i) ~ (iii) より

$$-2 \leq a < -\frac{4}{3}, a = -1$$

(i) 重解をもつとき

判別式 $D=0$ より

$$D = (a-1)^2 - 4(a+2)$$

$$= a^2 - 2a + 1 - 4a - 8$$

$$= a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$a = 7, -1$$

 $a = 7$ のとき

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{となり不適}$$

 $a = -1$ のとき

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

これは $0 \leq x \leq 2$ を満たす。(ii) $0 < x < 2$ で重解以外に解をもつとき $f(0)f(2) < 0$ より

$$(a+2)(4+2a-2+a+2) < 0$$

$$(a+2)(3a+4) < 0$$

$$-2 < a < -\frac{4}{3}$$

(iii) (i) 点 $(0,0)$ を通るとき

$$a+2=0$$

$$a=-2$$

このとき

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0, 3 \quad \text{となり条件を満たす。}$$

(iv) 点 $(2,0)$ を通るとき

$$3a+4=0$$

$$a = -\frac{4}{3}$$

このとき

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$(3x-1)(x-2) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, 2 \quad \text{となり不適}$$

解法2

$$x^2 + (a-1)x + a+2 = 0$$

$$x^2 + ax - x + a+2 = 0 \quad \text{--- ①}$$

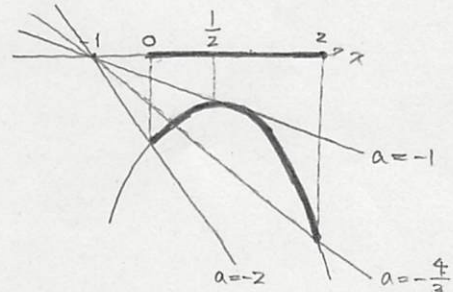
$$a(x+1) = -x^2 + x - 2$$

$$y = a(x+1) \quad \text{と} \quad y = -x^2 + x - 2$$

“ $0 \leq x \leq 2$ で” 共有点をただ1つもつとよい。

$$y = -x^2 + x - 2$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$



$y = a(x+1)$ が点 $(0, -2)$ を通るとき

$$a = -2$$

$y = a(x+1)$ が点 $(2, -4)$ を通るとき

$$3a = -4$$

$$a = -\frac{4}{3}$$

接するとき ①より

$$x^2 + (a-1)x + a+2 = 0$$

判別式 $D=0$ より

$$D = (a-1)^2 - 4(a+2) = 0$$

$$= a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$a = 7, -1$$

$0 \leq x \leq 2$ で接するは $a = -1$ のとき

よって

$$-2 \leq a < -\frac{4}{3}, a = -1$$

(2) $a = -2$ のとき $x = 0, 3$ となる

解法2 の図より

$$0 \leq x \leq 3$$

N を正の整数とする。 $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で、方程式

$x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

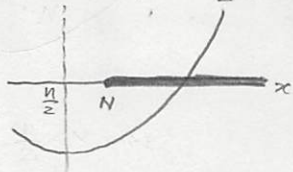
(2009 東京工業大)

$$f(x) = x^2 - nx + m \quad \text{と置く}$$

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と $x \geq N$ で

少なくとも1つの共有点をもつことが必要

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ n \leq 2N \text{ より} \quad \frac{n}{2} \leq N \end{array} \right)$$



$$f(N) \leq 0$$

$$N^2 - nN + m \leq 0$$

解法1 $N(N-n) \leq -m$

$$N(n-N) \geq m \quad \text{--- ①}$$

これを満たすためには $m > 0$ より

$$n = N+1, N+2, \dots, 2N \quad \text{--- ② である}$$

(i) $N^2 < 2N$ のとき

$$\left(\begin{array}{l} N(N-2) < 0 \\ 0 < N < 2 \\ N \text{ は正の整数 なので} \\ N=1 \quad \alpha \text{ とき} \end{array} \right)$$

① は

$$n-1 \geq m$$

② より $n=2$ とおく

$$1 \geq m$$

$$\text{よって } m=1$$

つまり $(1, 2)$ の1組)

(ii) $N^2 \geq 2N$ のとき

(つまり $N \geq 2$ のとき)

$$n = N+1 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$(\text{①の左辺}) = N \quad \text{とおく}$$

$$m = 1, 2, \dots, N \quad \alpha N \text{ 個}$$

$$n = N+2 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$(\text{①の左辺}) = 2N \quad \text{とおく}$$

$$m = 1, 2, \dots, 2N \quad \alpha 2N \text{ 個}$$

$$n = N+3 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$(\text{①の左辺}) = 3N \quad \text{とおく}$$

$$m = 1, 2, \dots, 2N \quad \alpha 2N \text{ 個}$$

⋮

$$n = 2N \quad \alpha \text{ とき}$$

$$(\text{①の左辺}) = N^2 \quad \text{とおく}$$

$$m = 1, 2, \dots, 2N \quad \alpha 2N \text{ 個}$$

よって

$$N + \sum_{n=N+2}^{2N} 2N$$

$$= N + 2N(N-1)$$

$$= 2N^2 - N \quad (\text{組})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ N=1 \text{ とすると } 2 \times 1^2 - 1 = 1 \\ \text{となり (i) を含む} \end{array} \right)$$

(i), (ii) より

$$\underline{2N^2 - N \text{ (組)}}$$

解法2

$$N^2 - nN + m \leq 0$$

$$m \leq nN - N^2$$

$1 \leq n \leq 2N, 1 \leq m \leq 2N$ を満たす

格子点 (n, m) の個数を調べるとよい。

(i) $N^2 < 2N$ のとき

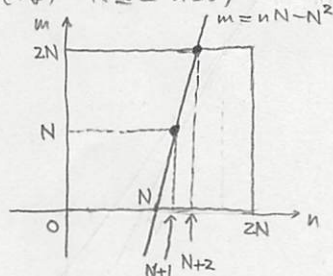
(つまり $N=1$ のとき)

$$m \leq n-1, 1 \leq n \leq 2, 1 \leq m \leq 2$$

を満たすのは $(1, 2)$ の1組のみ。

(ii) $N^2 \geq 2N$ のとき

(つまり $N \geq 2$ のとき)



$$n = N+1 \quad \alpha \text{ とき } m = 1, 2, \dots, N \text{ の } N \text{ 個}$$

$$n = k \quad (N+2 \leq k \leq 2N) \quad \alpha \text{ とき}$$

$$m = 1, 2, \dots, 2N \quad \alpha 2N \text{ 個}$$

よって

$$N + \sum_{k=N+2}^{2N} 2N = N + 2N(N-1) = 2N^2 - N \quad (\text{組})$$

これは (i) も含む。

(i), (ii) より

$$\underline{2N^2 - N \text{ (組)}}$$