

3次方程式 $x^3 - (a^2 - 1)x - a = 0$ の実数解がただ1つであるように実数 a の範囲を定めよ。ただし、重解は1つと数える。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & -a^2+1 & -a \\ & & a & a^2 & a \\ \hline & 1 & a & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$x^3 - (a^2 - 1)x - a = 0$$

$$(x-a)(x^2 + ax + 1) = 0$$

$$x = a, \quad x^2 + ax + 1 = 0$$

$x = a$ は実数解 確定 な a ぞ

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{が}$$

(i) $x = a$ を重解 としても

(ii) 実数解 をもたない

a いずれかになるとよい。

(i) a とす

$$a^2 + a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = -\frac{1}{2}$$

これを満たす $a \in \mathbb{R}$ は

存在しない。

(ii) a とす

判別式 $D < 0$ とおくとよい

$$D = a^2 - 4 < 0$$

$$(a+2)(a-2) < 0$$

$$-2 < a < 2$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{-2 < a < 2}}$$

3次方程式 $x^3+2x^2+3x+4=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき、

$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{}, \alpha\beta\gamma=\boxed{}, \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{},$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\boxed{}, (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=\boxed{} \text{ である。}$$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-2 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 \\ \alpha\beta\gamma=-4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= 4 - 2 \times 3 \\ &= \underline{\underline{-2}} \end{aligned}$$

解法1

$$x^3+2x^2+3x+4=0 \quad \text{より}$$

$$x^3 = -2x^2 - 3x - 4$$

この3つの解 α, β, γ に対して

$$\alpha^3 = -2\alpha^2 - 3\alpha - 4$$

$$\beta^3 = -2\beta^2 - 3\beta - 4$$

$$+ \gamma^3 = -2\gamma^2 - 3\gamma - 4$$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= -2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 3(\alpha+\beta+\gamma) - 12 \\ &= 4 + 6 - 12 \\ &= \underline{\underline{-2}} \end{aligned}$$

解法2

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= -2 \times (-2-3) - 12 \\ &= 10 - 12 \\ &= \underline{\underline{-2}} \end{aligned}$$

解法1

$$\begin{aligned} &(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \\ &= (1-\beta-\alpha+\alpha\beta)(1-\gamma) \\ &= 1-\gamma-\beta+\beta\gamma-\alpha+\gamma\alpha+\alpha\beta-\alpha\beta\gamma \\ &= 1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \\ &= 1+2+3+4 \\ &= \underline{\underline{10}} \end{aligned}$$

解法2

$$x^3+2x^2+3x+4=0 \quad \text{の}$$

3つの解 α, β, γ に対して

$$x^3+2x^2+3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

これは x についての恒等式なので

$$x=1 \quad \text{とすると}$$

$$1+2+3+4=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

よって

$$\underline{\underline{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=10}}$$

- (1) 複素数 $a+bi$ (a, b は実数, $i=\sqrt{-1}$) が $(a+bi)^3=i$ を満たすとき, $a+bi$ は $\square$ または $\square$ または $\square$ である。
- (2) 3次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の1つの解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき, 実数の定数 a, b の値を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned}(a+bi)^3 &= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 \\ &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i \\ &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i\end{aligned}$$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \text{と} \quad a \neq 0$$

$$(a+bi)^3 = i \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0 & \text{--- ①} \\ 3a^2b - b^3 = 1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$a(a^2 - 3b^2) = 0$$

$$a = 0, \pm\sqrt{3}b$$

i) $a=0$ のとき

$$\begin{aligned}\text{②は} \quad -b^3 &= 1 \\ b^3 &= -1 \\ b &= -1\end{aligned}$$

ii) $a=\sqrt{3}b$ のとき

$$\begin{aligned}\text{②は} \quad 9b^3 - b^3 &= 1 \\ b^3 &= \frac{1}{8} \\ b &= \frac{1}{2} \\ \text{このとき} \quad a &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

iii) $a=-\sqrt{3}b$ のとき

$$\begin{aligned}\text{②は} \quad b &= \frac{1}{2} \\ \text{このとき} \quad a &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

$$\underline{a+bi = -i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

(2) 解法1

$$x = 2 + \sqrt{3}i \quad \text{が 解 の とき}$$

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}i)^3 + a(2+\sqrt{3}i)^2 + b(2+\sqrt{3}i) - 14 &= 0 \\ 8 + 12\sqrt{3}i + 18i^2 + 3\sqrt{3}i^3 + 4a + 4\sqrt{3}ai \\ + 3a^2i^2 + 2b + \sqrt{3}bi - 14 &= 0 \\ 8 + 12\sqrt{3}i - 18 - 3\sqrt{3}i + 4a + 4\sqrt{3}ai \\ - 3a + 2b + \sqrt{3}bi - 14 &= 0 \\ (-24 + a + 2b) + (9\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a + \sqrt{3}b)i &= 0\end{aligned}$$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \text{と} \quad a \neq 0$$

$$\begin{cases} a + 2b - 24 = 0 \\ 4\sqrt{3}a + \sqrt{3}b + 9\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 24 \\ 4a + b = -9 \end{cases}$$

これを解いて

$$\underline{a = -6, b = 15}$$

解法2

実数係数の3次方程式 と 仮定

$$x = 2 + \sqrt{3}i \quad \text{が 解 の とき}$$

$$x = 2 - \sqrt{3}i \quad \text{も 解 であり,}$$

もう1つの解を α とおくと
解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = -a \\ \alpha(2 + \sqrt{3}i) + (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) \\ + (2 - \sqrt{3}i)\alpha = b \\ \alpha(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4 = -a \\ 4\alpha + 7 = b \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

これを解いて

$$\underline{\alpha = 2, a = -6, b = 15}$$

3次方程式 $x^3 + (2m-7)x^2 + (9-m)x - m-3 = 0$ が、異なる3つの正の解をもつとき、実数の定数 m の値の範囲を求めよ。

(2013 愛知学院大)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2m-7 & 9-m & -m-3 & 0 \\ & 1 & -6+2m & m+3 & \\ \hline & 1 & 2m-6 & 3+m & 0 \end{array} \right)$$

$$x^3 + (2m-7)x^2 + (9-m)x - m-3 = 0$$

$$(x-1) \{ x^2 + (2m-6)x + m+3 \} = 0$$

$$x=1, \quad x^2 + (2m-6)x + m+3 = 0$$

$x=1$ は正の解確定なので

$$x^2 + (2m-6)x + m+3 = 0 \quad \text{--- ①}$$

が $x \neq 1$ なる異なる2つの正の解をもつとよい。

① が $x=1$ を解に持つとき

$$1 + 2m - 6 + m + 3 = 0$$

$$3m = 2$$

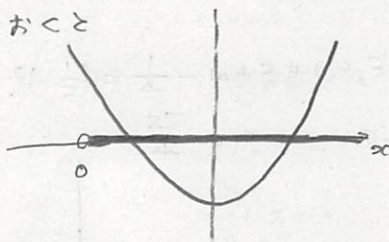
$$m = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって } m \neq \frac{2}{3}$$

解法1

$$f(x) = x^2 + (2m-6)x + m+3$$

とおく



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{判別式 } D > 0 \quad \text{--- ②} \\ \text{軸} > 0 \quad \text{--- ③} \\ f(0) > 0 \quad \text{--- ④} \end{array} \right.$$

② より

$$D/4 = (m-3)^2 - (m+3)$$

$$= m^2 - 7m + 6 > 0$$

$$(m-1)(m-6) > 0$$

$$m < 1, 6 < m$$

③ より

$$-m+3 > 0$$

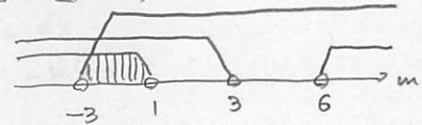
$$m < 3$$

④ より

$$m+3 > 0$$

$$m > -3$$

② ~ ④ より



$$-3 < m < 1$$

$$m \neq \frac{2}{3} \text{ に注意して}$$

$$\underline{-3 < m < \frac{2}{3}, \frac{2}{3} < m < 1}$$

解法2

① の2つの解 α, β とおく

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2m + 6, \quad \alpha\beta = m + 3$$

であり

$$\left\{ \begin{array}{l} D > 0 \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D > 0 \\ \alpha + \beta > 0 \\ \alpha\beta > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m < 1, 6 < m \\ -2m + 6 > 0 \\ m + 3 > 0 \end{array} \right.$$

(おとは同様)

正の数 x, y, z が3条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{4}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 21$, $xyz = 8$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $xy + yz + zx$ の値を求めよ。
 (2) $x + y + z$ の値を求めよ。
 (3) $x \leq y \leq z$ であるとき、 x, y, z の値を求めよ。

(2014 岡山理科大)

(1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{4}$$

両辺に xyz をかけ

$$yz + zx + xy = \frac{7}{4}xyz$$

よ、

$$\underline{\underline{xy + yz + zx = 14}}$$

(2)

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$(x + y + z)^2 = 21 + 28$$

$$(x + y + z)^2 = 49$$

$$x > 0, y > 0, z > 0 \quad \text{より}$$

$$x + y + z > 0 \quad \text{より}$$

$$\underline{\underline{x + y + z = 7}}$$

(3)

 x, y, z を解にもつ3次方程式は

$$(t - x)(t - y)(t - z) = 0 \quad \text{より}$$

$$t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz = 0$$

$$t^3 - 7t^2 + 14t - 8 = 0$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -7 & 14 & -8 \\ & & 1 & -6 & 8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

$$(t - 1)(t^2 - 6t + 8) = 0$$

$$(t - 1)(t - 2)(t - 4) = 0$$

$$t = 1, 2, 4$$

$$x \leq y \leq z \quad \text{より}$$

$$\underline{\underline{(x, y, z) = (1, 2, 4)}}$$

z についての方程式 $z^3 - 3z^2 + (1+a)z + a = 0$ が純虚数解をもつような実数 a の値を求めよ。 (2017 龍谷大)

$z = bi$ ($b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) を解にもつとき

$$b^3 i^3 - 3b^2 i^2 + (1+a)bi + a = 0$$

$$-b^3 i + 3b^2 + (b+ab)i + a = 0$$

$$(a+3b^2) + (ab+b-b^3)i = 0$$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \text{と} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a+3b^2=0 & \text{--- ①} \\ ab+b-b^3=0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

② より

$$b(a+1-b^2)=0$$

$$b \neq 0 \quad \text{より}$$

$$a = b^2 - 1$$

① に代入して

$$b^2 - 1 + 3b^2 = 0$$

$$4b^2 - 1 = 0$$

$$b^2 = \frac{1}{4}$$

$$b = \pm \frac{1}{2}$$

このとき

$$a = \frac{1}{4} - 1$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}} - 1} \text{ とする。}$$

(1) 整数を係数とする3次方程式で、 α を解にもつものがあることを示せ。

(2) α は整数であることを示せ。また、その整数を答えよ。

(2002 大阪教育大)

(1) (証明)

$$a = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}} + 1}, \quad b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}} - 1}$$

とおく

$$a^3 = \sqrt{\frac{28}{27}} + 1, \quad b^3 = \sqrt{\frac{28}{27}} - 1$$

$$a^3 - b^3 = 2 \quad \text{①}$$

$$a^3 b^3 = \frac{28}{27} - 1 = \frac{1}{27}$$

$$ab \in \mathbb{R} \text{ より } ab = \frac{1}{3}$$

① より

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = 2.$$

ここで

$$a-b = \alpha, \quad ab = \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\alpha^3 + \alpha = 2.$$

$$\alpha^3 + \alpha - 2 = 0$$

$$\alpha \text{ は } x^3 + x - 2 = 0 \text{ を満たす。}$$

つまり

$$\alpha \text{ は } x^2 + x + 2 = 0$$

α 解ではない

$$\text{よって } \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$x^3 + x - 2 = 0 \text{ より}$$

$$(x-1)(x^2+x+2) = 0$$

$$x = 1, \quad x^2 + x + 2 = 0$$

ここで

$$x^2 + x + 2 = 0$$

α 判別式 D は

$$D = 1 - 8 = -7$$

$$D < 0 \text{ なるため}$$

実数解をもたない。

(1) $\alpha\beta=12$, $\alpha^3+\beta^3=91$ を満たす実数の組 (α, β) をすべて求めよ。(2) 方程式 $x^3-36x+91=0$ の解をすべて求めよ。

(2002 お茶の水女子大)

解法1

(1)

$$\alpha^3+\beta^3=91$$

$$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=91$$

$$(\alpha+\beta)^3-36(\alpha+\beta)-91=0$$

$$\alpha+\beta=s \quad \alpha\beta=12$$

$$s^3-36s-91=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 0 & -36 & -91 \\ & & 7 & 49 & 91 \\ \hline & 1 & 7 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

$$(s-7)(s^2+7s+13)=0$$

$$s=7, \quad s^2+7s+13=0$$

ここで

$$s^2+7s+13=0$$

 α の判別式 D は

$$D=49-52=-3$$

$$D<0 \quad \text{なので}$$

$$s^2+7s+13=0$$

は実数解をもたない。

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{なので} \quad s=\alpha+\beta \in \mathbb{R}$$

つまり

$$s \text{ は } s^2+7s+13=0 \text{ の}$$

解ではない

$$\text{よって} \quad s=7$$

$$\alpha+\beta=7, \quad \alpha\beta=12 \quad \text{であり、}$$

 α と β を解にもつ2次方程式は

$$t^2-7t+12=0$$

$$(t-3)(t-4)=0$$

$$t=3, 4$$

よって

$$\underline{(\alpha, \beta) = (3, 4), (4, 3)}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 1 & 0 & -36 & 91 \\ & & -7 & 49 & -91 \\ \hline & 1 & -7 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

$$x^3-36x+91=0$$

$$(x+7)(x^2-7x+13)=0$$

$$x=-7, \quad \frac{7 \pm \sqrt{49-52}}{2}$$

$$\underline{x=-7, \quad \frac{7 \pm \sqrt{3}i}{2}}$$

解法2

$$(1) \quad \alpha\beta=12 \quad \text{より} \quad \alpha^3\beta^3=12^3$$

 α^3 と β^3 を解にもつ2次方程式は

$$t^2-91t+12^3=0$$

$$t^2-91t+64 \times 27=0$$

$$(t-64)(t-27)=0$$

$$t=64, 27$$

$$\{\alpha^3, \beta^3\} = \{64, 27\} \quad \text{より}$$

$$\{\alpha, \beta\} = \{4, 3\}$$

つまり

$$\underline{(\alpha, \beta) = (3, 4), (4, 3)}$$

(2)

$$x^3-36x+91=0$$

$$x^3-3\alpha\beta x+\alpha^3+\beta^3=0$$

$$\alpha^3+\alpha^3+\beta^3-3\alpha\alpha\beta=0$$

$$(x+\alpha+\beta)(x^2+\alpha^2+\beta^2-\alpha x-\alpha\beta-\beta x)=0$$

$$(x+\alpha+\beta)(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=0$$

$$(x+7)(x^2-7x+13)=0$$

$$\underline{x=-7, \quad \frac{7 \pm \sqrt{3}i}{2}}$$

3次方程式 $x^3 - 1 = 0$ の1と異なる解の1つを ω とする。等式

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = (x + a + b)(x + a\omega + b\omega^2)(x + a\omega^2 + b\omega)$$

を利用して、3次方程式 $x^3 - 6x + 6 = 0$ の解を ω を用いて表せ。

(2001 静岡大)

$$\left(\begin{array}{l} x^3 - 1 = 0 \text{ の解の1つを } \omega \text{ とする} \\ \omega^3 - 1 = 0 \\ (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \\ \omega \neq 1 \text{ より} \\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\ \text{よって } \begin{cases} \omega^3 = 1 \\ \omega^2 = -\omega - 1 \end{cases} \text{ を満たす。} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} -3ab = -6 \\ a^3 + b^3 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} ab = 2 \\ a^3 + b^3 = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^3 b^3 = 8 \\ a^3 + b^3 = 6 \end{cases}$$

a^3 と b^3 を解にもつ2次方程式は

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0$$

$$t = 2, 4$$

$$a^3 = 2, b^3 = 4 \quad \text{とすると}$$

一般性を失わない。

$$\text{よって } a = \sqrt[3]{2}, b = \sqrt[3]{4} \text{ とあり。}$$

$$x^3 - 6x + 6 = 0 \quad \text{より}$$

$$(x + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(x + \sqrt[3]{2}\omega + \sqrt[3]{4}\omega^2)(x + \sqrt[3]{2}\omega^2 + \sqrt[3]{4}\omega) = 0$$

よって3つの解は

$$x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4},$$

$$x = -\sqrt[3]{2}\omega - \sqrt[3]{4}\omega^2$$

$$= -\sqrt[3]{2}\omega - \sqrt[3]{4}(-\omega - 1)$$

$$= \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})\omega,$$

$$x = -\sqrt[3]{2}\omega^2 - \sqrt[3]{4}\omega$$

$$= -\sqrt[3]{2}(-\omega - 1) - \sqrt[3]{4}\omega$$

$$= \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})\omega$$

よって

$$\underline{\underline{x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})\omega, \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})\omega}}$$

a, b, c は整数とする。4次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = 0$ の実数解が1と3だけとなるような a の最大値と最小値を求めよ。 (2017 早稲田大)

$x=1, 3$ が解なので

$$\begin{cases} 1+a+b+c+3=0 \\ 81+27a+9b+3c+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-4 & \text{---①} \\ 9a+3b+c=-28 & \text{---②} \end{cases}$$

②-① より

$$8a+2b=-24$$

$$b=-4a-12$$

①に代入して

$$a-4a-12+c=-4$$

$$c=3a+8$$

このとき、与式は

$$x^4 + ax^3 + (-4a-12)x^2 + (3a+8)x + 3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & a & -4a-12 & 3a+8 & 3 \\ & & 1 & a+1 & -3a-11 & -3 \\ \hline 3 & 1 & a+1 & -3a-11 & -3 & 0 \\ & & 3 & 3a+12 & 3 & \\ \hline & 1 & a+4 & 1 & 0 & \end{array} \right)$$

$$(x-1)(x-3)\{x^2+(a+4)x+1\}=0$$

$$x=1, 3, x^2+(a+4)x+1=0$$

実数解が1と3だけになるためには

$$x^2+(a+4)x+1=0 \quad \text{の解が}$$

(i) 1 と 3

(ii) 1 と 1

(iii) 3 と 3

(iv) 虚数解

となるように a を、解と係数の関係より

(i) と (iii) が起こることはない。

(ii) a のとき

解と係数の関係より

$$1+1=-a-4$$

$$a=-6$$

(iv) a のとき

判別式 $D < 0$ より

$$D=(a+4)^2-4$$

$$=a^2+8a+12 < 0$$

$$(a+6)(a+2) < 0$$

$$-6 < a < -2$$

(i) ~ (iv) より

$$-6 \leq a < -2$$

a は整数 a のとき、 b, c も整数であり

$$a = -6, -5, -4, -3$$

$$\therefore \underline{\underline{\text{Max} = -3, \text{min} = -6}}$$

正の定数 a, b に対し, $f(x) = ax^2 - b$ とおく。

(1) $f(f(x)) - x$ は $f(x) - x$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(f(x)) - x = 0$ が異なる4つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ。 (2014 横浜国立大)

(1) (証明)

$$f(x) = ax^2 - b \quad \text{より} \quad b = ax^2 - f(x)$$

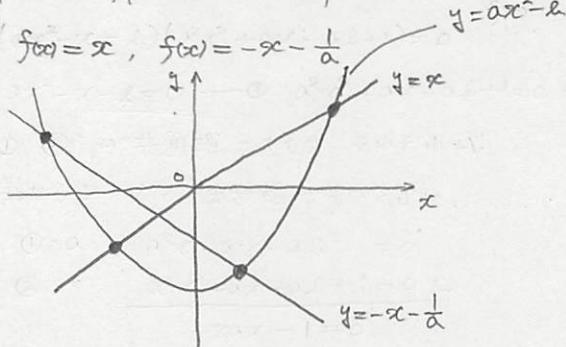
$$\begin{aligned} f(f(x)) - x &= a\{f(x)\}^2 - b - x \\ &= a\{f(x)\}^2 - (ax^2 - f(x)) - x \\ &= a\{(f(x))^2 - x^2\} + f(x) - x \\ &= a\{f(x) + x\}\{f(x) - x\} + \{f(x) - x\} \\ &= \{f(x) - x\}\{af(x) + ax + 1\} \end{aligned}$$

よって $f(x) - x$ で割り切れる。 ■

(2) 解法1

$$f(f(x)) - x = 0$$

$$\{f(x) - x\}\{af(x) + ax + 1\} = 0$$



$a > 0, b > 0$ なら

$f(x) = x$ は常に異なる2つの実数解をもつ。

$$f(x) = -x - \frac{1}{a} \quad \text{と} \quad$$

$$ax^2 - b = -x - \frac{1}{a}$$

$$a^2x^2 + ax - ab + 1 = 0$$

判別式 $D > 0$ より

$$a^2 - 4a^2(-ab + 1) > 0$$

$$1 + 4ab - 4 > 0$$

$$4ab > 3$$

$$ab > \frac{3}{4}$$

$$\left(\begin{array}{l} y = x \text{ と } y = -x - \frac{1}{a} \text{ の交点は} \\ \left(-\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a}\right) \text{ であり、} \\ y = ax^2 - b \text{ がこの点を通るとき、} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2a} = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 - b \\ -\frac{1}{2a} = \frac{1}{4a} - b \\ b = \frac{3}{4a} \\ ab = \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$$\text{よって} \quad \underline{\underline{ab > \frac{3}{4}}}$$

解法2

$$g(x) = f(x) - x, \quad h(x) = af(x) + ax + 1 \quad \text{と} \quad$$

$f(f(x)) - x = g(x)h(x) = 0$ が異なる4つの実数解をもつための条件は, $g(x) = 0$ と $h(x) = 0$ がそれぞれ異なる2つの実数解をもち、かつ、共通解をもたないことである。

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - x - b = 0 & \text{--- ①} \\ a^2x^2 + ax - ab + 1 = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} \times a \quad a^2x^2 - ax - ab = 0$$

$$\begin{array}{r} \text{②} \quad a^2x^2 + ax - ab + 1 = 0 \quad (- \\ \hline -2ax - 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{2a} \end{array}$$

①に代入して

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} - b = 0$$

$$b = \frac{3}{4a}$$

$$ab = \frac{3}{4}$$

よって 共通解をもたないこと $ab \neq \frac{3}{4}$

①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$D_1 > 0$ より

$$1 + 4ab > 0 \quad \text{③} \quad ab > -\frac{1}{4}$$

$D_2 > 0$ より

$$a^2 - 4a^2(-ab + 1) > 0 \quad \text{④} \quad ab > \frac{3}{4}$$

よって

$$\underline{\underline{ab > \frac{3}{4}}}$$

実数を係数とする3次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し、次の条件を考える。

(A) 方程式 $f(x) = 0$ の解であるすべての複素数 α に対し、 α^3 もまた $f(x) = 0$ の解である。

(B) 方程式 $f(x) = 0$ は虚数解を少なくとも1つもつ。

この2つの条件(A), (B)を同時に満たす3次式をすべて求めよ。

(2016 京都大)

実数係数の3次方程式 において

α が解 α とき $\bar{\alpha}$ も解 である。

(B) より 3つの解 ϵ 。

α (虚数), $\bar{\alpha}$, β (実数) とできる。

(A) より

$$\beta^3 = \beta \quad \text{を満足するので}$$

$$\beta^3 - \beta = 0$$

$$\beta(\beta+1)(\beta-1) = 0$$

$$\beta = 0, -1, 1$$

また, α は虚数 において $\alpha^3 \neq \alpha$

つまり $\alpha^3 = \bar{\alpha}, \beta$

(i) $\alpha^3 = \bar{\alpha}$ のとき

$$\alpha = p + qi \quad \text{とおくと} \quad (q \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= p^3 + 3p^2qi + 3pq^2i^2 + q^3i^3 \\ &= p^3 + 3p^2qi - 3pq^2 - q^3i \\ &= (p^3 - 3pq^2) + (3p^2q - q^3)i \\ \bar{\alpha} &= p - qi \end{aligned}$$

$$\alpha^3 = \bar{\alpha} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} p^3 - 3pq^2 = p & \text{--- ①} \\ 3p^2q - q^3 = -q & \text{--- ②} \end{cases}$$

② において $q \neq 0$ より

$$3p^2 - q^2 = -1$$

$$q^2 = 3p^2 + 1 \quad \text{--- ③}$$

① より

$$p^3 - 3p(3p^2 + 1) = p$$

$$p^3 - 9p^3 - 3p = p$$

$$8p^3 + 4p = 0$$

$$p(2p^2 + 1) = 0$$

p は実数 において $p = 0$

③ に代入して

$$q^2 = 1 \quad \text{④} \quad q = \pm 1$$

よって

$$\alpha = \pm i$$

つまり

3つの解は

$i, -i, \beta$ である。

解と係数の関係より

$$\begin{cases} i + (-i) + \beta = -a \\ i(-i) + (-i)\beta + \beta i = b \\ i(-i)\beta = -c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\beta \\ b = 1 \\ c = -\beta \end{cases}$$

$$\beta = 0 \quad \alpha \text{ のとき } (a, b, c) = (0, 1, 0)$$

$$f(x) = x^3 + x$$

$$\beta = 1 \quad \alpha \text{ のとき } (a, b, c) = (-1, 1, -1)$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$\beta = -1 \quad \alpha \text{ のとき } (a, b, c) = (1, 1, 1)$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

(ii) $\alpha^3 = \beta$ のとき

$$\beta = 0 \quad \alpha \text{ のとき } \alpha^3 = 0$$

$\alpha = 0$ となり α が虚数 であることに不合理

$$\beta = 1 \quad \alpha \text{ のとき } \alpha^3 = 1$$

$$\alpha^3 - 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α は虚数 において $x^2 + x + 1 = 0$ の解である。

$$\text{よって } f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

$$\beta = -1 \quad \alpha \text{ のとき } \alpha^3 = -1$$

$$\alpha^3 + 1 = 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$$

α は虚数 において $x^2 - x + 1 = 0$ の解である。

$$\text{よって } f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$$

(i), (ii) より

$$f(x) = x^3 + x, \quad x^3 - x^2 + x - 1, \quad x^3 + x^2 + x + 1, \quad x^3 - 1, \quad x^3 + 1$$