

- (1)  $14x + 11y = 700$  を満たす正の整数  $x$  と  $y$  の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。  
 (2) 5 で割ると 1 余り, 7 で割ると 2 余るような 4 桁の自然数は全部で何個あるか。

(1) **解法1**

$$14x + 11y = 700$$

$$\rightarrow 14 \times 28 + 11 \times 28 = 700$$

$$14(x-28) + 11(y-28) = 0$$

$$y-28 = -\frac{14}{11}(x-28)$$

 $x, y \in \mathbb{Z}$  である

$$\begin{cases} x-28 = 11k \\ y-28 = -14k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11k + 28 \\ y = -14k + 28 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

 $x > 0$  かつ  $y > 0$  より

$$\begin{cases} 11k + 28 > 0 \\ -14k + 28 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{28}{11} \\ k < 2 \end{cases}$$

 $k \in \mathbb{Z}$  である

$$k = -2, -1, 0, 1$$

よって

$$(x, y) = (6, 56), (17, 42), (28, 28), (39, 14)$$

(2)

求める自然数  $n$  は5 で割った商を  $x$ , 7 で割った商を  $y$  とおくと

$$\begin{cases} n = 5x + 1 \\ n = 7y + 2 \end{cases}$$

 $n$  を消去して

$$5x + 1 = 7y + 2$$

$$5x - 7y = 1$$

$$\rightarrow 5 \times 3 - 7 \times 2 = 1$$

$$5(x-3) - 7(y-2) = 0$$

$$y-2 = \frac{5}{7}(x-3)$$

 $x, y \in \mathbb{Z}$  である

$$\begin{cases} x-3 = 7k \\ y-2 = 5k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k + 3 \\ y = 5k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

このとき

$$n = 5(7k + 3) + 1$$

$$= 35k + 16$$

 $n$  は 4 桁 である

$$1000 \leq 35k + 16 \leq 9999$$

$$984 \leq 35k \leq 9983$$

$$\frac{984}{35} \leq k \leq \frac{9983}{35}$$

$$28 + \frac{4}{35} \leq k \leq 285 + \frac{8}{35}$$

 $k \in \mathbb{Z}$  である

$$k = 29, 30, \dots, 285$$

よって

$$285 - 28 = \underline{\underline{257}} \text{ (個)}$$

(1) **解法2**

$$14x + 11y = 700$$

$$14x = 700 - 11y$$

$$x = 50 - \frac{11}{14}y$$

 $x, y \in \mathbb{Z}$  である

$$\begin{cases} y = 14k \\ x = 50 - 11k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

このとき

 $x > 0$  かつ  $y > 0$  である

$$\begin{cases} 14k > 0 \\ 50 - 11k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{50}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < k < \frac{50}{11}$$

 $k \in \mathbb{Z}$  より

$$k = 1, 2, 3, 4$$

よって

$$(x, y) = (39, 14), (28, 28),$$

$$(17, 42), (6, 56)$$

- (1)  $2xy+6x+y=116$  を満たす正の整数  $x, y$  の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。  
 (2) 等式  $4x+2y+z=15$  を満たす正の整数  $x, y, z$  の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。  
 (3)  $\sqrt{4n^2+165}$  が自然数となるような自然数  $n$  は全部で何個あるか。

(1)

$$2xy+6x+y=116$$

$$\left( \begin{array}{c} y \quad 3 \\ 2x \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2xy & 6x \\ \hline y & 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +3 \\ \end{array}$$

$$(2x+1)(y+3)=119$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \text{ かつ } x \geq 1, y \geq 1 \text{ となる}$$

$$2x+1 \geq 3, y+3 \geq 4$$

|        |    |    |
|--------|----|----|
| $2x+1$ | 7  | 17 |
| $y+3$  | 17 | 7  |

$$\text{よって, } (x, y) = (3, 14), (8, 4)$$

(2)

$$4x+2y+z=15 \quad \text{--- ①}$$

$$4x < 15$$

$$x < \frac{15}{4}$$

$$\text{これを満たす } x \in \mathbb{N} \text{ は}$$

$$x = 1, 2, 3$$

(i)  $x=1$  のとき

$$\text{① は}$$

$$2y+z=11$$

$$\text{これを満たす } (y, z) \text{ は}$$

$$(y, z) = (1, 9), (2, 7), (3, 5),$$

$$(4, 3), (5, 1)$$

(ii)  $x=2$  のとき

$$\text{① は}$$

$$2y+z=7$$

$$\text{これを満たす } (y, z) \text{ は}$$

$$(y, z) = (1, 5), (2, 3), (3, 1)$$

(iii)  $x=3$  のとき

$$\text{① は}$$

$$2y+z=3$$

$$\text{これを満たす } (y, z) \text{ は}$$

$$(y, z) = (1, 1)$$

(i) ~ (iii) より

$$(x, y, z) = (1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), \\ (1, 4, 3), (1, 5, 1), (2, 1, 5), \\ (2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)$$

(3)

$$\sqrt{4n^2+165} = N \quad (>0) \text{ とおく}$$

$$\text{両辺に2乗して}$$

$$4n^2+165=N^2$$

$$N^2-4n^2=165$$

$$(N+2n)(N-2n)=165$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで} \\ (N+2n)-(N-2n)=4n(>0) \\ \text{よって} \\ N+2n > N-2n \end{array} \right)$$

$$N+2n, N-2n \in \mathbb{Z} \text{ となる}$$

|        |     |    |    |    |
|--------|-----|----|----|----|
| $N+2n$ | 165 | 55 | 33 | 15 |
| $N-2n$ | 1   | 3  | 5  | 11 |
| $2N$   | 166 | 58 | 38 | 26 |
| $N$    | 83  | 29 | 19 | 13 |
| $4n$   | 164 | 52 | 28 | 4  |
| $n$    | 41  | 13 | 7  | 1  |

$$\text{よって } \underline{\underline{4\text{個}}}$$

[2018スタンダードⅡⅡAB受 問題A93]

方程式  $7x + 13y = 1111$  を満たす自然数  $x, y$  に対して、次の問いに答えよ。

- (1) この方程式を満たす自然数の組  $(x, y)$  はいくつあるか求めよ。
- (2)  $s = -x + 2y$  とするとき、 $s$  の最大値と最小値を求めよ。
- (3)  $t = |2x - 5y|$  とするとき、 $t$  の最大値と最小値を求めよ。

(2013 鳥取大)

(1)

$$\begin{cases} 7x + 13y = 1 \\ 7 \times 2 + 13 \times (-1) = 1 \end{cases} \quad \text{よ!}$$

$$\begin{aligned} 7x + 13y &= 1111 \\ -) 7 \times 2222 + 13 \times (-1111) &= 1111 \\ \hline 7(x - 2222) + 13(y + 1111) &= 0 \end{aligned}$$

$$y + 1111 = -\frac{7}{13}(x - 2222)$$

$$x, y \in \mathbb{N} \quad \text{だから}$$

$$\begin{cases} x - 2222 = 13k \\ y + 1111 = -7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13k + 2222 \\ y = -7k - 1111 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad y > 0 \quad \text{だから}$$

$$\begin{cases} 13k + 2222 > 0 \\ -7k - 1111 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{2222}{13} \\ k < -\frac{1111}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2222}{13} < k < -\frac{1111}{7}$$

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{-170 - \frac{12}{13}}} && \underline{\underline{-158 - \frac{5}{7}}} \end{aligned}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{だから}$$

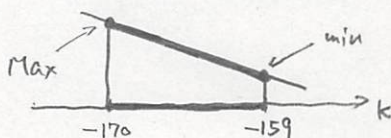
$$k = -170, -169, \dots, -159$$

よ、 $\therefore$

$$170 - 158 = \underline{\underline{12}} \text{ (組)}$$

(2)

$$\begin{aligned} -x + 2y &= -(13k + 2222) + 2(-7k - 1111) \\ &= -27k - 4444 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \text{Max } s = 146 & (k = -170) \\ \text{min } s = -151 & (k = -159) \end{cases}$$

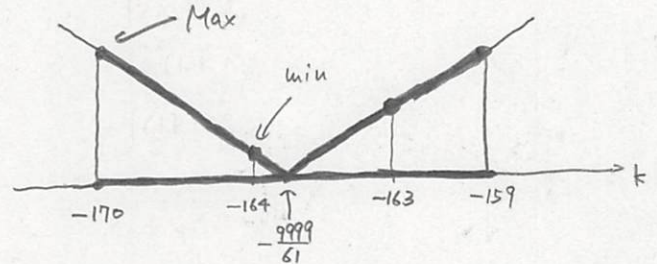
(3)

$$\begin{aligned} t &= |2x - 5y| \\ &= |2(13k + 2222) - 5(-7k - 1111)| \\ &= |61k + 9999| \end{aligned}$$

$$t = 0 \quad \text{るとき}$$

$$61k + 9999 = 0$$

$$k = -\frac{9999}{61} = -163 - \frac{56}{61}$$



$$\begin{cases} \text{Max } t = 371 & (k = -170) \\ \text{min } t = 5 & (k = -164) \end{cases}$$

(1)  $P = x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - k$  が  $x, y$  の1次式の積に因数分解できるとき、整数  $k$  の値を求め、この因数分解をせよ。

(2)  $x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - 18 = 0$  を満たす自然数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

(2015 愛知大)

(1) **解法1**

$$P = x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - k$$

$$= x^2 + (-y+1)x + (-2y^2+10y-k) = 0$$

とおく

$x$  についての判別式  $D_x$  は

$$D_x = (-y+1)^2 - 4(-2y^2+10y-k)$$

$$= y^2 - 2y + 1 + 8y^2 - 40y + 4k$$

$$= 9y^2 - 42y + 4k + 1$$

$x, y$  の1次式の積に因数分解できる

ためには  $D_x = 0$  の判別式  $D$

が  $D = 0$  となるように。

$$\frac{D}{4} = 441 - 9(4k+1)$$

$$= 432 - 36k = 0$$

$$k = 12$$

このとき

$$P = x^2 + (-y+1)x + (-2y^2+10y-12)$$

$$= x^2 + (-y+1)x - 2(y^2-5y+6)$$

$$= x^2 + (-y+1)x - 2(y-2)(y-3)$$

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & -2(y-2) \rightarrow -2y+4 \\ 1 & y-3 \rightarrow y-3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ + \\ -y+1 \end{array}$$

$$= (x-2y+4)(x+y-3)$$

**解法2**

最高次の項に着目して

$$P = (x+ay+b)(x+cy+d)$$

$$= x^2 + (a+c)xy + acy^2 +$$

$$+ (b+d)x + (ad+bc)y + bd$$

とおく

各項の係数を比較して

$$\begin{cases} a+c = -1 \\ ac = -2 \\ b+d = 1 \\ ad+bc = 10 \\ bd = -k \end{cases}$$

$a$  と  $c$  を解にもつ2次方程式は

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0$$

$$t = -2, 1$$

$$a < c \text{ として } a = -2, c = 1$$

このとき

$$b+d = 1, b-2d = 10, bd = -k$$

であり、

これを解くと

$$b = 4, d = -3, k = 12$$

このとき

$$P = (x-2y+4)(x+y-3)$$

(2)

$$x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - 18 = 0$$

$$x^2 - xy - 2y^2 + x + 10y - 12 = 6$$

(1) より

$$(x-2y+4)(x+y-3) = 6$$

$x, y \in \mathbb{N}$  なる  $x, y$

|          |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|
| $x-2y+4$ | 1  | 2  | 3  | 6  |
| $x+y-3$  | 6  | 3  | 2  | 1  |
|          | x  |    | x  |    |
| $x-2y+4$ | -1 | -2 | -3 | -6 |
| $x+y-3$  | -6 | -3 | -2 | -1 |
|          | x  |    | x  |    |

$$(x, y) = (5, 4), (3, 2), (-2, 2), (-2, 4)$$

$x, y \in \mathbb{N}$  より

$$(x, y) = (5, 4), (3, 2)$$

実数  $x, y$  は等式  $3x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + y - 1 = 0$  を満たす。

(1)  $y$  のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) この等式を満たす  $x, y$  で、ともに整数となるものをすべて求めよ。

(2017 岡山理科大)

(1)

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

$$3x^2 + (-2y-2)x + (2y^2+y-1) = 0$$

$x$  についての判別式  $D_x \geq 0$  とおこす。

$$D_x/4 = (-y-1)^2 - 3(2y^2+y-1)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 6y^2 - 3y + 3$$

$$= -5y^2 - y + 4 \geq 0$$

$$5y^2 + y - 4 \leq 0$$

$$(5y-4)(y+1) \leq 0$$

$$\underline{\underline{-1 \leq y \leq \frac{4}{5}}}$$

(2)

$y \in \mathbb{Z}$  とおくと (1) より

$$y = -1, 0$$

(i)  $y = -1$  のとき

$$3x^2 + 2x + 2 - 2x - 1 - 1 = 0$$

$$3x^2 = 0$$

$$x = 0$$

(ii)  $y = 0$  のとき

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(3x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, 1$$

$x \in \mathbb{Z}$  より

$$x = 1$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{(x, y) = (0, -1), (1, 0)}}$$

どのような負でない整数  $x, y$  を用いても  $n = 3x + 7y$  の形で表せない自然数  $n$  をすべて答えよ。

また,  $2008 = 3x + 7y$  を満たす正の整数  $x, y$  の組は何個あるか答えよ。

(神戸薬科大)

## 解法1

$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 3x(-2) + 7 \times 1 = 1 \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= n \\ \rightarrow 3x(-2n) + 7 \times n &= n \\ 3(x+2n) + 7(y-n) &= 0 \\ y-n &= -\frac{3}{7}(x+2n) \end{aligned}$$

$$x, y, n \in \mathbb{Z} \quad \text{と仮定}$$

$$\begin{cases} x+2n = 7k \\ y-n = -3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2n + 7k \\ y = n - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x \geq 0 \quad \text{かつ} \quad y \geq 0 \quad \text{と仮定}$$

$$\begin{cases} -2n + 7k \geq 0 \\ n - 3k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{2}{7}n \\ k \leq \frac{1}{3}n \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{と仮定} \quad \frac{2}{7}n < \frac{1}{3}n \quad \text{であり}$$

$$\frac{2}{7}n \leq k \leq \frac{1}{3}n \quad \text{--- ①}$$

$$n \geq 21 \quad \text{と仮定}$$

$$\frac{1}{3}n - \frac{2}{7}n = \frac{n}{21} \geq 1 \quad \text{となり}$$

① を満たす  $k \in \mathbb{Z}$  が必ず存在する。

ゆえに  $1 \leq n \leq 20$  で調べるように。

| $n$ | $x$ | $y$ |
|-----|-----|-----|
| 3   | 1   | 0   |
| 6   | 2   | 0   |
| 7   | 0   | 1   |
| 9   | 3   | 0   |
| 10  | 1   | 1   |
| 12  | 4   | 0   |
| 13  | 2   | 1   |
| 14  | 0   | 2   |
| 15  | 5   | 0   |
| 16  | 3   | 1   |
| 17  | 1   | 2   |
| 18  | 6   | 0   |
| 19  | 4   | 1   |
| 20  | 2   | 2   |

表より

$$n = 1, 2, 4, 5, 8, 11$$

$$n = 2008 \quad \text{とき}$$

$$\textcircled{1} \text{ は } \frac{4016}{7} < k < \frac{2008}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{4016}{7} & & \frac{2008}{3} \\ \hline 573 + \frac{5}{7} & & 669 + \frac{1}{3} \end{array}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$k = 574, 575, \dots, 669$$

よって

$$669 - 573 = 96 \text{ (個)}$$

## 解法2 (前半)

$$n = 3x + 7y \quad \text{で}$$

$$\begin{cases} 3\text{の倍数で最小のものは} \\ 3 \times 0 + 7 \times 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\text{で割り、}7\text{で割って}1\text{余る数で最小のものは} \\ 3 \times 0 + 7 \times 1 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\text{で割り、}7\text{で割って}2\text{余る数で最小のものは} \\ 3 \times 0 + 7 \times 2 = 14 \end{cases}$$

$$m \text{ が } 0 \text{ 以上の整数のとき}$$

$$3m + 7 \times 0 = 3m \quad (\geq 0)$$

$$3m + 7 \times 1 = 3(m+2) + 1 \quad (\geq 7)$$

$$3m + 7 \times 2 = 3(m+4) + 2 \quad (\geq 14)$$

よって

0以上3の倍数と

7以上の3で割り、7で割って1余る数と

14以上の3で割り、7で割って2余る数と

すべて  $3x + 7y$  の形で表される。

ゆえに

$$n = 3x + 7y \text{ で表せない } n \in \mathbb{N} \text{ は}$$

$$n = 1, 4, 2, 5, 8, 11$$

つまり

$$n = 1, 2, 4, 5, 8, 11$$

ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ、ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ  $l, m, n$  として、可能性のある組  $(l, m, n)$  をすべて求めよ。

(2016 東北大)

題意より

$$7l + 9m + 12n = 54 \quad (l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0)$$

$$12n = 54 - (7l + 9m) \quad \text{より}$$

$$12n \leq 54$$

$$0 \leq n \leq \frac{9}{2}$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{なので}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

(i)  $n = 0$  のとき

$$7l + 9m = 54$$

これを満たす  $l, m$  は

$$(l, m) = (0, 6)$$

(ii)  $n = 1$  のとき

$$7l + 9m + 12 = 54$$

$$7l + 9m = 42$$

これを満たす  $l, m$  は

$$(l, m) = (6, 0)$$

(iii)  $n = 2$  のとき

$$7l + 9m + 24 = 54$$

$$7l + 9m = 30$$

これを満たす  $l, m$  は

$$(l, m) = (3, 1)$$

(iv)  $n = 3$  のとき

$$7l + 9m + 36 = 54$$

$$7l + 9m = 18$$

これを満たす  $l, m$  は

$$(l, m) = (0, 2)$$

(v)  $n = 4$  のとき

$$7l + 9m + 48 = 54$$

$$7l + 9m = 6$$

これを満たす  $l, m$  は

存在しない。

a) ~ (v) より

$$(l, m, n) = (0, 6, 0), (6, 0, 1), (3, 1, 2),$$

$$(0, 2, 3)$$

2016以上の整数  $m$  は、正の整数  $x, y$  を用いて  $m = 65x + 31y$  と表せることを示せ。

(2016 福井大)

## 証明1

$$65x + 31y = 1 \quad \text{とおく}$$

$$31(2x + y) + 3x = 1$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = -10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -10 \\ y = 21 \end{cases}$$

$$65x + 31y = m$$

$$\Rightarrow 65(-10m) + 31 \times 21m = m$$

$$65(x + 10m) + 31(y - 21m) = 0$$

$$y - 21m = -\frac{65}{31}(x + 10m)$$

$$x, y, m \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} x + 10m = 31k \\ y - 21m = -65k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff \begin{cases} x = -10m + 31k \\ y = 21m - 65k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad y > 0 \quad \text{のとき}$$

$$\begin{cases} -10m + 31k > 0 \\ 21m - 65k > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k > \frac{10}{31}m \\ k < \frac{21}{65}m \end{cases}$$

$$\iff \frac{10}{31}m < k < \frac{21}{65}m \quad \text{--- ①}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{21}{65}m - \frac{10}{31}m &= \frac{651m - 650m}{2015} \\ &= \frac{m}{2015} \end{aligned}$$

$$m \geq 2016 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{m}{2015} \geq \frac{2016}{2015} > 1 \quad \text{となり}$$

①を満たす  $k \in \mathbb{Z}$  が存在する。

よって

$$m \geq 2016 \quad \text{のとき}$$

$$m = 65x + 31y \quad \text{と表せる。} \quad \blacksquare$$

## 証明2

$$65x + 31y = m \quad \text{より}$$

$$65x = m - 31y$$

$$y = 1, 2, 3, \dots, 65 \quad \text{として}$$

65個の数

$$m - 31 \times 1, m - 31 \times 2, \dots, m - 31 \times 65 \quad \text{--- ①}$$

を考えると

これらはすべて65で割った余りが異なる。

$$\textcircled{1} \quad 1 \leq i < j \leq 65 \quad \text{として}$$

$$m - 31i \equiv m - 31j \pmod{65}$$

と仮定すると

$$\begin{aligned} (m - 31i) - (m - 31j) \\ = 31(j - i) \equiv 0 \pmod{65} \end{aligned}$$

ここで

31と65は互いに素なので

$$j - i \equiv 0 \pmod{65}$$

しかし

$$0 < j - i < 65 \quad \text{なので}$$

$$j - i \not\equiv 0 \pmod{65}$$

となり矛盾する。

よって

$$m - 31i \not\equiv m - 31j \pmod{65}$$

よって

①の中に1つだけ65で割り切れる

ものが存在する。

そのときの  $y = k$  とおくと

$$m - 31k = 65l \quad (l \in \mathbb{Z})$$

とできる。

また

$$31 \times 65 = 2015 \quad \text{であり} \quad m \geq 2016$$

のとき ①はすべて正の数であり

$$m = 65l + 31k \quad (k, l \text{ は正の整数})$$

よって

$$m \geq 2016 \quad \text{のとき}$$

$$m = 65x + 31y \quad \text{と表せる。} \quad \blacksquare$$

$a, b, c$  を正の整数とすると、次の等式を考える。

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2 \quad \dots\dots ①$$

- (1)  $c=1$  のとき、等式①を満たす正の整数  $a, b$  の組は存在しないことを示せ。  
 (2)  $c=2$  のとき、等式①を満たす正の整数  $a, b$  の組で  $a \geq b$  を満たすものをすべて求めよ。  
 (3) 等式①を満たす正の整数の組  $(a, b, c)$  で  $a \geq b \geq c$  を満たすものをすべて求めよ。

(2012 鳥取大)

(1) 証明

$c=1$  のとき ①は

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \times 2 = 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1 \quad \dots\dots ②$$

$a > 0, b > 0$  より

$$1 + \frac{1}{a} > 1, 1 + \frac{1}{b} > 1 \quad \text{だから}$$

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) > 1$$

これは ② に不合理

よって、① を満たす正の整数  $a, b$  の組は存在しない。

(2)

$c=2$  のとき ①は

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \times \frac{3}{2} = 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$$

$$3(a+1)(b+1) = 4ab$$

$$3ab + 3a + 3b + 3 = 4ab$$

$$ab - 3a - 3b = 3$$

$$+9 \left( \begin{array}{cc|cc} & b & -3 & \\ a & ab & -3a & \\ -3 & -3b & 9 & \end{array} \right) +9$$

$$(a-3)(b-3) = 12$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここから} \\ a \geq b \geq 1 \quad \text{より} \\ a-3 \geq b-3 \geq -2 \end{array} \right)$$

|       |    |   |   |
|-------|----|---|---|
| $a-3$ | 12 | 6 | 4 |
| $b-3$ | 1  | 2 | 3 |

よって

$$(a, b) = (15, 4), (9, 5), (7, 6)$$

(3)

$$\left( \begin{array}{l} a \geq b \geq c > 0 \quad \text{より} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \\ 1 + \frac{1}{a} \leq 1 + \frac{1}{b} \leq 1 + \frac{1}{c} \end{array} \right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3$$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3$$

$$2c^3 \leq (c+1)^3$$

$$c^3 - 3c^2 - 3c - 1 \leq 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \quad \text{とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

$$= 3(x^2 - 2x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{を解くと} \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\left( \begin{array}{l} f(x) \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ 1-\sqrt{2} \quad 1+\sqrt{2} \end{array} \end{array} \right)$$

$$f(1) = 1 - 3 - 3 - 1 = -6$$

$$f(2) = 8 - 12 - 6 - 1 = -11$$

$$f(3) = 27 - 27 - 9 - 1 = -10$$

$$f(4) = 64 - 48 - 12 - 1 = 3 \quad \text{より}$$

|        |    |     |              |     |     |     |     |     |   |     |
|--------|----|-----|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----|
| $x$    | 1  | ... | $1+\sqrt{2}$ | ... | 2   | ... | 3   | ... | 4 | ... |
| $f(x)$ |    | -   | 0            | +   |     | +   |     | +   |   | +   |
| $f(x)$ | -6 |     |              |     | -11 |     | -10 |     | 3 |     |

よって  $f(x) \leq 0$  を満たす  $x$  は

$$c = 1, 2, 3$$

(i)  $c=1$  のとき

(1) より ① を満たす整数  $a, b$  の組は存在しない。

(ii)  $c=2$  のとき  $a \geq b \geq 2$ 

$$(2) \text{ より } (a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2)$$

$$(iii) \ c = 3 \text{ or } 4 \quad a \geq b \geq 3$$

$$\Phi \quad (1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) \times \frac{4}{3} = 2$$

$$(a+1)(b+1) = \frac{3}{2}$$

$$2ab + 2a + 2b + 2 = 3ab$$

$$ab - 2a - 2b = 2$$

$$\begin{pmatrix} & b & -2 \\ a & ab & -2a \\ -2 & -2b & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} +4 \\ \downarrow \\ +4 \end{matrix}$$

$$(a-2)(b-2) = 6$$

$$\begin{pmatrix} z \leq 2 \\ a \geq b \geq 3 \text{ or} \\ a-2 \geq b-2 \geq 1 \end{pmatrix}$$

|       |   |   |
|-------|---|---|
| $a-2$ | 6 | 3 |
| $b-2$ | 1 | 2 |

5, 2

$$(a, b, c) = (8, 3, 3), (5, 4, 3)$$

(i)  $\sim (iii)$  or

$$(a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2),$$

$$(8, 3, 3), (5, 4, 3)$$

$abcd = a + b + c + d$  を満たす正の整数  $a, b, c, d$  の組をすべて求めよ。

(東京女子大)

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq d \quad \text{としておく.}$$

$$a + b + c + d \leq d + d + d + d \quad \text{より}$$

$$abcd \leq 4d$$

$$\text{つまり} \quad 1 \leq abc \leq 4.$$

$$(i) (a, b, c) = (1, 1, 1) \quad \text{のとき} \quad d \geq 1$$

$$\text{与式は} \quad d = 3 + d$$

$$0 = 3.$$

これを満たす  $d$  は存在しない。

$$(ii) (a, b, c) = (1, 1, 2) \quad \text{のとき} \quad d \geq 2$$

$$\text{与式は} \quad 2d = 4 + d$$

$$d = 4$$

これは  $d \geq 2$  を満たす。

$$(iii) (a, b, c) = (1, 1, 3) \quad \text{のとき} \quad d \geq 3$$

$$\text{与式は} \quad 3d = 5 + d$$

$$2d = 5$$

これを満たす整数  $d$  は存在しない。

$$(iv) (a, b, c) = (1, 1, 4) \quad \text{のとき} \quad d \geq 4$$

$$\text{与式は} \quad 4d = 6 + d$$

$$3d = 6$$

$$d = 2$$

これは  $d \geq 4$  を満たさない。

$$(v) (a, b, c) = (1, 2, 2) \quad \text{のとき} \quad d \geq 2$$

$$\text{与式は} \quad 4d = 5 + d$$

$$3d = 5$$

これを満たす整数  $d$  は存在しない。

(i) ~ (v) より

$$\underline{\underline{\{a, b, c, d\} = \{1, 1, 2, 4\}}}$$

$x, y$  を自然数,  $p$  を3以上の素数とする。

- (1)  $x^2 - y^2 = p$  が成り立つとき,  $x, y$  を  $p$  で表せ。  
 (2)  $x^3 - y^3 = p$  が成り立つとき,  $p$  を6で割った余りが1となることを証明せよ。  
 (3)  $x^3 - y^3 = p$  が自然数の解の組  $(x, y)$  をもつような  $p$  を, 小さい数から順に  $p_1, p_2, p_3, \dots$  とするとき,  $p_5$  の値を求めよ。

(2014 早稲田大)

(1)

$$x^2 - y^2 = p$$

$$(x+y)(x-y) = p$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで} \\ x+y > x-y \\ x+y > 0 \end{array} \right) \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} x+y = p \\ x-y = 1 \end{cases}$$

これを解いて

$$x = \frac{p+1}{2}, \quad y = \frac{p-1}{2}$$

(  $p$  は奇素数なので, これらは自然数である。 )

(2) (証明)

$$x^3 - y^3 = p$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = p$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで} \\ x^2 + xy + y^2 > x-y \\ x^2 + xy + y^2 > 0 \end{array} \right) \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} x-y = 1 & \text{--- ①} \\ x^2 + xy + y^2 = p & \text{--- ②} \end{cases}$$

① より  $y = x-1$

② に代入して.

$$\begin{aligned} p &= x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 \\ &= x^2 + x^2 - x + x^2 - 2x + 1 \\ &= 3x^2 - 3x + 1 \\ &= 3x(x-1) + 1 \end{aligned}$$

ここで

$x(x-1)$  は連続する2整数の積  
 なので 2の倍数.

つまり

$$3x(x-1) \text{ は } 6 \text{ の倍数}$$

よって

$$p \equiv 1 \pmod{6}$$

(3)

$$(2) \text{ で } p = 3x(x-1) + 1 \quad \text{である。}$$

これは  $x \geq 1$  で単調増加.

$$x=1 \text{ のとき } p=1 \quad \times$$

$$x=2 \text{ のとき } p=6+1=7 \quad p_1=7$$

$$x=3 \text{ のとき } p=18+1=19 \quad p_2=19$$

$$x=4 \text{ のとき } p=36+1=37 \quad p_3=37$$

$$x=5 \text{ のとき } p=60+1=61 \quad p_4=61$$

$$x=6 \text{ のとき } p=90+1=91=7 \times 13 \quad \times$$

$$x=7 \text{ のとき } p=126+1=127 \quad \underline{\underline{p_5=127}}$$