

(1) $a+b+c+d=0$ のとき, 等式 $a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ のとき, x, y, z のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ。

(1) (証明)

$$a+b+c+d=0 \quad \text{より}$$

$$d=-a-b-c$$

$$(\text{左辺}) = a^3+b^3+c^3+d^3$$

$$= a^3+b^3+c^3+(-a-b-c)^3$$

$$= a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3$$

$$= a^3+b^3+c^3-\{a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3\}$$

$$= \cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3}-\cancel{a^3}-3a^2b-3a^2c-3ab^2-6abc-3ac^2-\cancel{b^3}-3b^2c-3bc^2-\cancel{c^3}$$

$$= -3(a^2b+a^2c+ab^2+2abc+ac^2+b^2c+bc^2)$$

$$= -3\{(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)\}$$

$$= -3(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$

$$= -3(b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= -3(-a-d)(-c-d)(-b-d)$$

$$= 3(a+d)(b+d)(c+d) = (\text{右辺})$$

$$\text{よ、} \quad (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \text{となり}$$

$$a+b+c+d=0 \quad \text{のとき} \quad \text{与等式は成り立つ。} \quad \blacksquare$$

(2) (証明)

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad \text{より} \\ yz + zx + xy = xyz \end{array} \right)$$

このとき

$$(x-1)(y-1)(z-1)$$

$$= (x-1)(yz - y - z + 1)$$

$$= xyz - xy - xz + x - yz + y + z - 1$$

$$= xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1$$

$$= 0$$

よ、

x, y, z のうち少なくとも1つは1に等しい。 $\blacksquare$

実数 a, b, c, d について、次の不等式が成り立つことを示せ。また、(1), (3) は等号が成り立つための条件を求めよ。

(1) $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

(2) $a > b > 0$ のとき $|-a+2b| < a$

(3) $a > 0, b > 0$ のとき $\left(4a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right) \geq 9$

(1) **証明1**

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &\quad - a^2c^2 - 2acbd - b^2d^2 \\ &= a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 \\ &= (ad-bc)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって

与不等式は成り立つ。■

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ ad = bc \quad a \neq 0 \end{array} \right)$$

証明2

$$\vec{a} = (a, b), \vec{b} = (c, d)$$

$$\vec{a} \neq \vec{0} \quad a \neq 0 \text{ なる角 } \theta \text{ とおくと}$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{より}$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

両辺 0 以上 なる $a \neq 0$ で 2乗してよい。

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

よって

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2) \quad \blacksquare$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \quad a \neq 0 \\ \text{つまり} \\ ad - bc = 0 \quad a \neq 0 \end{array} \right)$$

(2) **証明**

$$\begin{aligned} & a^2 - |-a+2b|^2 \\ &= a^2 - (a^2 - 4ab + 4b^2) \\ &= 4ab - 4b^2 \\ &= 4b(a-b) > 0 \end{aligned}$$

よって

$$|-a+2b|^2 < a^2$$

よって

$$|-a+2b| > 0, a > 0 \quad \text{より } a \neq 0$$

$$|-a+2b| < a$$

よって 与不等式は成り立つ。■

(3) **証明**

$$\begin{aligned} & \left(4a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + b\right) \\ &= 4 + 4ab + \frac{1}{ab} + 1 \\ &= 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{よって } a > 0, b > 0 \text{ なる } a \neq 0$$

$$4ab > 0, \frac{1}{ab} > 0$$

(相加) $\geq$ (相乗) より

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{4ab \times \frac{1}{ab}} = 4$$

$$4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 9$$

よって

与不等式は成り立つ。■

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ 4ab = \frac{1}{ab} \quad a \neq 0 \\ \text{つまり} \\ ab = \frac{1}{4} \quad a \neq 0 \end{array} \right)$$

$0 < a < b$, $a+b=1$ であるとき, $\frac{1}{2}$, $2ab$, b , a^2+b^2 の大小を比較せよ。

$$\begin{aligned}
 & a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4} \text{ のとき} \\
 & \left(\begin{aligned} 2ab &= 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\ a^2+b^2 &= \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned} \right. \\
 & \text{よって} \\
 & \frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} \\
 & \text{つまり} \\
 & 2ab < \frac{1}{2} < a^2+b^2 < b \\
 & \text{と推測}
 \end{aligned}$$

証明

$$\left(\begin{aligned} a+b &= 1 \quad \text{より} \\ a &= -b+1 \\ 0 < a < b \quad \text{より} \\ 0 < -b+1 < b \\ \text{よって} \quad \frac{1}{2} < b < 1 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \frac{1}{2} - 2ab &= \frac{1}{2} - 2(-b+1)b \\
 &= 2b^2 - 2b + \frac{1}{2} \\
 &= 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \quad (\because b \neq \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \\
 2ab &< \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad a^2+b^2 - \frac{1}{2} &= (-b+1)^2 + b^2 - \frac{1}{2} \\
 &= 2b^2 - 2b + \frac{1}{2} \\
 &= 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \quad (\because b \neq \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \\
 \frac{1}{2} &< a^2+b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad b - (a^2+b^2) &= b - (-b+1)^2 + b^2 \\
 &= 3b - 1 > 0 \quad (\because b > \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \\
 a^2+b^2 &< b
 \end{aligned}$$

① ~ ③ より

$$\underline{\underline{2ab < \frac{1}{2} < a^2+b^2 < b}}$$

x, y, z を実数とすると、次の3つの命題を証明せよ。

(1) $x+y+z=0$ かつ $xy+yz+zx=0$ ならば、 x, y, z はすべて0である。

(2) $x+y+z=0$ かつ $x^3+y^3+z^3=0$ ならば、 x, y, z のうち少なくとも1つは0である。

(3) $x+y+z \neq 0$ かつ $x^3+y^3+z^3=0$ ならば、 x, y, z のどれも0ではない。

(2006 愛知大)

(1) 証明

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$x=y=z=0$$

(2) 証明

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad \text{--- ①}$$

よって

$$-3xyz = 0$$

$$xyz = 0$$

よって

x, y, z のうち少なくとも1つは0である。

(3) 証明

① 仮定

$$-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$\begin{aligned} xyz &= -\frac{1}{3}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= -\frac{1}{6}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \\ &= -\frac{1}{6}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{"ここで"} \\ x=y=z \quad \text{と仮定すると} \\ x^3+y^3+z^3=0 \quad \text{より} \\ 3x^3=0 \\ x=0 \\ \text{つまり } x=y=z=0 \quad \text{となり、} \\ \text{これは } x+y+z \neq 0 \quad \text{に矛盾、} \\ \text{よって } x \neq y \text{ または } y \neq z \text{ または } z \neq x \end{array} \right)$$

$$x+y+z \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 > 0 \quad \text{なので}$$

$$xyz \neq 0$$

よって、 x, y, z のどれも0ではない。

(1) $p > 1, q > 1$ のとき, 不等式 $p + q < pq + 1$ を証明せよ。(2) $a > 1, b > 1$ のとき, 不等式 $\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1$ を証明せよ。(3) $a > 1, b > 1, c > 1$ のとき, 不等式 $\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2$ を証明せよ。 (2014 福井大)(1) 証明

$$(pq+1) - (p+q)$$

$$= (q-1)p - (q-1)$$

$$= (p-1)(q-1) > 0$$

よって

$$p+q < pq+1 \quad \blacksquare$$

(2) 証明1

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2 - (\sqrt{a+b-1})^2$$

$$= a+b+1+2\sqrt{ab}-2\sqrt{a}-2\sqrt{b} - (a+b-1)$$

$$= 2+2\sqrt{ab}-2\sqrt{a}-2\sqrt{b}$$

$$= 2(\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1)$$

$$= 2\{(\sqrt{b}-1)\sqrt{a}-(\sqrt{b}-1)\}$$

$$= 2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1) > 0$$

よって

$$(\sqrt{a+b-1})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$$

∵

$$\sqrt{a+b-1} > 0, \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 > 0$$

∴

$$\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 \quad \blacksquare$$

証明2

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) - \sqrt{a+b-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2 - (\sqrt{a+b-1})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1}}$$

$$= \frac{a+b+1+2\sqrt{ab}-2\sqrt{a}-2\sqrt{b}-a-b+1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1)}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 + \sqrt{a+b-1}} > 0$$

よって

$$\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 \quad \blacksquare$$

(3) 証明

(2) より

 $x > 1, y > 1$ のとき

$$\sqrt{x+y-1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 \quad \text{が成り立つ。}$$

 $a > 1, b > 1, c > 1$ のとき

$$x = a+b-1 (> 1), y = c (> 1) \text{ とおく。}$$

$$\sqrt{a+b-1+c-1} < \sqrt{a+b-1} + \sqrt{c} - 1$$

$$\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a+b-1} + \sqrt{c} - 1 \quad \text{--- ①}$$

また (2) より

$$\sqrt{a+b-1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 \quad \text{--- ②}$$

も成り立つ。

① と ② の辺々を加えると

$$\sqrt{a+b+c-2} < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - 2 \quad \blacksquare$$

p, q が自然数ならば, $\sqrt{2}$ は $\frac{p}{q}$ と $\frac{2q}{p}$ の間にあることを証明せよ。ただし, $\sqrt{2}$ は無理数であることを用いてもよい。

(2013 鹿児島大)

証明1(i) $\sqrt{2} > \frac{p}{q}$ を満たすとき

$$\sqrt{2} \geq \frac{2q}{p} \quad \text{と仮定すると}$$

辺々を加えて

$$2\sqrt{2} > \frac{p}{q} + \frac{2q}{p}$$

 $p > 0, q > 0$ なので

$$2\sqrt{2}pq > p^2 + 2q^2$$

$$p^2 - 2\sqrt{2}pq + 2q^2 < 0$$

$$(p - \sqrt{2}q)^2 < 0$$

これは

$$(p - \sqrt{2}q)^2 \geq 0 \quad \text{であることに矛盾}$$

よて

$$\sqrt{2} < \frac{2q}{p} \quad \text{が成り立つ}$$

つまり

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} < \frac{2q}{p} \quad \text{が成り立つ}$$

(ii) $\sqrt{2} > \frac{2q}{p}$ を満たすとき

$$\sqrt{2} \geq \frac{p}{q} \quad \text{と仮定すると}$$

辺々を加えて

$$2\sqrt{2} > \frac{2q}{p} + \frac{p}{q}$$

 $p > 0, q > 0$ なので

$$2\sqrt{2}pq > p^2 + 2q^2$$

$$(p - \sqrt{2}q)^2 < 0$$

これは

$$(p - \sqrt{2}q)^2 \geq 0 \quad \text{であることに矛盾}$$

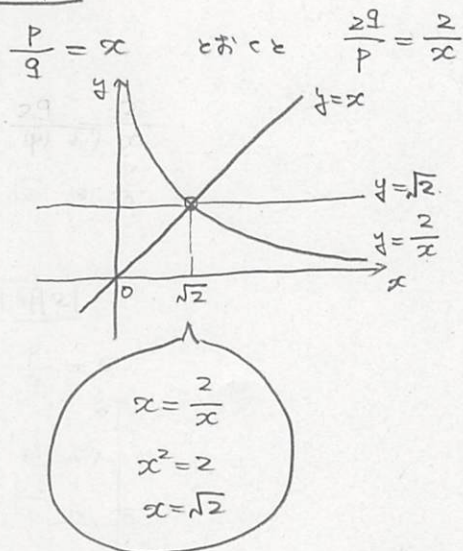
よて

$$\sqrt{2} < \frac{p}{q} \quad \text{が成り立つ}$$

つまり

$$\frac{2q}{p} < \sqrt{2} < \frac{p}{q} \quad \text{が成り立つ}$$

(i), (ii) より

 $\sqrt{2}$ は $\frac{p}{q}$ と $\frac{2q}{p}$ の間にある。■**証明2** x は有理数, $\sqrt{2}$ は無理数 なので

$$x \neq \sqrt{2}$$

つまり

直線 $y = \sqrt{2}$ は 直線 $y = x$ と曲線 $y = \frac{2}{x}$ の間にある。

つまり

 $\sqrt{2}$ は $\frac{p}{q}$ と $\frac{2q}{p}$ の間にある。■

(1) 正の数 a, b に対して $\frac{a^3+b^3}{2}$ と $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ の大小を比較せよ。

(2) $\sqrt[3]{10}$ と $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1$ の大小を比較せよ。

(2003 名古屋大)

(1) 解法1

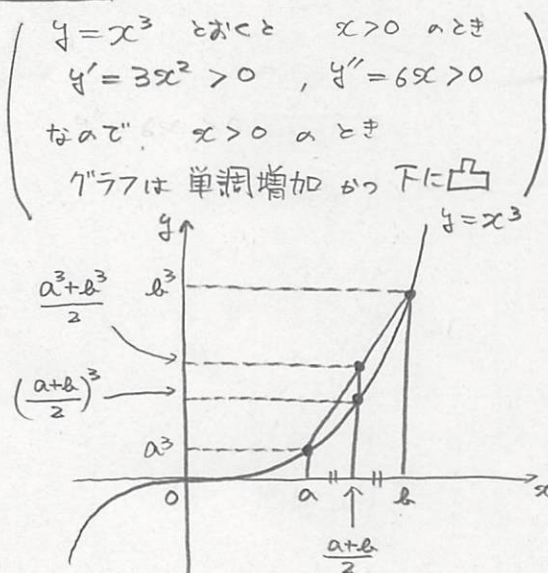
$$\begin{aligned}
 & \frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \\
 &= \frac{a^3+b^3}{2} - \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8} \\
 &= \frac{1}{8}(3a^3-3a^2b-3ab^2+3b^3) \\
 &= \frac{3}{8}(a^3-a^2b-ab^2+b^3) \\
 &= \frac{3}{8}\{a^2(a-b)-b^2(a-b)\} \\
 &= \frac{3}{8}(a-b)(a^2-b^2) \\
 &= \frac{3}{8}(a-b)^2(a+b) \geq 0 \quad (\because a>0, b>0)
 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

(等号成立は $a=b$ のとき)

解法2



グラフより

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

(等号成立は $a=b$ のとき)

(2) 解法1

(1) で

$$a = \sqrt[3]{3}, \quad b = \sqrt[3]{2} \quad \text{とおく。}$$

 $a \neq b$ なので

$$\frac{3+2}{2} > \left(\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{2}\right)^3$$

$$\frac{5}{2} > \frac{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3}{8}$$

$$20 > (\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3$$

$$\sqrt[3]{20} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

両辺を $\sqrt[3]{2}$ で割ると

$$\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1$$

解法2

(1) で

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad b = 1 \quad \text{とすると}$$

 $a \neq b$ より

$$\frac{a^3+b^3}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} > \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} > a+b$$

$$\sqrt[3]{4\left(\frac{3}{2}+1\right)} > \sqrt[3]{\frac{3}{2}}+1$$

$$\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{\frac{3}{2}}+1$$

a, b, c がすべて1より小さい正の数するとき, 3つの不等式

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

が同時には成り立たないことを示せ。

(東京女子大)

背理法

3つの不等式が同時に成り立つと仮定する。

つまり

$$\begin{cases} a(1-b) > \frac{1}{4} \\ b(1-c) > \frac{1}{4} \\ c(1-a) > \frac{1}{4} \end{cases}$$

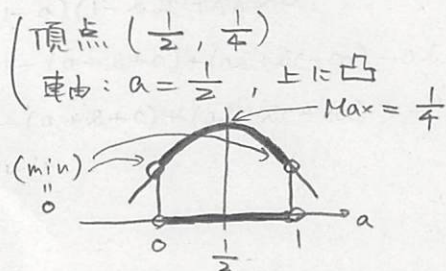
が成り立つ。

辺々をかけると

$$abc(1-b)(1-c)(1-a) > \frac{1}{64} \quad \text{--- ①}$$

一方

$$\begin{aligned} a(1-a) &= -a^2 + a \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$



$$0 < a(1-a) \leq \frac{1}{4}$$

同様に

$$0 < b(1-b) \leq \frac{1}{4}$$

$$0 < c(1-c) \leq \frac{1}{4}$$

3辺々をかけると

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{64}$$

$$abc(1-b)(1-c)(1-a) \leq \frac{1}{64} \quad \text{--- ②}$$

①, ② は 矛盾

よって, 3つの不等式は同時に成り立たない。

関数 $f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ を考える。

(2015 高知大)

ただし、 n は正の整数で、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ は実数である。

- (1) すべての n に対し、常に $f(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ であることを示せ。
- (3) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ であれば、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ はすべて等しいことを示せ。

(1) **証明1**[I] $n=1$ のとき

$$f(x) = x^2 - 2a_1x + a_1^2 \\ = (x - a_1)^2 \geq 0$$

となり、成り立つ。

[II] $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のときの成り立つを仮定。

つまり

$$kx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) \geq 0$$

 $n=k+1$ のとき

$$(k+1)x^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1})x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k+1}^2) \\ = kx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) \\ + x^2 - 2a_{k+1}x + a_{k+1}^2 \\ \geq x^2 - 2a_{k+1}x + a_{k+1}^2 \\ = (x - a_{k+1})^2 \geq 0$$

よって、

 $n=k$ のとき成り立つは $n=k+1$ のときも成り立つ。

[I], [II] より

すべての自然数 n で常に $f(x) \geq 0$ は成り立つ。 ■**証明2**

$$f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x \\ + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$= x^2 - 2a_1x + a_1^2$$

$$+ x^2 - 2a_2x + a_2^2$$

$$+ \dots$$

$$+ x^2 - 2a_nx + a_n^2$$

$$= (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2 \geq 0$$

よって、すべての n に対し、常に $f(x) \geq 0$ である。 ■

(2) (証明)

条件より $D=0$ である。つまり $f(x)=0$ はただ1つの解 x_0 をもち、

$$f(x_0) = 0$$

つまり、

$$(x_0 - a_1)^2 + (x_0 - a_2)^2 + \dots + (x_0 - a_n)^2 = 0$$

よって

$$x_0 = a_1, \text{ かつ } x_0 = a_2, \text{ かつ } \dots, \text{ かつ } x_0 = a_n$$

つまり

$$x_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ である。} \quad \blacksquare$$

(2) (証明)

 $y = f(x)$ のグラフは $n > 0$ かつ $a \geq 0$ 下に凸。(1) より $f(x)=0$ の判別式 $D \leq 0$

が成り立っている。

$$\frac{D}{4} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \leq 0$$

よって

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

が成り立つ。

シュワルツの不等式
が問題の背景に
あります。

(1) $p > 0, q > 0, p + q = 1$ のとき、関数 $f(x) = x^2$ について不等式 $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$ が成り立つことを示せ。

(2) $a > 0, b > 0, a + b = 1$ のとき、(1) を用いて不等式 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$ が成り立つことを示せ。
(早稲田大)

(1) (証明)

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= pf(x_1) + qf(x_2) - f(px_1 + qx_2) \\
 &= px_1^2 + qx_2^2 - (px_1 + qx_2)^2 \\
 &= px_1^2 + qx_2^2 - (p^2x_1^2 + 2pqx_1x_2 + q^2x_2^2) \\
 &= (p - p^2)x_1^2 - 2pqx_1x_2 + (q - q^2)x_2^2 \\
 &= p(1 - p)x_1^2 - 2pqx_1x_2 + q(1 - q)x_2^2 \\
 &= pqx_1^2 - 2pqx_1x_2 + pqx_2^2 \\
 &= pq(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\
 &= pq(x_1 - x_2)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

よって (左辺) $\leq$ (右辺)

つまり $p > 0, q > 0, p + q = 1$ のとき、
不等式は成り立つ。

(等号成立は $x_1 = x_2$ のとき)

(2) (証明)

(1) より

$$pf(x_1) + qf(x_2) \geq f(px_1 + qx_2)$$

$$px_1^2 + qx_2^2 \geq (px_1 + qx_2)^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ x_1 = a + \frac{1}{a}, x_2 = b + \frac{1}{b}, \\ p = q = \frac{1}{2} \quad \text{とおく} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \left\{ \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b}\right) \right\}^2$$

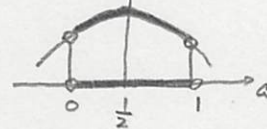
$$\begin{aligned}
 \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &\geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{a+b}{ab}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ a + b = 1 \quad \text{より} \\ b = 1 - a \\ b > 0 \quad \text{より} \quad 1 - a > 0 \\ \quad \quad \quad a < 1 \\ a > 0 \quad \text{とおく} \\ \quad \quad \quad 0 < a < 1 \end{array} \right)$$

$$ab = a(1-a)$$

$$= -a^2 + a$$

$$= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



よって

$$0 < ab \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{ab} \geq 4$$

$$1 + \frac{1}{ab} \geq 5$$

よって

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

つまり

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

は成り立つ。

(等号成立は

$$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \quad \text{かつ} \quad a + b = 1$$

$$\text{つまり} \quad a = b = \frac{1}{2} \quad \text{のとき}$$

(1) で示した不等式を
凸不等式 といいます。

$f''(x) > 0$ を満たす関数 $f(x)$
について 成り立ちます。

(1) $0 \leq x \leq y$ とする。 $\frac{x}{1+x}$ と $\frac{y}{1+y}$ の大小を比較せよ。(2) a, b, c を実数とする。 $\frac{|a-c|}{1+|a-c|}$ と $\frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}$ の大小を比較せよ。

(2016 一橋大)

(1)

$$\begin{aligned} \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} &= \frac{(1+x)y - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{y + xy - x - xy}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \geq 0 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$$

(等号成立は $x=y$ のとき)

(2) 解法1

$$|a-b|=x, |b-c|=y, |a-c|=z$$

とおくと

$$\left(\begin{aligned} z &= |a-c| \\ &= |(a-b) + (b-c)| \\ &\leq |a-b| + |b-c| = x+y. \end{aligned} \right) \quad \text{〇〇} \quad \text{三角不等式}$$

よって

$$z \leq x+y.$$

$$\left(\frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|} \right) - \frac{|a-c|}{1+|a-c|}$$

$$= \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} - \frac{z}{1+z}$$

$$= \frac{x(1+y)(1+z) + y(1+x)(1+z) - z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$= \frac{x + xy + xz + xyz + y + yz + xyz + x + xz + xyz - z - xz - yz - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$= \frac{x+y-z+xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$\geq \frac{xyz(2+z)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 0$$

よって

$$\frac{|a-c|}{1+|a-c|} \leq \frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}$$

等号成立は

 $x+y=z$ かつ $xyz=0$ のとき

$$|a-b| + |b-c| = |a-c| \text{ かつ } |a-b||b-c|=0$$

つまり

 $a=b$ または $b=c$ のとき

解法2

$$0 \leq |a-c| = |(a-b) + (b-c)|$$

$$\leq |a-b| + |b-c|$$

であるから

(1) で

$$x = |a-c|, y = |a-b| + |b-c|$$

とおくと

$$\frac{|a-c|}{1+|a-c|} \leq \frac{|a-b| + |b-c|}{1+|a-b| + |b-c|}$$

$$= \frac{|a-b|}{1+|a-b| + |b-c|}$$

$$+ \frac{|b-c|}{1+|a-b| + |b-c|}$$

$$\leq \frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}$$

よって

$$\frac{|a-c|}{1+|a-c|} \leq \frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}$$

等号成立は

$$|a-c| = |a-b| + |b-c|$$

$$\text{かつ } (|a-b|=0 \text{ または } |b-c|=0) \text{ のとき}$$

つまり

 $a=b$ または $b=c$ のとき