

連立不等式 $x^2 + ax + b \geq 0$, $4x^2 - 8x - 5 \leq 0$ の解は $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ または $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ である。

このとき, $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ である。

$$4x^2 - 8x - 5 \leq 0 \quad \text{より}$$

$$(2x-5)(2x+1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

よって

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

とおくと

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{かつ} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

を満足す とい

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + b = 0$$

$$\text{よって} \quad 2a + 4b = -1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}a + b = 0$$

$$\text{よって} \quad 6a + 4b = -9$$

①, ② を連立して

$$\underline{\underline{a = -2, \quad b = \frac{3}{4}}}$$

a を実数の定数とする。次の2つの2次不等式について考える。

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \quad \dots\dots (A)$$

$$x^2 - (2a-3)x + a^2 - 3a - 10 \leq 0 \quad \dots\dots (B)$$

(1) 不等式(A)を満たすすべての x が不等式(B)を満たすような a の値の範囲を求めよ。

(2) 不等式(A)と不等式(B)を同時に満たす x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2013 関西大)

(1)

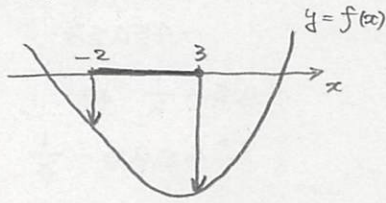
$$(A) \quad x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$(x-3)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 3$$

(A)の解集合C(B)の解集合

となるように。



$$f(x) = x^2 - (2a-3)x + a^2 - 3a - 10$$

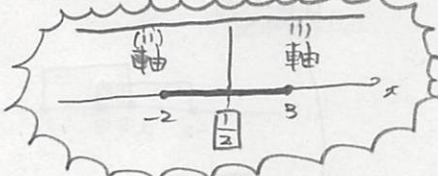
と置く

解法1

$-2 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最大値 ≤ 0

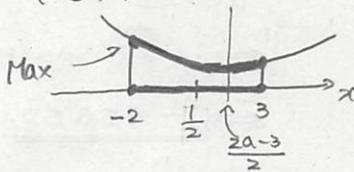
となるように。

軸: $x = \frac{2a-3}{2}$, 下に凸



$$(i) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{2a-3}{2} \quad a \text{ のとき}$$

$$(つまり) \quad 2 \leq a \quad a \text{ のとき}$$



$$\text{Max} = a^2 + a - 12 \quad (x = -2)$$

よって

$$a^2 + a - 12 \leq 0$$

$$(a+4)(a-3) \leq 0$$

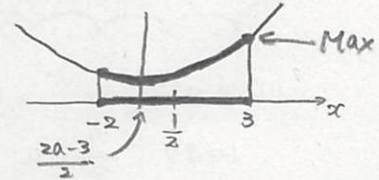
$$-4 \leq a \leq 3$$

$$2 \leq a \quad \text{より}$$

$$2 \leq a \leq 3$$

$$(ii) \quad \frac{2a-3}{2} \leq \frac{1}{2} \quad a \text{ のとき}$$

$$(つまり) \quad a \leq 2 \quad a \text{ のとき}$$



$$\text{Max} = a^2 - 9a + 8 \quad (x = 3)$$

よって

$$a^2 - 9a + 8 \leq 0$$

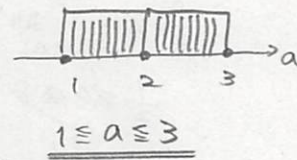
$$(a-1)(a-8) \leq 0$$

$$1 \leq a \leq 8$$

$$a \leq 2 \quad \text{より}$$

$$1 \leq a \leq 2$$

(i), (ii) より



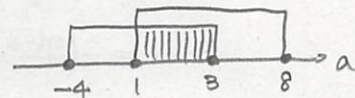
解法2

$$f(-2) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad f(3) \leq 0$$

を満たすように。

よって

$$-4 \leq a \leq 3 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq a \leq 8$$



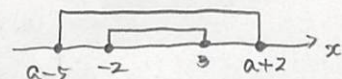
$$1 \leq a \leq 3$$

解法3

$$(B) \quad x^2 + (-2a+3)x + (a-5)(a+2) \leq 0$$

$$(x-a+5)(x-a-2) \leq 0$$

$$a-5 \leq x \leq a+2$$



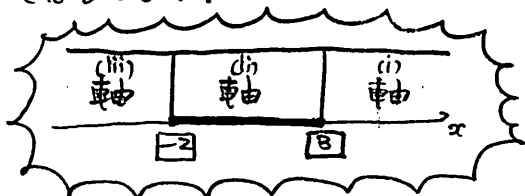
$$\begin{cases} a-5 \leq -2 \\ a+2 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3$$

(裏に続く)

(2) **解法1**

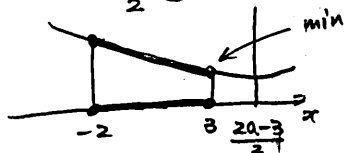
$-2 \leq x \leq 3$ における $(f(x))$ の最小値 ≤ 0

となるように。



(i) $3 \leq \frac{2a-3}{2}$ a とき

(つまり) $\frac{9}{2} \leq a$ a とき



$\min = a^2 - 9a + 8 \quad (x=3)$

よって $a^2 - 9a + 8 \leq 0$

$(a-1)(a-8) \leq 0$

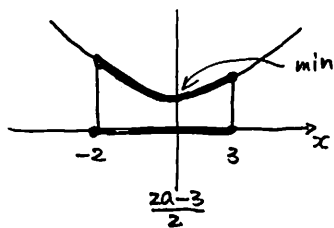
$1 \leq a \leq 8$

$\frac{9}{2} \leq a$ より

$\frac{9}{2} \leq a \leq 8$

(ii) $-2 \leq \frac{2a-3}{2} \leq 3$ a とき

(つまり) $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$ a とき



$\min = -\left(\frac{2a-3}{2}\right)^2 + a^2 - 3a - 10$

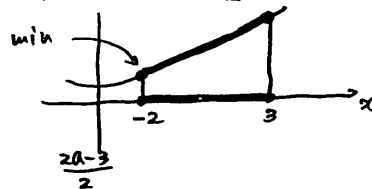
$= -\frac{4a^2 - 12a + 9}{4} + a^2 - 3a - 10$

$= -\frac{49}{4} \quad (x = \frac{2a-3}{2})$

これは $\min \leq 0$ 正常に満たす。

(iii) $\frac{2a-3}{2} \leq -2$ a とき

(つまり) $a \leq -\frac{1}{2}$ a とき



$\min = a^2 + a - 12 \quad (x=-2)$

よって $a^2 + a - 12 \leq 0$

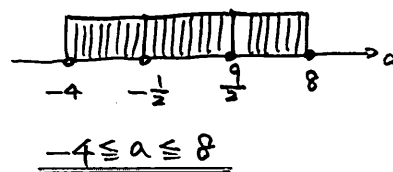
$(a+4)(a-3) \leq 0$

$-4 \leq a \leq 3$

$a \leq -\frac{1}{2}$ より

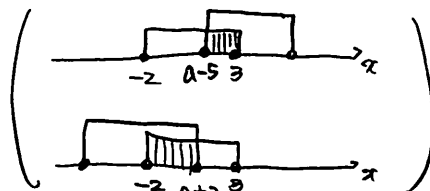
$-4 \leq a \leq -\frac{1}{2}$

(i) ~ (iii) より



$-4 \leq a \leq 8$

解法2



$a-5 \leq 3$ から $-2 \leq a+2$

$\Leftrightarrow a \leq 8$ から $-4 \leq a$

$\Leftrightarrow -4 \leq a \leq 8$

m は定数とする。連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 3mx + 2m^2 < 0 \\ 2x^2 - (m-4)x - 2m < 0 \end{cases}$ の整数解がただ1つとなるとき
の整数解と、そのときの m の範囲を求めよ。

(2016 明治大)

$$\begin{cases} x^2 - 3mx + 2m^2 < 0 & \text{--- ①} \\ 2x^2 - (m-4)x - 2m < 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$(x-m)(x-2m) < 0$$

$$\begin{cases} m < x < 2m & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ 2m < x < m & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

② より

$$2x^2 + (-m+4)x - 2m < 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -m & \rightarrow & -m \\ 1 & 2 & \rightarrow & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2x-m)(x+2) < 0$$

$$\begin{cases} -2 < x < \frac{m}{2} & (m > -4 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (m = -4 \text{ のとき}) \\ \frac{m}{2} < x < -2 & (m < -4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

①, ② とともに解をもつことが必要

なので $m \neq 0, -4$ (i) $m > 0$ のとき

$$\begin{cases} \text{① } m < x < 2m \\ \text{② } -2 < x < \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\frac{m}{2} < m \text{ に注意して}$$

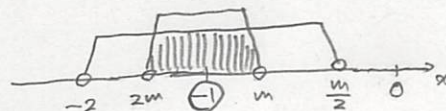


解なし。

(ii) $-4 < m < 0$ のとき

$$\begin{cases} \text{① } 2m < x < m \\ \text{② } -2 < x < \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$m < \frac{m}{2} \text{ に注意して}$$



$$\begin{cases} 2m < -1 \\ -1 < m \end{cases}$$

$$-1 < m < -\frac{1}{2}$$

$$-4 < m < 0 \text{ より}$$

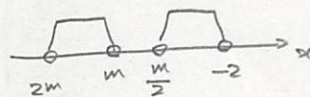
$$-1 < m < -\frac{1}{2}$$

このとき

整数解 $x = -1$ (iii) $m < -4$ のとき

$$\begin{cases} \text{① } 2m < x < m \\ \text{② } \frac{m}{2} < x < -2 \end{cases}$$

$$m < \frac{m}{2} \text{ に注意して}$$



解なし

(i) ~ (iii) より

$$\underline{\underline{\text{整数解 } x = -1; -1 < m < -\frac{1}{2}}}$$

不等式 $ax^2 + y^2 + az^2 - xy - yz - zx \geq 0$ が任意の実数 x, y, z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2007 滋賀県立大)

解法1

$$f(x, y, z) = ax^2 + y^2 + az^2 - xy - yz - zx \quad \text{とおく}$$

y, z を固定すると、任意の x に対して

成り立つには $a \geq 0$ が必要。

$a = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= y^2 - xy - yz - zx \\ &= y^2 + (-x - z)y - zx \\ &= \left(y - \frac{x+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 - zx \\ &= \left(y - \frac{x+z}{2}\right)^2 - \frac{x^2 + 2xz + z^2}{4} - zx \\ &= \left(y - \frac{x+z}{2}\right)^2 - \frac{x^2 + 6xz + z^2}{4} \\ &= \left(y - \frac{x+z}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \{(x+3z)^2 - 8z^2\} \\ &= \left(y - \frac{x+z}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} (x+3z)^2 + 2z^2 \end{aligned}$$

ここで

$$x = 4, y = 2, z = 0 \quad \text{とすると}$$

$$f(4, 2, 0) = 4 - 8 = -4 < 0$$

となり $f(x, y, z) \geq 0$ を満たさない。

よって $a > 0$ としよう。

$$f(x, y, z) = ax^2 + (-y - z)x + y^2 - yz + az^2 = 0$$

この x についての判別式 $D_x \leq 0$ となること

が必要

$$\begin{aligned} D_x &= (-y - z)^2 - 4a(y^2 - yz + az^2) \\ &= y^2 + 2yz + z^2 - 4ay^2 + 4ayz - 4a^2z^2 \\ &= (1 - 4a)y^2 + (2 + 4a)yz + (1 - 4a^2)z^2 \leq 0 \end{aligned}$$

z を固定すると、任意の y に対して成り立つには $1 - 4a \leq 0$ (つまり $a \geq \frac{1}{4}$) が必要

$a = \frac{1}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} D_x &= 3yz + \frac{3}{4}z^2 \\ &= \frac{3}{4}z(z + 4y) \end{aligned}$$

なので

任意の z に対しては $D_x \leq 0$

は成り立たない。

よって $a > \frac{1}{4}$ としよう。

$D_x = 0$ の y についての判別式

$D_y \leq 0$ となることが必要

$$\begin{aligned} D_y/4 &= (1 + 2a)^2 z^2 - (1 - 4a)(1 - 4a^2)z^2 \\ &= z^2 \{1 + 4a + 4a^2 - 1 + 4a^2 + 4a - 16a^3\} \\ &= z^2 (-16a^3 + 8a^2 + 8a) \leq 0 \end{aligned}$$

$z^2 \geq 0$ なので

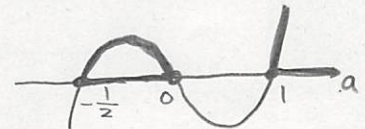
$$-16a^3 + 8a^2 + 8a \leq 0$$

となるように。

$$2a^3 - a^2 - a \geq 0$$

$$a(2a^2 - a - 1) \geq 0$$

$$a(2a + 1)(a - 1) \geq 0$$



$$-\frac{1}{2} \leq a \leq 0, 1 \leq a$$

$$a > \frac{1}{4} \quad \text{より}$$

$$\underline{1 \leq a}$$

解法2

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2(a - 1)(x^2 + y^2 + z^2)\}$$

(i) $a \geq 1$ のとき

$f(x, y, z) \geq 0$ は成り立つ。

(ii) $a < 1$ のとき

$x = y = z \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (2a - 2)x^2 \\ &= 2(a - 1)x^2 < 0 \end{aligned}$$

(i), (ii) より

$$\underline{a \geq 1}$$

a を実数とし, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $g(x) = -x^2 + ax + a$ とする。

(1) すべての実数 s, t に対して $f(s) \geq g(t)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x) \geq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。(2011 神戸大)

(1) $\min f(x) \geq \max g(x)$

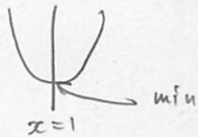
となるように。

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$= (x-1)^2 + 1$$

頂点 $(1, 1)$

軸: $x=1$, 下に凸



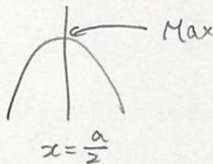
$$\min f(x) = 1 \quad (x=1)$$

$$g(x) = -x^2 + ax + a$$

$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + a$$

頂点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + a\right)$

軸: $x = \frac{a}{2}$, 上に凸



$$\max g(x) = \frac{a^2}{4} + a \quad (x = \frac{a}{2})$$

よって

$$1 \geq \frac{a^2}{4} + a$$

$$a^2 + 4a - 4 \leq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} a^2 + 4a - 4 = 0 \text{ とおくと} \\ a = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{array} \right)$$



$$\underline{\underline{-2-2\sqrt{2} \leq a \leq -2+2\sqrt{2}}}$$

(2)

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 2 + x^2 - ax - a$$

$$= 2x^2 + (-a-2)x - a + 2 = h(x)$$

とおく。

$0 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対して、

$h(x) \geq 0$ が成り立つように。

つまり、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で } h(x) \text{ の最小値} \geq 0$$

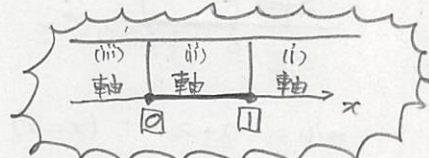
となるように。

$$h(x) = 2\left(x - \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2+4a+4}{8} - a + 2$$

$$= 2\left(x - \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}$$

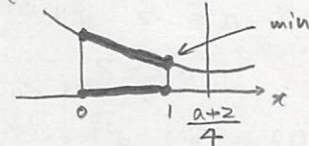
頂点 $\left(\frac{a+2}{4}, -\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}\right)$

軸: $x = \frac{a+2}{4}$, 下に凸



(i) $1 \leq \frac{a+2}{4}$ $a \geq 2$ のとき

(つまり $2 \leq a$ のとき)



$$\min = -2a + 2 \quad (x=1)$$

よって $-2a + 2 \geq 0$

$$a \leq 1$$

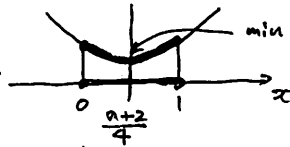
$$2 \leq a \text{ より}$$

不適

(裏に続く)

$$(ii) 0 \leq \frac{a+2}{4} \leq 1 \quad a \geq -2$$

$$(\text{つまり}) -2 \leq a \leq 2 \quad a \geq -2$$



$$\min = -\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2} \quad (x = \frac{a+2}{4})$$

$$\text{つまり} -\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2} \geq 0$$

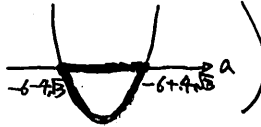
$$\boxed{a^2 + 12a - 12 \leq 0}$$

$$\left(\begin{array}{l} a^2 + 12a - 12 = 0 \quad \text{と} \quad a' < b \\ a = -6 \pm 4\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$-6 - 4\sqrt{3} \leq a \leq -6 + 4\sqrt{3}$$

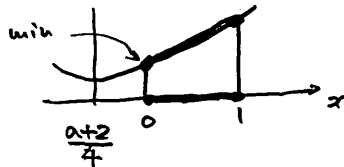
$$-2 \leq a \leq 2 \quad \text{より}$$

$$-2 \leq a \leq -6 + 4\sqrt{3}$$



$$(iii) \frac{a+2}{4} \leq 0 \quad a \leq -2$$

$$(\text{つまり}) a \leq -2 \quad a \leq -2$$



$$\min = -a + 2 \quad (x = 0)$$

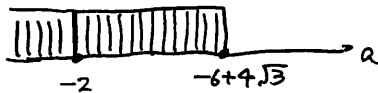
$$\text{つまり} -a + 2 \geq 0$$

$$a \leq 2$$

$$a \leq -2 \quad \text{より}$$

$$a \leq -2$$

$$(i) \sim (iii) \quad \text{より}$$



$$\underline{\underline{a \leq -6 + 4\sqrt{3}}}$$

a, b は実数で, $P = a^4 - 6a^2b + b^2 + 32b$ とおく。

(1) すべての実数 b に対して $P \geq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(2) すべての実数 a に対して $P \geq 0$ となるような b の値の範囲を求めよ。

(2007 阪南大)

(1)

$$P = a^4 - 6a^2b + b^2 + 32b$$

$$= b^2 + (-6a^2 + 32)b + a^4$$

すべての $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $P \geq 0$ と
なるには

$P = 0$ の b について a 判別式

$D_b \leq 0$ となること。

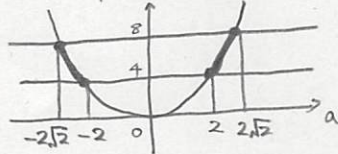
$$D_b/4 = (-3a^2 + 16)^2 - a^4$$

$$= 8a^4 - 96a^2 + 256 \leq 0$$

$$a^4 - 12a^2 + 32 \leq 0$$

$$(a^2 - 4)(a^2 - 8) \leq 0$$

$$4 \leq a^2 \leq 8$$



$$\underline{-2\sqrt{2} \leq a \leq -2, 2 \leq a \leq 2\sqrt{2}}$$

(2)

$$\begin{cases} a^2 = x & \text{とおく} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$P = x^2 - 6bx + b^2 + 32b$$

すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して $P \geq 0$

となることは

$x \geq 0$ なるすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

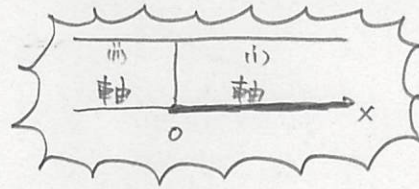
$P \geq 0$ となることである。

(P の最小値) ≥ 0 となること。

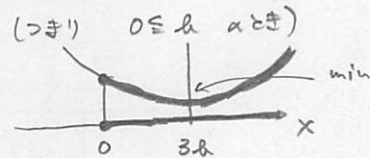
$$P = (x - 3b)^2 - 8b^2 + 32b$$

(頂点 $(3b, -8b^2 + 32b)$)

(軸: $x = 3b$, 下に凸)



(i) $0 \leq 3b$ a とき



$$\min = -8b^2 + 32b \quad (x = 3b)$$

$$\therefore -8b^2 + 32b \geq 0$$

$$b^2 - 4b \leq 0$$

$$b(b - 4) \leq 0$$

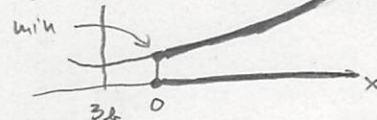
$$0 \leq b \leq 4$$

$0 \leq b$ より

$$0 \leq b \leq 4$$

(ii) $3b \leq 0$ a とき

(つまり $b \leq 0$ a とき)



$$\min = b^2 + 32b \quad (x = 0)$$

$$\therefore b^2 + 32b \geq 0$$

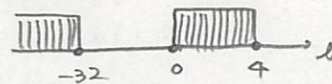
$$b(b + 32) \geq 0$$

$$b \leq -32, 0 \leq b$$

$b \leq 0$ より

$$b \leq -32, b = 0$$

(i), (ii) より



$$\underline{b \leq -32, 0 \leq b \leq 4}$$

a を2以上の実数とし, $f(x) = (x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x)) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。

(2013 京都大)

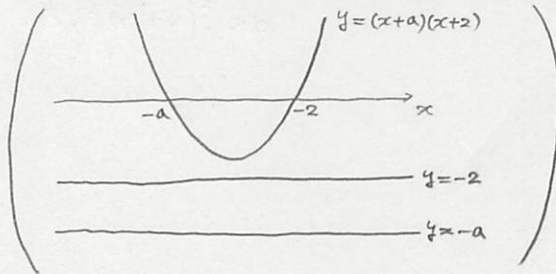
$$f(f(x)) > 0 \quad \text{より}$$

$$(f(x)+a)(f(x)+2) > 0$$

$$a \geq 2 \quad \text{より} \quad -a \leq -2$$

$$f(x) < -a, -2 < f(x)$$

$$(x+a)(x+2) < -a, -2 < (x+a)(x+2)$$



すべての実数 x に対して

$$(x+a)(x+2) > -2$$

$$x^2 + (a+2)x + 2a+2 > 0$$

が成り立つとよい。

$$x^2 + (a+2)x + 2a+2 = 0 \quad \text{とおくと}$$

判別式 $D < 0$ とするとよい。

$$D = (a+2)^2 - 4(2a+2)$$

$$= a^2 + 4a + 4 - 8a - 8$$

$$= a^2 - 4a - 4 < 0$$

$$\left(\begin{array}{l} a^2 - 4a - 4 = 0 \quad \text{とおくと} \\ a = 2 \pm 2\sqrt{2} \end{array} \right)$$

よって

$$2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$$

ここで $a \geq 2$ より

$$\underline{\underline{2 \leq a < 2 + 2\sqrt{2}}}$$

k を正の整数とする。 $5n^2 - 2kn + 1 < 0$ を満たす整数 n が、ちょうど1個であるような k をすべて求めよ。

(2008 一橋大)

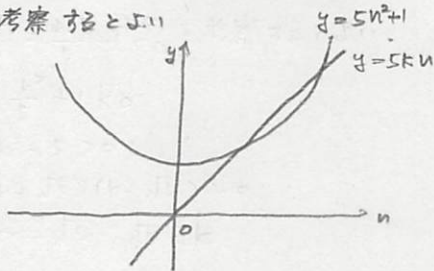
解法1

$$5n^2 - 2kn + 1 < 0 \quad \text{より}$$

$$5n^2 + 1 < 2kn$$

$$y = 5n^2 + 1 \quad \text{と} \quad y = 5kn \quad \text{のグラフ}$$

を考察するとよい



k が増加すると不等式を満たす整数 n も増加する。

$$5n^2 - 2kn + 1 = 0 \quad \text{と} \quad \Delta$$

判別式 $\Delta > 0$ が必要

$$\Delta/4 = k^2 - 5 > 0$$

$$(k + \sqrt{5})(k - \sqrt{5}) > 0$$

$$k < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < k$$

k は正の整数なので

$$k = 3, 4, 5, \dots$$

(i) $k = 3$ のとき

$$5n^2 - 6n + 1 < 0$$

$$(n-1)(5n-1) < 0$$

$$\frac{1}{5} < n < 1$$

これを満たす整数 n は存在しない

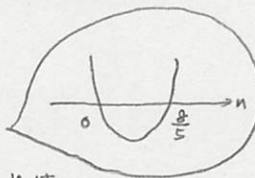
(ii) $k = 4$ のとき

$$5n^2 - 8n + 1 < 0$$

$$n(5n-8) < -1$$

これを満たす整数 n は

$$n = 1 \quad \text{のみ}$$



(iii) $k = 5$ のとき

$$5n^2 - 10n + 1 < 0$$

$$5n(n-2) < -1$$

これを満たす整数 n は

$$n = 1 \quad \text{のみ}$$



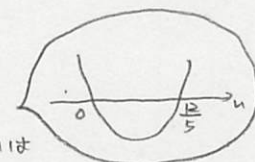
(iv) $k = 6$ のとき

$$5n^2 - 12n + 1 < 0$$

$$n(5n-12) < -1$$

これを満たす整数 n は

$$n = 1, 2$$



(i) ~ (iv) より

$$\underline{\underline{k = 4, 5}}$$

解法2

$$f(n) = 5n^2 - 2kn + 1$$

$$= 5\left(n - \frac{k}{5}\right)^2 - \frac{k^2}{5} + 1 \quad \text{とおく}$$

$f(x) < 0$ を満たす実数 x が存在するとき

$$-\frac{k^2}{5} + 1 < 0$$

$$k^2 - 5 > 0$$

$$(k + \sqrt{5})(k - \sqrt{5}) > 0$$

$$k < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < k$$

k は正の整数なので $k \geq 3$

このとき

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 6 - 2k$$

$$= 2(3 - k) \leq 0$$

(i) $k = 3$ のとき

$$f(x) = 5x^2 - 6x + 1$$

$$= (x-1)(5x-1) < 0$$

$$\frac{1}{5} < x < 1$$

よって $f(n) < 0$ を満たす

整数 n は存在しない

(ii) $k \geq 4$ のとき

$$f(1) < 0 \quad \text{となる}$$

$f(n) < 0$ を満たす整数 n がちょうど1個

であるためには

$$f(2) \geq 0$$

$$20 - 4k + 1 \geq 0$$

$$-4k \geq -21$$

$$k \leq \frac{21}{4}$$

$$k \geq 4 \text{ より } 4 \leq k \leq \frac{21}{4}$$

k は整数なので $k = 4, 5$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{k = 4, 5}}$$

解法3

$$f(x) = 5x^2 - 2kx + 1 \quad \text{とおく.}$$

$f(n) < 0$ を満たす整数 n がちょうど1個であるためには、 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解を持ち、その2解の差が2以下であることが必要.

$$f(x) = 0 \quad \text{より} \quad x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 5}}{5}$$

$$\begin{cases} k^2 - 5 > 0 & \text{--- ①} \\ \frac{k + \sqrt{k^2 - 5}}{5} - \frac{k - \sqrt{k^2 - 5}}{5} \leq 2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より

$$(k + \sqrt{5})(k - \sqrt{5}) > 0$$

$$k < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < k$$

② より

$$\frac{2}{5} \sqrt{k^2 - 5} \leq 2$$

$$\sqrt{k^2 - 5} \leq 5$$

辺々正数なので2乗してよい.

$$k^2 - 5 \leq 25$$

$$k^2 - 30 \leq 0$$

$$(k + \sqrt{30})(k - \sqrt{30}) \leq 0$$

$$-\sqrt{30} \leq k \leq \sqrt{30}$$

①, ②, $k > 0$ より

$$\sqrt{5} < k \leq \sqrt{30}$$

k は整数より $k = 3, 4, 5$

(i) $k = 3$ のとき

$$5n^2 - 6n + 1 < 0$$

↓

x が $3 < x < 6$ の範囲にあるとき、次の問いに答えよ。

- (1) この範囲では常に $\frac{1}{x-3} + \frac{4}{6-x} \geq 3$ が成立することを示せ。
 (2) この範囲で常に $\frac{5}{x-3} + \frac{4}{6-x} \geq a$ が成立するような定数 a の最大値を求めよ。

(2013 香川大)

(1) (証明)

$$3 < x < 6 \quad a \text{ とき} \quad (x-3)(6-x) > 0$$

なので

$$\frac{1}{x-3} + \frac{4}{6-x} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 6-x+4(x-3) \geq 3(x-3)(6-x)$$

$$\Leftrightarrow 6-x+4x-12 \geq -3x^2+27x-54$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-24x+48 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0$$

$3 < x < 6$ でこれは常に成り立つ。

ゆえに

与不等式は成り立つ。 ■

(2) 解法1

$$\frac{5}{x-3} + \frac{4}{6-x} \geq a \quad \text{①}$$

$$\Leftrightarrow 5(6-x)+4(x-3) \geq a(x-3)(6-x)$$

$$\Leftrightarrow 30-5x+4x-12 \geq -ax^2+9ax-18a$$

$$\Leftrightarrow ax^2+(-9a-1)x+18a+18 \geq 0 \quad \text{②}$$

ゆえに

$3 < x < 6$ で ② が常に成り立つ条件を考えるとよい。

$a \leq 0$ のとき ① が成り立つのは自明なので

$a > 0$ としてよい。

$$f(x) = ax^2 + (-9a-1)x + 18a+18 \quad \text{とおく。}$$

$$\text{軸: } x = \frac{9a+1}{2a}, \quad \text{下に凸}$$

$$(i) \quad \frac{9a+1}{2a} \leq 3 \quad \text{かつ } a > 0 \quad a \text{ とき}$$

$$\left(\begin{array}{l} 9a+1 \leq 6a \\ 3a \leq -1 \\ a \leq -\frac{1}{3} \\ a > 0 \text{ とともに満たす } a \text{ は存在しない。} \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad 3 < \frac{9a+1}{2a} < 6 \quad \text{かつ } a > 0 \quad a \text{ とき}$$

$$\left(\begin{array}{l} 6a < 9a+1 < 12a \\ \left\{ \begin{array}{l} -3a < 1 \\ -3a < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > -\frac{1}{3} \\ a > \frac{1}{3} \end{array} \right. \\ a > 0 \text{ とあわせて} \\ a > \frac{1}{3} \quad a \text{ とき} \end{array} \right)$$



判別式 $D \leq 0$ とするとよい。

$$D = (-9a-1)^2 - 4a(18a+18)$$

$$= 81a^2 + 18a + 1 - 72a^2 - 72a$$

$$= 9a^2 - 54a + 1 \leq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 9a^2 - 54a + 1 = 0 \quad \text{と解くと} \\ a = \frac{27 \pm \sqrt{720}}{9} = \frac{27 \pm 12\sqrt{5}}{9} = \frac{9 \pm 4\sqrt{5}}{3} \end{array} \right)$$

$$\frac{9-4\sqrt{5}}{3} \leq a \leq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

$$a > \frac{1}{3} \quad \text{より} \quad \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

$$(iii) \quad 6 \leq \frac{9a+1}{2a} \quad \text{かつ } a > 0 \quad a \text{ とき}$$

$$(\text{つまり}) \quad 0 < a \leq \frac{1}{3} \quad a \text{ とき}$$

$$a < \frac{9+4\sqrt{5}}{3} \quad \text{である。}$$

(i) ~ (iii) より

$$\text{Max } a = \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

解説2

$$\frac{5}{x-3} + \frac{4}{6-x} = \frac{5(6-x) + 4(x-3)}{(x-3)(6-x)}$$

$$= \frac{18-x}{(x-3)(6-x)} \quad (>0)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ 18-x=t \quad \text{よって} \quad x=18-t \\ 3 < x < 6 \quad \text{より} \quad 12 < t < 15 \end{array} \right)$$

$$= \frac{t}{(15-t)(t-12)}$$

$$= \frac{t}{-t^2 + 27t - 180}$$

$$= \frac{1}{-t + 27 - \frac{180}{t}}$$

$$= \frac{1}{27 - (t + \frac{180}{t})}$$

$$t > 0 \quad \text{なので} \quad \frac{180}{t} > 0$$

(相加) $\geq$ (相乗) より

$$t + \frac{180}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{180}{t}} = 12\sqrt{5}$$

$$-(t + \frac{180}{t}) \leq -12\sqrt{5}$$

$$27 - (t + \frac{180}{t}) \leq 27 - 12\sqrt{5}$$

よって ともに正なので

$$\frac{1}{27 - (t + \frac{180}{t})} \geq \frac{1}{27 - 12\sqrt{5}}$$

よって

$$\frac{5}{x-3} + \frac{4}{6-x} \geq \frac{9+4\sqrt{5}}{3}$$

等号成立は

$$t = \frac{180}{t} \quad \text{あたり}$$

$$t^2 = 180$$

$$12 < t < 15 \quad \text{より} \quad t = 6\sqrt{5}$$

$$18-x = 6\sqrt{5}$$

$$\therefore x = 18 - 6\sqrt{5} \quad \text{あたり}$$

よって

$$\underline{\underline{\text{Max } a = \frac{9+4\sqrt{5}}{3}}}$$