

$x=1+\sqrt{7}$ のとき、 $x^4+2x^3-12x^2-26x-14$ の値を求めよ。

$$\left(\begin{array}{l} x=1+\sqrt{7} \quad \text{より} \\ x-1=\sqrt{7} \\ \text{両辺 2乗して} \\ x^2-2x+1=7 \\ x^2-2x-6=0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 2 & & \\ 1 & -2 & -6 & 1 & 2 & -12 & -26 & -14 \\ & & & 1 & -2 & -6 & & \\ \hline & & & & 4 & -6 & -26 & -14 \\ & & & & 4 & -8 & -24 & \\ \hline & & & & & 2 & -2 & -14 \\ & & & & & 2 & -4 & -12 \\ \hline & & & & & & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & x^4+2x^3-12x^2-26x-14 \\ &= (x^2-2x-6)(x^2+4x+2) + 2x-2 \\ &= 2(1+\sqrt{7})-2 \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{7}}} \end{aligned}$$

$x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ のとき, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ の値を求めよ。

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=1 \end{cases}$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

$$= (x^3 + y^3) + xy(x+y)$$

$$\begin{pmatrix} \because \\ x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ = 216 - 18 \\ = 198 \end{pmatrix}$$

$$= 198 + 6$$

$$= \underline{\underline{204}}$$

$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} \neq 0$ のとき, $\frac{x^3+y^3+z^3}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ の値を求めよ。

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \quad (k \neq 0)$$

とおく

$$\begin{cases} x+y=3k \\ y+z=6k \\ z+x=7k \end{cases} \quad (+)$$

$$2(x+y+z) = 16k$$

$$x+y+z = 8k$$

これから

$$x=2k, y=k, z=5k$$

よ、

$$\begin{aligned} & \frac{x^3+y^3+z^3}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\ &= \frac{8k^3+k^3+125k^3}{k \cdot (-4k) \cdot 3k} \\ &= \frac{134k^3}{-12k^3} \\ &= -\frac{67}{6} \end{aligned}$$

(1) $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{10}$ の展開式における x^5 の係数を求めよ。

(2) $(x+y-3z)^8$ の展開式における x^5yz^2 の係数を求めよ。

(1) $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{10}$ の展開式の一般項は

$${}_{10}C_k (x^2)^k \left(\frac{2}{x^3}\right)^{10-k}$$

$$= {}_{10}C_k \times 2^{10-k} \times x^{2k} \times \frac{1}{x^{30-3k}}$$

$$= {}_{10}C_k \times 2^{10-k} \times x^{5k-30}$$

x^5 の係数を求めよ

$$5k - 30 = 5$$

$$5k = 35$$

$$k = 7$$

よって

$${}_{10}C_7 \times 2^3 = {}_{10}C_3 \times 8$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \times 8$$

$$= \underline{\underline{960}}$$

(2)

$${}_8C_5 x^5 {}_3C_1 y {}_2C_2 (-3z)^2$$

$$= {}_8C_5 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times x^5 \cdot y \cdot 9z^2$$

$$= 56 \times 3 \times 9 \times x^5 y z^2$$

$$= 1512 x^5 y z^2$$

よって

$$\underline{\underline{1512}}$$

(1) $x^2 - 3x - 1 = 0$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

(類 2009 東洋大)

(2) 相異なる実数 α, β が $\alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6}$, $\beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6}$ をともに満たすとき, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

(2016 近畿大)

(1)

$$\left(\begin{array}{l} x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \text{で} \\ x=0 \text{ は解ではないので} \\ \text{両辺を } x (\neq 0) \text{ で割ると} \\ x - 3 - \frac{1}{x} = 0 \\ x - \frac{1}{x} = 3 \end{array} \right)$$

このとき

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 9 + 2 \\ &= \underline{\underline{11}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 27 + 9 \\ &= \underline{\underline{36}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ = 3 - 6 + 2\sqrt{6} \\ = 2\sqrt{6} - 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{2\sqrt{6} - 3}{3 - \sqrt{6}} \\ &= \frac{(2\sqrt{6} - 3)(3 + \sqrt{6})}{(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})} \\ &= \frac{6\sqrt{6} + 12 - 9 - 3\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{6} + 3}{3} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{6} + 1}} \end{aligned}$$

(2)

$$\alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6}$$

$$\beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6} \quad (+)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}(\alpha + \beta) = 2\sqrt{6} \quad \text{--- ①}$$

$$\alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6}$$

$$\beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6} \quad (-)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \quad \text{より}$$

$$\underline{\underline{\alpha + \beta = \sqrt{3}}}$$

① より

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{3}(\alpha + \beta) = 2\sqrt{6}$$

$$3 - 2\alpha\beta + 3 = 2\sqrt{6}$$

$$\underline{\underline{\alpha\beta = 3 - \sqrt{6}}}$$

正の実数 x, y, z が $\frac{yz}{x} = \frac{zx}{4y} = \frac{xy}{9z}$ を満たすとき, $\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の値を求めよ。

(2014 福島大)

$$\frac{yz}{x} = \frac{zx}{4y} = \frac{xy}{9z} = k \quad (>0)$$

とおく

$$\begin{cases} yz = kx & \text{①} \\ zx = 4ky & \text{②} \\ xy = 9kz & \text{③} \end{cases}$$

辺々積をとると

$$x^2 y^2 z^2 = 36 k^3 x y z$$

 $x y z \neq 0$ である

$$x y z = 36 k^3 \quad \text{④}$$

①, ④ より

$$k x^2 = 36 k^3$$

$$k \neq 0 \text{ より } x^2 = 36 k^2$$

$$x > 0 \text{ より } x = 6k$$

②, ④ より

$$4k y^2 = 36 k^3$$

$$k \neq 0 \text{ より } y^2 = 9 k^2$$

$$y > 0 \text{ より } y = 3k$$

③, ④ より

$$9k z^2 = 36 k^3$$

$$k \neq 0 \text{ より } z^2 = 4 k^2$$

$$z > 0 \text{ より } z = 2k$$

このとき

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{6k+3k+2k}{\sqrt{36k^2+9k^2+4k^2}}$$

$$= \frac{11k}{\sqrt{49k^2}}$$

$$= \frac{11k}{7k} \quad (\text{⑤ } k > 0)$$

$$= \underline{\underline{\frac{11}{7}}}$$

n を自然数とする。 $\sqrt{n^2+1}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 a 、 b を n を用いて表せ。

また、 $a - \frac{1}{b} = -\sqrt{37}$ となる n の値を求めよ。

(2010 広島修道大)

$n > 0$ なので

$$\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2}$$

$$|n| < \sqrt{n^2+1} < |n+1|$$

よ、 $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

つまり

$$\underline{a = n, b = \sqrt{n^2+1} - n}$$

このとき

$$a - \frac{1}{b} = -\sqrt{37} \quad \text{より}$$

$$n - \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} = -\sqrt{37}$$

$$n - (\sqrt{n^2+1} + n) = -\sqrt{37}$$

$$-\sqrt{n^2+1} = -\sqrt{37}$$

$$n^2+1 = 37$$

$$n^2 = 36$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{より} \quad \underline{n = 6}$$

$(x+1)^8(x-1)^4$ を展開したとき、 x^{10} の項の係数を求めよ。また、 $(x^2+x+1)^6$ を展開したとき、 x^{10} の項の係数を求めよ。

(2014 慶応義塾大)

$(x+1)^8(x-1)^4$ の展開式の一般項は

$${}_8C_a x^a \times {}_4C_b x^b (-1)^{4-b}$$

$$= {}_8C_a {}_4C_b (-1)^{4-b} x^{a+b}$$

x^{10} の項を求めよ

$$a+b=10$$

$$0 \leq a \leq 8, 0 \leq b \leq 4 \quad \text{より}$$

$$(a, b) = (8, 2), (7, 3), (6, 4)$$

$$(a, b) = (8, 2) \text{ のとき}$$

$$\begin{cases} {}_8C_8 \cdot {}_4C_2 \cdot (-1)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \\ {}_8C_7 \cdot {}_4C_3 \cdot (-1)^1 = -8 \times 4 = -32 \\ {}_8C_6 \cdot {}_4C_4 \cdot (-1)^0 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \end{cases}$$

よって

$$6 - 32 + 28 = \underline{\underline{2}}$$

$(x^2+x+1)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_a (x^2)^a {}_{6-a}C_b x^b$$

$$= {}_6C_a {}_{6-a}C_b x^{2a+b}$$

x^{10} の項を求めよ

$$2a+b=10$$

$$0 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6-a \quad \text{より}$$

$$(a, b) = (5, 0), (4, 2)$$

$$\begin{cases} {}_6C_5 \cdot {}_1C_0 = 6 \\ {}_6C_4 \cdot {}_2C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \end{cases}$$

よって

$$6 + 15 = \underline{\underline{21}}$$

(100.1)⁷ の百の位と小数第4位の数字を求めよ。

(2011 上智大)

$$\begin{aligned}
 (100.1)^7 &= \left(100 + \frac{1}{10}\right)^7 \\
 &= {}_7C_0 100^7 \left(\frac{1}{10}\right)^0 + {}_7C_1 100^6 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + {}_7C_2 100^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + {}_7C_3 100^4 \left(\frac{1}{10}\right)^3 + {}_7C_4 100^3 \left(\frac{1}{10}\right)^4 \\
 &\quad + {}_7C_5 100^2 \left(\frac{1}{10}\right)^5 + {}_7C_6 100 \left(\frac{1}{10}\right)^6 + {}_7C_7 100^0 \left(\frac{1}{10}\right)^7 \\
 &= \underline{10^{14} + 7 \times 10^{11} + 21 \times 10^8 + 35 \times 10^5 + 35 \times 10^2 + 21 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-4} + 10^{-7}} \\
 &= (10^5 \text{ の倍数}) + 3500 + 2.1 + 0.0007 + 0.0000001 \\
 &= (10^5 \text{ の倍数}) + 3502.1007001
 \end{aligned}$$

よて

百の位の数字は5, 小数第4位の数字は7

n を自然数とする。 $(1+x)^n$ の展開式を利用して、次の問いに答えよ。

(1) ${}_nC_1 + {}nC_2 + \cdots + {}nC_n = 127$ を満たす n の値を求めよ。

(2) 31^{17} を 900 で割ったときの余りを求めよ。

(2006 大分大)

(1)

$$(1+x)^n = {}nC_0 x^0 + {}nC_1 x^1 + {}nC_2 x^2 + \cdots + {}nC_n x^n$$

において、

$$x=1 \text{ とし}$$

$$2^n = {}nC_0 + {}nC_1 + {}nC_2 + \cdots + {}nC_n$$

$$2^n = 1 + {}nC_1 + {}nC_2 + \cdots + {}nC_n$$

$$2^n - 1 = {}nC_1 + {}nC_2 + \cdots + {}nC_n$$

よって

$$2^n - 1 = 127$$

$$2^n = 128$$

$$\text{よって } \underline{\underline{n=7}}$$

(2)

$$31^{17} = (30+1)^{17}$$

$$= {}_{17}C_0 30^{17} + {}_{17}C_1 30^{16} + \cdots + {}_{17}C_{15} 30^2 + {}_{17}C_{16} 30 + {}_{17}C_{17}$$

$$= (900 \text{ の倍数}) + {}_{17}C_{16} 30 + {}_{17}C_{17}$$

$$= (900 \text{ の倍数}) + 17 \times 30 + 1$$

$$= (900 \text{ の倍数}) + 511$$

$$\text{よって } \underline{\underline{\text{余り } 511}}$$

- (1) 21^{10} を 400 で割ったときの余りを求めよ。
 (2) $19^n + 21^n$ が 400 で割り切れるような正の整数 n が存在するか。存在するならば、その例を示せ。存在しなければ、それを証明せよ。

(2014 中央大)

(1)

$$\begin{aligned}
 21^{10} &= (20+1)^{10} \\
 &= {}_{10}C_0 20^{10} + {}_{10}C_1 20^9 + {}_{10}C_2 20^8 \\
 &\quad + \dots + {}_{10}C_9 20^2 + {}_{10}C_{10} 20 + {}_{10}C_{10} \\
 &\equiv {}_{10}C_9 20 + {}_{10}C_{10} \pmod{400} \\
 &\equiv 201 \pmod{400}
 \end{aligned}$$

よって 余り 201

(2)

 $n=1$ のとき

$$19^1 + 21^1 = 40$$

となり 400 で割り切れない

ゆえに $n \geq 2$ としよう。

$$\begin{aligned}
 21^n &= (20+1)^n \\
 &= {}_nC_0 20^n + {}_nC_1 20^{n-1} + {}_nC_2 20^{n-2} + \dots \\
 &\quad + {}_nC_{n-2} 20^2 + {}_nC_{n-1} 20 + {}_nC_n \\
 &\equiv {}_nC_{n-1} 20 + {}_nC_n \pmod{400} \\
 &\equiv 20n + 1 \pmod{400}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19^n &= (20-1)^n \\
 &= {}_nC_0 20^n - {}_nC_1 20^{n-1} + {}_nC_2 20^{n-2} - \dots \\
 &\quad + {}_nC_{n-2} 20^2 (-1)^{n-2} + {}_nC_{n-1} 20 (-1)^{n-1} + {}_nC_n (-1)^n \\
 &\equiv {}_nC_{n-1} 20 (-1)^{n-1} + {}_nC_n (-1)^n \pmod{400} \\
 &\equiv 20n (-1)^{n-1} + (-1)^n \pmod{400}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21^n + 19^n &\equiv 20n + 1 + 20n (-1)^{n-1} + (-1)^n \pmod{400} \\
 &\equiv 20n (1 + (-1)^{n-1}) + (1 + (-1)^n) \pmod{400}
 \end{aligned}$$

 n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
 21^n + 19^n &\equiv 20n (1-1) + (1+1) \pmod{400} \\
 &\equiv 2 \pmod{400}
 \end{aligned}$$

 n が奇数のとき

$$\begin{aligned}
 21^n + 19^n &\equiv 20n (1+1) + (1-1) \pmod{400} \\
 &\equiv 40n \pmod{400} \\
 &\neq 0 \quad (\textcircled{\times} n \text{ は奇数だから})
 \end{aligned}$$

よって

$19^n + 21^n$ が 400 で割り切れるような
 正の整数 n は存在しない。

(1) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ を因数分解せよ。(2) $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ac+bd=1$ のとき, $ad-bc, a^2+d^2, b^2+c^2$ の値を求めよ。 (2012 東北福祉大)

(1)

$$\begin{aligned}
 & (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \\
 &= a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \\
 &= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \\
 &= (c^2+d^2)a^2+b^2(d^2+c^2) \\
 &= (c^2+d^2)a^2+b^2(c^2+d^2) \\
 &= \underline{\underline{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}
 \end{aligned}$$

(2) 解法1

(i) ①

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2) \quad \text{--- ①}$$

$$a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ac+bd=1 \quad \text{より}$$

$$1+(ad-bc)^2=1 \times 1$$

$$(ad-bc)^2=0$$

$$\therefore ad-bc=0$$

一方, ①より $c=d$ と $\lambda+\lambda=2$

$$(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=(a^2+b^2)(d^2+c^2)$$

$$(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{--- ②} \\ bd=1-ac, bc=ad \quad \text{より} \end{array} \right)$$

$$(2ad)^2+(2ac-1)^2=1$$

$$4a^2d^2+4a^2c^2-4ac+1=1$$

$$4a^2(c^2+d^2)-4ac=0$$

$$a^2-ac=0$$

$$a(a-c)=0$$

$$a=0 \quad \text{or} \quad c=a$$

(ii) $a=0$ のとき

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=1 \\ ad-bc=0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} b^2=1 \quad \text{--- ②} \\ c^2+d^2=1 \quad \text{--- ③} \\ bd=1 \quad \text{--- ④} \\ bc=0 \quad \text{--- ⑤} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{②, ⑤より} \quad c=0$$

$$\text{ゆえに ③より} \quad d^2=1$$

$$\therefore a^2+d^2=1, b^2+c^2=1$$

(ii) $a \neq 0$ のとき $c=a$ とする。

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=1 \\ ad-bc=0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \quad \text{--- ⑥} \\ a^2+d^2=1 \quad \text{--- ⑦} \\ a^2+bd=1 \quad \text{--- ⑧} \\ ad-ab=0 \quad \text{--- ⑨} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

⑨より

$$a(d-b)=0$$

$$a \neq 0 \quad \text{より} \quad d=b$$

よって ⑥, ⑦, ⑧ はすべて

$$a^2+d^2=1$$

$$\text{また, } a=c, d=b \quad \text{より}$$

$$c^2+b^2=1$$

(i), (ii) より

$$\begin{aligned}
 & (ad-bc, a^2+d^2, b^2+c^2) \\
 &= \underline{\underline{(0, 1, 1)}}
 \end{aligned}$$

解法2

$$(i) \text{より} \quad ad-bc=0$$

$$\text{ゆえに} \quad ad=bc$$

$$\text{両辺を} 2 \text{乗して} \quad a^2d^2=b^2c^2$$

$$\text{よって} \quad b^2=1-a^2, d^2=1-c^2$$

代入して

$$a^2(1-c^2)=(1-a^2)c^2$$

$$a^2-a^2c^2=c^2-a^2c^2$$

$$a^2=c^2$$

よって

$$a^2+d^2=c^2+d^2=1$$

$$b^2+c^2=b^2+a^2=1$$

よって

$$\underline{\underline{ad-bc=0, a^2+d^2=1, b^2+c^2=1}}$$

解法3

$$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} a = \cos \alpha \\ b = \sin \alpha \end{cases}, \begin{cases} c = \cos \beta \\ d = \sin \beta \end{cases}$$

$$(0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < 2\pi)$$

と置く。

このとき

$$ac + bd = 1 \quad \text{より}$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$-2\pi < \alpha - \beta < 2\pi \quad \text{より}$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\text{よって } \alpha = \beta$$

$$\text{ゆえに } a = c, b = d$$

したがって

$$\begin{cases} ad - bc = ab - ba = 0 \\ a^2 + d^2 = a^2 + b^2 = 1 \\ b^2 + c^2 = d^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

解法4

$$\vec{P} = (a, b), \vec{Q} = (c, d) \quad \text{とおく}$$

$$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 1 \quad \text{より}$$

$$|\vec{P}| = |\vec{Q}| = 1, \vec{P} \cdot \vec{Q} = 1$$

$$\vec{P} \text{ と } \vec{Q} \text{ の なす 角 } \theta \text{ として}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \theta \quad \text{より}$$

$$1 = \cos \theta$$

$$\text{よって } \theta = 0$$

$$\text{よって } \vec{P} = \vec{Q}$$

$$\text{よって } a = c, b = d$$

このとき

$$\begin{cases} ad - bc = ab - ba = 0 \\ a^2 + d^2 = a^2 + b^2 = 1 \\ b^2 + c^2 = b^2 + a^2 = 1 \end{cases}$$

実数 x に対して、 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。

- (1) $\frac{14}{3} < x < 5$ のとき、 $\left[\frac{3}{7}x\right] - \left[\frac{3}{7}[x]\right]$ の値を求めよ。
- (2) すべての実数 x について、 $\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right] = 0$ を示せ。
- (3) n を正の整数とする。実数 x について、 $\left[\frac{1}{n}x\right] - \left[\frac{1}{n}[x]\right]$ の値を求めよ。

(2009 早稲田大)

(1)

$$\left(\begin{array}{l} \frac{14}{3} < x < 5 \text{ のとき} \\ 2 < \frac{3}{7}x < \frac{15}{7}, [x] = 4 \end{array} \right)$$

$$\left[\frac{3}{7}x\right] - \left[\frac{3}{7}[x]\right] = 2 - \left[\frac{12}{7}\right]$$

$$= 2 - 1$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

(2) **証明1**(i) $2k \leq x < 2k+1$ (k は整数) のとき

$$[x] = 2k$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}[x] = k \text{ より } \left[\frac{1}{2}[x]\right] = k \\ k \leq \frac{1}{2}x < k + \frac{1}{2} \text{ より } \left[\frac{1}{2}x\right] = k \end{array} \right)$$

よって

$$\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right] = 0$$

(ii) $2k+1 \leq x < 2k+2$ のとき

$$[x] = 2k+1$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}[x] = k + \frac{1}{2} \text{ より } \left[\frac{1}{2}[x]\right] = k \\ k + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x < k+1 \text{ より } \left[\frac{1}{2}x\right] = k \end{array} \right)$$

よって

$$\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right] = 0$$

(i), (ii) より

$$\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right] = 0 \quad \blacksquare$$

(3) **解法1**

$$x = nk + l + m$$

(k は整数, $l = 1, 2, \dots, n-1$, $0 \leq m < 1$)とて $nk + l \leq x < nk + l + 1$ を満たす。

$$[x] = nk + l$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{n}[x] = k + \frac{l}{n} < k+1 \text{ より } \left[\frac{1}{n}[x]\right] = k \\ k + \frac{l}{n} \leq \frac{1}{n}x < k+1 \text{ より } \left[\frac{1}{n}x\right] = k \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{\left[\frac{1}{n}x\right] - \left[\frac{1}{n}[x]\right] = 0}}$$

(2) **証明2** $x = 2k + p$ (k は整数, $0 \leq p < 2$) とて

$$\frac{1}{2}x = k + \frac{p}{2} \quad (0 \leq \frac{p}{2} < 1) \text{ より } \left[\frac{1}{2}x\right] = k$$

$$[x] = 2k, 2k+1$$

$$\text{たとえば } \frac{1}{2}[x] = k, k + \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \left[\frac{1}{2}[x]\right] = k$$

$$\text{ゆえに } \left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right] = k - k = 0 \quad \blacksquare$$

(3) **解法2** $x = nk + p$ (k は整数, $0 \leq p < n$) とて

$$\frac{1}{n}x = k + \frac{p}{n} \quad (0 \leq \frac{p}{n} < 1) \text{ より } \left[\frac{1}{n}x\right] = k$$

$$[x] = nk, nk+1, nk+2, \dots, nk+n-1$$

$$\text{たとえば } \frac{1}{n}[x] = k, k + \frac{1}{n}, k + \frac{2}{n}, \dots, k + \frac{n-1}{n}$$

$$\text{よって } \left[\frac{1}{n}[x]\right] = k$$

$$\text{ゆえに } \left[\frac{1}{n}x\right] - \left[\frac{1}{n}[x]\right] = k - k = \underline{\underline{0}}$$

複素数 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 + \omega^4$, $\omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ。
 (2) n を正の整数とすると、 $\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ。
 (3) n を正の整数とすると、 $(\omega+2)^n + (\omega^2+2)^n$ が整数であることを証明せよ。

(2016 岡山大)

(1)

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{より} \\ 2\omega+1 &= \sqrt{3}i \\ \text{両辺 2乗して} \\ 4\omega^2+4\omega+1 &= -3 \\ 4\omega^2 &= -4\omega-4 \\ \omega^2 &= -\omega-1 \\ \text{よって} \\ \omega^3 &= \omega^2 \cdot \omega \\ &= (-\omega-1)\omega \\ &= -\omega^2-\omega \\ &= \omega+1-\omega \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 + \omega^4 &= \omega^2 + \omega \\ &= -\omega-1+\omega \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^5 + \omega^{10} &= \omega^3 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \omega \\ &= \omega^2 + \omega \\ &= -\omega-1+\omega \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

(2)

(i) $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$\begin{aligned} \omega^n + \omega^{2n} &= \omega^3 + \omega^6 \\ &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$\begin{aligned} \omega^n + \omega^{2n} &= \omega + \omega^2 \\ &= \omega + (-\omega-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$\begin{aligned} \omega^n + \omega^{2n} &= \omega^2 + \omega^4 \\ &= \omega^2 + \omega \\ &= -1 \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より $\text{mod } 3$ による

$$\omega^n + \omega^{2n} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \\ -1 & (n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) 解法1

$$\begin{aligned} \omega^2 &= -\omega-1 \\ &= \frac{1-\sqrt{3}i}{2} - 1 \\ &= \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega} \quad \text{よって} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\omega+2)^n + (\omega^2+2)^n &= (\omega+2)^n + (\bar{\omega}+2)^n \\ &= (\omega+2)^n + \overline{(\omega+2)^n} \\ &= (\omega+2)^n + \overline{(\omega+2)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \\ (\omega+2) + (\bar{\omega}+2) &= \omega + \bar{\omega} + 4 \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\omega+2)(\bar{\omega}+2) &= (\omega+2)(\omega+2) \\ &= \omega\bar{\omega} + 2(\omega+\bar{\omega}) + 4 \\ &= \omega\omega^2 + 2(-1) + 4 \\ &= 1-2+4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$\alpha = \omega+2$ と $\beta = \bar{\omega}+2$ ともに整数
 n とき $\alpha^n + \beta^n$ も整数 となることを示す。

[I] $n=1, 2$ のとき

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \omega + \bar{\omega} + 4 = -1 + 4 = 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \quad \text{より} \\ &= 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3 \end{aligned}$$

ともに整数である。

[II] $n=k, k+1$ のとき ($k=1, 2, 3, \dots$)

成り立つことを仮定する。

つまり $\alpha^k + \beta^k$ と $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ は整数である。 $n=k+2$ のとき

$$\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} = (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k)$$

となり 整数 である。

よって $n=k, k+1$ のときに成り立てば $n=k+2$ のときも成り立つ。

[I], [II] より

すべての自然数 n で $\alpha^n + \beta^n$ は整数 である。

解法2

$$\begin{aligned}
 (\omega+z)^n &= {}_nC_0 \omega^n + {}_nC_1 \omega^{n-1} z + {}_nC_2 \omega^{n-2} z^2 + \dots + {}_nC_{n-1} \omega z^{n-1} + {}_nC_n z^n \\
 +) (\omega^2+z)^n &= {}_nC_0 (\omega^2)^n + {}_nC_1 (\omega^2)^{n-1} z + {}_nC_2 (\omega^2)^{n-2} z^2 + \dots + {}_nC_{n-1} \omega^2 z^{n-1} + {}_nC_n z^n \\
 \hline
 (\omega+z)^n + (\omega^2+z)^n &= (\omega^n + \omega^{2n}) + 2{}_nC_1 (\omega^{n-1} + \omega^{2(n-1)}) + 2^2 {}_nC_2 (\omega^{n-2} + \omega^{2(n-2)}) \\
 &\quad + \dots + 2^{n-1} {}_nC_{n-1} (\omega + \omega^2) + 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

ここで (2) より

$$\omega^n + \omega^{2n}, \omega^{n-1} + \omega^{2(n-1)}, \dots, \omega + \omega^2$$

はそれぞれ 2 または 1 となり 整数 である。

また, ${}_nC_1, {}_nC_2, \dots, {}_nC_{n-1}$ も 整数 である。

よって $(\omega+z)^n + (\omega^2+z)^n$ は 整数 である。 $\square$