

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題30]

集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の2つの部分集合 A, B について, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\overline{A} \cap B = \{4, 6, 8\}$ であるとき, 集合 $A, B, A \cup B$ を求めよ。

	B	$\overline{B}$	計
A	2	3, 5, 7	2, 3, 5, 7
$\overline{A}$	4, 6, 8	1, 9	1, 4 6, 8, 9
計	2, 4, 6, 8	1, 3, 5 7, 9	1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8 9

表より

$$\left(\begin{array}{l} A = \{2, 3, 5, 7\} \\ B = \{2, 4, 6, 8\} \\ A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right)$$

a, b, c は実数とする。命題「 $ac < 0$ ならば 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解をもつ」について、次の問いに答えよ。

(1) この命題の逆、裏、対偶を述べよ。

(2) (1)における逆、裏、対偶の真偽を述べてその理由を示せ。

(1)

逆「2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が実数解をもつ ならば $ac < 0$ 」

裏「 $ac \geq 0$ ならば 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解をもたない」

対偶「2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が実数解をもたないならば $ac \geq 0$ 」

(2)

逆：偽 (反例: $a = 1, b = 10, c = 1$)

$$\left(\begin{array}{l} a > 0 \\ x^2 + 10x + 1 = 0 \text{ の判別式 } D \text{ は} \\ D/4 = 25 - 1 = 24 > 0 \text{ であり、} \\ \text{実数解をもつから } ac > 0 \end{array} \right)$$

裏：偽 (裏 と対偶 になる逆が偽 だから)

対偶：真

$$\left[\begin{array}{l} \text{(証明)} \\ \text{もとの命題 について } ac < 0 \text{ のとき、} \\ \text{判別式 } D = b^2 - 4ac > 0 \\ \text{を満たす} \\ \text{よって もとの命題 が真 であるので} \\ \text{対偶 も真 である。} \end{array} \right]$$

次の命題の否定を作れ。次に、その真偽を判定せよ。

(1) 「すべての実数 x, y について $x^2 + y^2 > 0$ 」

(2) 「ある実数 x について $x^2 - x + 1 > 0$ 」

(1)

否定「ある実数 x, y について $x^2 + y^2 \leq 0$ 」

真

(証明)
 $x=0$ かつ $y=0$ は
 $x^2 + y^2 = 0$ を満たす。

(2)

否定「すべての実数 x について $x^2 - x + 1 \leq 0$ 」

偽 (反例: $x=10$)

x を実数, a を整数として, 集合 P, Q, R をそれぞれ

$$P = \left\{ x \mid \left| x - \frac{13}{2} \right| \geq 3 \right\}, \quad Q = \{ x \mid x^2 + 18x + 79 \geq 0 \}, \quad R = \left\{ x \mid |x| \leq \frac{a}{2} \right\}$$

とすると、 $\overline{P \cap Q} \subset R$ を満たす a の最小値を求めよ。

(2006 中京大)

$$P: \left| x - \frac{13}{2} \right| \geq 3$$

$$x - \frac{13}{2} \leq -3, 3 \leq x - \frac{13}{2}$$

$$x \leq \frac{7}{2}, \frac{19}{2} \leq x$$

Q: $x^2 + 18x + 79 \geq 0$

$x^2 + 18x + 79 = 0$ b. h. c

$x = -9 \pm \sqrt{2}$



$x \leq -9 - \sqrt{2}, -9 + \sqrt{2} \leq x$

PnQ:

$$\overline{P \cap Q} = \left\{ x \mid -9 - \sqrt{2} < x < -9 + \sqrt{2}, \frac{7}{2} < x < \frac{19}{2} \right\}$$

$$R = \left\{ x \mid |x| \leq \frac{a}{2} \right\}$$

$$= \left\{ x \mid -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$$

$$\overline{E \cap Q} \subset R \text{ を満たすには}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq -9 - \sqrt{2} \\ \frac{19}{2} \leq a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 18 + 2\sqrt{2} \\ a \geq \frac{19}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \geq 18 + 2\sqrt{2}$$

$a \in \mathbb{Z} \quad 5''$

min a = 21

次の命題(1)~(3)について、真のときは証明を与え、偽のときは反例を与えよ。

ただし、 a, b, c, x, y は実数、 m は整数とする。

(1) $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ ならば、 $(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$ である。

(2) すべての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば、 $b^2-4ac<0$ である。

(3) 2次方程式 $x^2+3x+m=0$ が有理数の解をもつならば、 m は偶数である。

(1997 九州大)

(1) 真

(証明)

$$\begin{aligned} & (xy+1)^2 - (x+y)^2 \\ &= x^2y^2 + 2xy + 1 - x^2 - 2xy - y^2 \\ &= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \\ &= (x^2-1)(y^2-1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \textcircled{1} & |x| \leq 1 \text{ より } x^2 \leq 1 \\ & |y| \leq 1 \text{ より } y^2 \leq 1 \end{array} \right)$$

よって

$$(x+y)^2 \leq (xy+1)^2 \quad \blacksquare$$

(2) 偽 (反例: $a=0, b=0, c=1$)

(3) 真 (反例: $m=-4$)

(証明)

$$\begin{aligned} & x^2+3x+m=0 \\ & x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4m}}{2} \end{aligned}$$

これが有理数となるには

$$\sqrt{9-4m} = N \quad (N \geq 0)$$

$$\left(\begin{array}{ll} 9-4m \geq 0 & \text{より} \\ m \leq \frac{9}{4} \\ m \in \mathbb{Z} & \text{より } m = 2, 1, 0, -1, \dots \end{array} \right)$$

両辺を2乗して

$$9-4m = N^2$$

$$9-N^2 = 4m \quad \text{--- ①}$$

$$(3+N)(3-N) = 4m$$

ここで

$$(3+N) - (3-N) = 2N \quad (\geq 0)$$

よって

$$\left(\begin{array}{l} 3+N \geq 3-N \\ 3+N \text{ と } 3-N \text{ の偶奇は一致する} \end{array} \right)$$

積が $4m$ となる

$3+N$ と $3-N$ はともに偶数

このとき N は奇数となり

$$N = 2n+1 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とできる。

① に代入して

$$4m = 9 - (2n+1)^2$$

$$4m = 9 - 4n^2 - 4n - 1$$

$$4m = -4n^2 - 4n + 8$$

$$m = -n^2 - n + 2$$

$$= 2 - n(n+1)$$

$n(n+1)$ は連続2整数の積

なので偶数

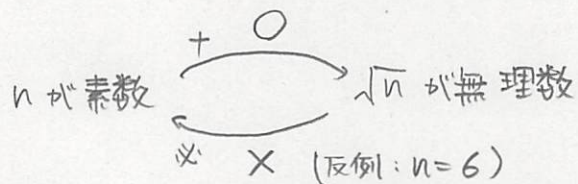
よって m は偶数である。 $\blacksquare$

次の ☐ に、必要条件である、十分条件である、必要十分条件である、必要条件でも十分条件でもない、のうち最も適当なものを入れよ。ただし、 n は正の整数とする。

- (1) n が素数であることは、 $\sqrt{n}$ が無理数であるための ☐ 。
- (2) n が奇数であることは、 $\sqrt{n}$ が無理数であるための ☐ 。
- (3) n が整数の2乗でないことは、 $\sqrt{n}$ が無理数であるための ☐ 。

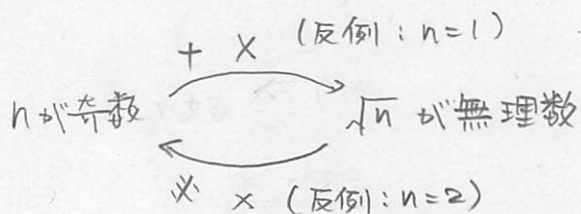
(2011 杏林大)

(1)



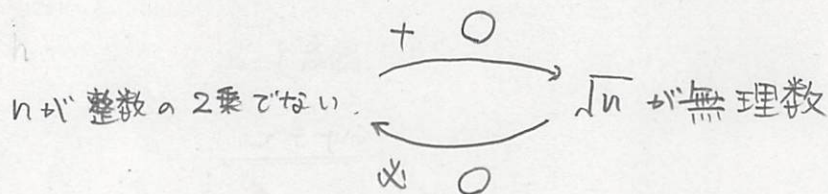
よって、十分条件である。

(2)



よって、必要条件でも十分条件でもない。

(3)



よって、必要十分条件である。

a を実数の定数とし、実数 x, y についての条件 A を考える。

$$A: -x^2 + (a+2)x + a - 3 < y < x^2 - (a-1)x - 2$$

次の場合の a の値の範囲を、それぞれ求めよ。

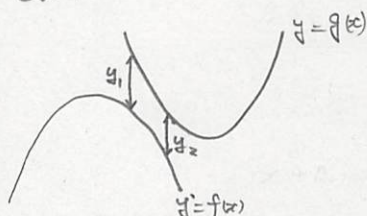
- (1) 任意の x に対して、それぞれ適当な y をとれば条件 A が成り立つ
 (2) 適当な y をとれば、すべての x に対して条件 A が成り立つ

(2007 早稲田大)

(1)

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + (a+2)x + a - 3 \\ g(x) = x^2 - (a-1)x - 2 \end{cases}$$

とよく



$f(x) = g(x)$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が 1 存在しなければよい。

$$-x^2 + (a+2)x + a - 3 = x^2 - (a-1)x - 2$$

$$2x^2 + (-2a-1)x - a + 1 = 0$$

判別式 $D < 0$ となるように。

$$D = (-2a-1)^2 - 8(-a+1)$$

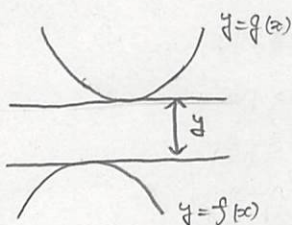
$$= 4a^2 + 4a + 1 + 8a - 8$$

$$= 4a^2 + 12a - 7 < 0$$

$$(2a+7)(2a-1) < 0$$

$$\underline{\underline{-\frac{7}{2} < a < \frac{1}{2}}}$$

(2)



$$\text{Max } f(x) < \text{min } g(x)$$

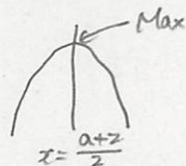
となるように。

$$f(x) = -\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + \frac{a^2+4a+4}{4} + a - 3$$

$$= -\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a - 2$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{頂点} \left(\frac{a+2}{2}, \frac{1}{4}a^2 + 2a - 2 \right) \\ \text{軸: } x = \frac{a+2}{2}, \text{上向き} \end{array} \right)$$

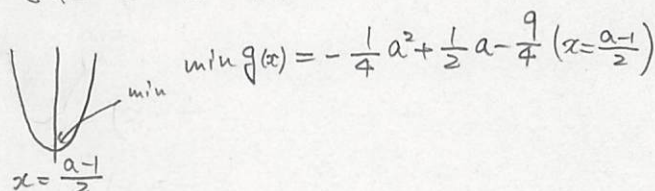
$$\left(\begin{array}{l} \text{軸: } x = \frac{a+2}{2}, \text{上向き} \end{array} \right)$$



$$\text{Max } f(x) = \frac{1}{4}a^2 + 2a - 2 \quad \left(x = \frac{a+2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 - \frac{a^2-2a+1}{4} - 2 \\ &= \left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{頂点} \left(\frac{a-1}{2}, -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{9}{4} \right) \\ \text{軸: } x = \frac{a-1}{2}, \text{下向き} \end{array} \right)$$



$$\text{min } g(x) = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{9}{4} \quad \left(x = \frac{a-1}{2}\right)$$

よって

$$\frac{1}{4}a^2 + 2a - 2 < -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{1}{4} < 0$$

$$\boxed{2a^2 + 6a + 1 < 0}$$

$$\left(\begin{array}{l} 2a^2 + 6a + 1 = 0 \text{ とおくと} \\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2} \\ \text{グラフ} \end{array} \right)$$

$$\underline{\underline{\frac{-3-\sqrt{7}}{2} < a < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}}}$$

実数 x, y, z について $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ が成り立つことを示し、等号がいつ成り立つか答えよ。
 また、これを用いて、命題

「 $x^2+y^2+z^2 \leq a$ ならば $x+y+z \leq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。

(2005 岡山大)

証明1

$$\begin{aligned} & 3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 \\ &= 3x^2+3y^2+3z^2 - (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \\ &= 2x^2+2y^2+2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\ &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ ①

(等号成立は $x=y=z$ のとき)

証明2

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (x, y, z), \quad \vec{q} = (1, 1, 1), \\ \vec{p} \text{ と } \vec{q} \text{ のなす角 } \theta \text{ とおくと} \\ -1 &\leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{より} \\ -|\vec{p}||\vec{q}| &\leq |\vec{p}||\vec{q}|\cos \theta \leq |\vec{p}||\vec{q}| \\ -|\vec{p}||\vec{q}| &\leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq |\vec{p}||\vec{q}| \\ |\vec{p} \cdot \vec{q}| &\leq |\vec{p}||\vec{q}| \end{aligned}$$

両辺ともに正な a で 2乗してよい。

$$\begin{aligned} (\vec{p} \cdot \vec{q})^2 &\leq |\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 \\ \text{よって} \\ (x+y+z)^2 &\leq (x^2+y^2+z^2)(1+1+1) \end{aligned}$$

$$\text{つまり} \quad (x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ \vec{p} \parallel \vec{q} \quad \text{のとき} \\ \text{つまり} \\ x=y=z \quad \text{のとき} \end{array} \right)$$

対偶命題

「 $x+y+z > a$ ならば $x^2+y^2+z^2 > a$ である」
 が真となる最小の正の実数 a を求めよ。

$x+y+z > a$ (>0) のとき
 両辺ともに正な a で 2乗してよい。

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &> a^2 \\ \text{① とあわせて} \\ a^2 &< 3(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

$$\text{つまり} \quad x^2+y^2+z^2 > \frac{a^2}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{a^2}{3} \geq a$$

$$a^2 - 3a \geq 0$$

$$a(a-3) \geq 0$$

$$a > 0 \quad \text{より}$$

$$a \geq 3$$

$$\text{よって} \quad \underline{\underline{\min a = 3}}$$

n を1以上の整数とすると、次の2つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し、正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p : ある n に対して、 $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q : すべての n に対して、 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は無理数である。

(2007 京都大)

(命題 p) 解法1

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \sqrt{n} \text{ が有理数 } a \text{ とき} \\ \sqrt{n} = \frac{b}{a} \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素な自然数}) \\ \text{とできる.} \quad n = \frac{b^2}{a^2} \\ n \text{ は整数で"ある"ので} \quad a=1 \\ \text{つまり} \quad \sqrt{n} = b, \quad n = b^2 \quad (b \geq 1) \end{array} \right\} (*)
 \end{aligned}$$

このとき、

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{b^2+1}$$

が有理数 a とき

$$\sqrt{b^2+1} = c \quad (c \text{ は自然数})$$

となる c が存在する。

$$b^2+1 = c^2$$

$$b^2 - c^2 = -1$$

$$(b+c)(b-c) = -1$$

$$b+c > b-c \quad \text{より,}$$

$$\begin{cases} b+c=1 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

これを解いて

$$b=0, c=1$$

これは $b \geq 1$ に不合理。

よって、

$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数 となる

ことはない。

つまり 偽

解法2

(*) より $\sqrt{n}$ が有理数 a とき $\sqrt{n}$ は自然数。

$$\text{また, } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1$$

$$\text{ゆえに } \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + 1$$

$$\text{よって } \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + 1 \quad \text{なので}$$

$\sqrt{n}$ が自然数 a とき $\sqrt{n+1}$ は自然数 ではない。

よって $\sqrt{n+1}$ は有理数 ではない。

したがって

$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数 となることはない。

(命題 q)

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ が有理数 となる

が存在するを仮定すると、

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = d \quad (d \text{ は有理数})$$

とできる。

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + d \quad \text{--- ①}$$

両辺を2乗して、

$$n+1 = n + 2d\sqrt{n} + d^2$$

$$2d\sqrt{n} = 1 - d^2$$

$$\sqrt{n} = \frac{1-d^2}{2d}$$

①より

$$\sqrt{n+1} = \frac{1-d^2}{2d} + d = \frac{1+d^2}{2d}$$

よって

$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数 となり。

命題 p で得られた事実 に反する。

よって、

すべての n に対して

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{ は無理数}$$

は 真