

- (1) 2進法で表された2つの数 $1001101_{(2)}$, $111_{(2)}$ の和を2進法で表せ。
 (2) 5進法で表された2つの数 $123_{(5)}$, $24_{(5)}$ の積を5進法で表せ。
 (3) 7進法で表された循環小数 $0.\dot{3}\dot{5}_{(7)}$ を5進法的小数で表せ。

(1)

$$\begin{array}{r} 1001101_{(2)} \\ +) \quad 111_{(2)} \\ \hline 1010100_{(2)} \end{array}$$

(2)

解法1

$$\begin{array}{r} 123_{(5)} \\ \times) \quad 24_{(5)} \\ \hline 1102 \\ 301 \\ \hline 4112_{(5)} \end{array}$$

解法2

$$\begin{aligned} 123_{(5)} \times 24_{(5)} &= (1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3)(2 \times 5 + 4) \\ &= 2 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 6 \times 5 \\ &\quad + 4 \times 5^2 + 8 \times 5 + 12 \\ &= 2 \times 5^3 + 8 \times 5^2 + 14 \times 5 + 12 \\ &= 2 \times 5^3 + 8 \times 5^2 + 14 \times 5 + (2 \times 5 + 2) \\ &= 2 \times 5^3 + 8 \times 5^2 + 16 \times 5 + 2 \\ &= 2 \times 5^3 + 8 \times 5^2 + (3 \times 5 + 1) \times 5 + 2 \\ &= 2 \times 5^3 + 11 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2 \\ &= 2 \times 5^3 + (2 \times 5 + 1) \times 5^2 + 1 \times 5 + 2 \\ &= 4 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2 \\ &= \underline{4112_{(5)}} \end{aligned}$$

(3)

$$0.\dot{3}\dot{5}_{(7)} = \frac{3}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{5}{7^4} + \dots$$

$$x = 0.\dot{3}\dot{5} \quad \text{とおくと}$$

$$100x = 35.3535 \dots \quad (1)$$

$$x = 0.3535 \dots \quad (2)$$

$$66x = 35 \quad (1)$$

10進法では

$$48x = 26 \quad 1 \frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{13}{24_{(5)}} = 0.a b c d \dots \quad (3)$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{13}{24} \times 5 = \frac{65}{24} = 2 + \frac{17}{24} \quad \text{よ) } a=2 \\ \frac{17}{24} \times 5 = \frac{85}{24} = 3 + \frac{13}{24} \quad \text{よ) } b=3 \\ \frac{13}{24} \times 5 = 2 + \frac{17}{24} \quad \text{よ) } c=2 \\ \vdots \end{array} \right)$$

よ、

$$\underline{0.\dot{3}\dot{5}_{(7)} = 0.\dot{2}\dot{3}_{(5)}}$$

a, b, c をそれぞれ1桁の数として, 3桁の数を abc と表記するとき, 7進法で表すと3桁の数 $abc_{(7)}$ になり, 5進法で表すと3桁の数 $bca_{(5)}$ になる数を10進法で表せ。

(2016 星薬科大)

(i), (ii) より

$$a=1, b=2, c=3$$

このとき, 求める数は

$$49 \times 1 + 7 \times 2 + 3$$

$$= 49 + 14 + 3$$

$$= \underline{66}$$

$$\begin{cases} abc_{(7)} = 49a + 7b + c \\ bca_{(5)} = 25b + 5c + a \end{cases}$$

$$abc_{(7)} = bca_{(5)} \quad \text{より}$$

$$49a + 7b + c = 25b + 5c + a$$

$$48a - 18b - 4c = 0$$

$$24a - 9b - 2c = 0$$

$$24a - 2c = 9b$$

$$2(12a - c) = 9b \quad \text{①}$$

左辺は2の倍数で

2と9は互いに素なので

bは2の倍数

$$\begin{cases} \text{ここで} \\ 0 \leq b \leq 6 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq b \leq 4 \\ \text{より} \\ 1 \leq b \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{つまり} \quad b=2, 4$$

(i) $b=2$ のとき

①は

$$2(12a - c) = 18$$

$$12a - c = 9$$

$$\begin{cases} \text{ここで} \\ 1 \leq a \leq 6 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq a \leq 4 \\ \text{より} \\ 1 \leq a \leq 4 \\ 0 \leq c \leq 6 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq c \leq 4 \\ \text{より} \\ 0 \leq c \leq 4 \end{cases}$$

これを満たす $a, c \in \mathbb{Z}$ は

$$a=1, c=3$$

(ii) $b=4$ のとき

①は

$$2(12a - c) = 36$$

$$12a - c = 18$$

これを満たす $a, c \in \mathbb{Z}$ は

存在しない。

a, b を実数とし、整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ を考える。

(2015 関西大)

(1) a, b を $f(1), f(-1)$ を用いて表せ。

(2) $f(1)$ と $f(-1)$ がともに整数であれば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ も整数となることを証明せよ。

(1)

$$f(1) = 1 + a + b$$

$$f(-1) = -1 + a - b \quad (+)$$

$$f(1) + f(-1) = 2a$$

$$a = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$$

$$f(1) = 1 + a + b$$

$$f(-1) = -1 + a - b \quad (-)$$

$$f(1) - f(-1) = 2 + 2b$$

$$2b = f(1) - f(-1) - 2$$

$$b = \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2}$$

(2) (証明)

$$f(n) = n^3 + an^2 + bn$$

$$= n^3 + \frac{f(1) + f(-1)}{2} n^2 + \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2} n$$

$$= n^3 + \frac{f(1)}{2} (n^2 + n) + \frac{f(-1)}{2} (n^2 - n) - n$$

$$= n^3 + \frac{f(1)}{2} n(n+1) + \frac{f(-1)}{2} n(n-1) - n$$

ここで

$n(n+1)$ と $n(n-1)$ はともに

連続2整数の積なので2の倍数である。

また、

$f(1), f(-1), n \in \mathbb{Z}$ なので

$f(n) \in \mathbb{Z}$ である。 ■

自然数 n の一の位の数 $f(n)$ で表す。例えば、 $f(47)=7$ である。

(1) $f(3^5) - f(3)$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $f(n^5) - f(n) = 0$ となることを示せ。

(2001 千葉大)

(1)

$$\begin{aligned} f(3^5) - f(3) \\ &= f(729) - f(3) \\ &= 9 - 3 \\ &= \underline{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \equiv 8 \text{ のとき } n^5 &\equiv 64 \times 64 \times 8 \\ &\equiv 4 \times 4 \times 8 \\ &\equiv 128 \equiv 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \equiv 9 \text{ のとき } n^5 &\equiv 81 \times 81 \times 9 \\ &\equiv 1 \times 1 \times 9 \equiv 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } n^5 &\equiv n \text{ となる} \\ n^5 - n &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\text{つまり } f(n^5) - f(n) = 0 \quad \blacksquare$$

(2) 証明1

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 + 1)(n^2 - 1) \\ &= n(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1) \\ &= (n - 1)n(n + 1)\{(n^2 - 4) + 5\} \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1) \end{aligned}$$

ここで

$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ は 連続5整数の積

なので $5! = 120 = 12 \times 10$ の倍数

$(n - 1)n(n + 1)$ は 連続3整数の積 である

$3! = 6 = 3 \times 2$ の倍数

よって

$n^5 - n$ は 10 の倍数

つまり

$f(n^5) - f(n) = 0$ は 成り立つ。 $\blacksquare$

証明2

(mod 10 で考える)

$$n \equiv 0 \text{ のとき } n^5 \equiv 0$$

$$n \equiv 1 \text{ のとき } n^5 \equiv 1$$

$$n \equiv 2 \text{ のとき } n^5 \equiv 32 \equiv 2$$

$$n \equiv 3 \text{ のとき } n^5 \equiv 243 \equiv 3$$

$$n \equiv 4 \text{ のとき } n^5 \equiv 1024 \equiv 4$$

$$n \equiv 5 \text{ のとき } n^5 \equiv 3125 \equiv 5$$

$$n \equiv 6 \text{ のとき } n^5 \equiv 36 \times 216 \equiv 6 \times 6 \equiv 36 \equiv 6$$

$$\begin{aligned} n \equiv 7 \text{ のとき } n^5 &\equiv 49 \times 49 \times 7 \equiv 9 \times 9 \times 7 \\ &\equiv 81 \times 7 \equiv 1 \times 7 \equiv 7 \end{aligned}$$

2次方程式 $x^2 - 3kx + 2k = 0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

(2016 高崎経済大)

解法1

$$x^2 - 3kx + 2k = 0$$

$$x = \frac{3k \pm \sqrt{9k^2 - 8k}}{2}$$

このが整数 となるためには

$$\sqrt{9k^2 - 8k} = N \quad (N \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

となることが必要

両辺 2乗して

$$9k^2 - 8k = N^2$$

$$9\left(k - \frac{4}{9}\right)^2 - \frac{16}{9} = N^2$$

$$(9k - 4)^2 - 16 = 9N^2$$

$$(9k - 4)^2 - 9N^2 = 16$$

$$(9k - 4 + 3N)(9k - 4 - 3N) = 16$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ここで} \\ (9k - 4 + 3N) - (9k - 4 - 3N) = 6N (\geq 0) \\ \text{より} \\ \left\{ \begin{array}{l} 9k - 4 + 3N \geq 9k - 4 - 3N \\ 9k - 4 + 3N \text{ と } 9k - 4 - 3N \text{ の 偶奇は} \\ \text{一致する。} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

 $k, N \in \mathbb{Z}$ となる

$9k - 4 + 3N$	8	4	-4	-2
$9k - 4 - 3N$	2	4	-4	-8
$18k - 8$	10	8	-8	-10
k	1	x	0	x
N	1	x	0	x

よって

$$\left(\begin{array}{l} k=1 \text{ のとき} \\ x = \frac{3 \pm 1}{2} = 2, 1 \\ \\ k=0 \text{ のとき} \\ x = \frac{0}{2} = 0 \end{array} \right.$$

つまり

$$\left(\begin{array}{l} k=1 \text{ のとき 整数解 } x=1, 2 \\ k=0 \text{ のとき 整数解 } x=0 \end{array} \right.$$

解法2

2つの解 α, β ($\alpha \leq \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$)

とすると

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 3k, \quad \alpha\beta = 2k$$

 k を消去すると

$$2\alpha + 2\beta = 3\alpha\beta$$

$$3\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta = 0$$

$$+ \frac{4}{3} \left(\begin{array}{c|cc} & \beta & -\frac{2}{3} \\ \hline 3\alpha & 3\alpha\beta & -2\alpha \\ -2 & -2\beta & \frac{4}{3} \end{array} \right) + \frac{4}{3}$$

$$(3\alpha - 2)\left(\beta - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$(3\alpha - 2)(3\beta - 2) = 4$$

$$\alpha \leq \beta \text{ より } 3\alpha - 2 \leq 3\beta - 2$$

 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ となる

$3\alpha - 2$	1	2	-4	-2
$3\beta - 2$	4	2	-1	-2
	x		x	

よって

$$(\alpha, \beta) = (1, 2), (0, 0)$$

$$\left(\begin{array}{l} (\alpha, \beta) = (1, 2) \text{ のとき} \\ 2k = 2 \quad \textcircled{1} \quad k = 1 \\ (\alpha, \beta) = (0, 0) \text{ のとき} \\ 2k = 0 \quad \textcircled{2} \quad k = 0 \end{array} \right.$$

つまり

$$\left(\begin{array}{l} k=1 \text{ のとき 整数解 } x=1, 2 \\ k=0 \text{ のとき 整数解 } x=0 \end{array} \right.$$

2次方程式 $x^2 + mx + 8 = 0$ の解が有理数となる自然数 m の値をすべて求めよ。

(2011 東邦大)

$$x^2 + mx + 8 = 0$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 32}}{2}$$

これが有理数 となるためには

$$\sqrt{m^2 - 32} = N \quad (N \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

となるとよい。

両辺 2乗して

$$m^2 - 32 = N^2$$

$$m^2 - N^2 = 32$$

$$(m+N)(m-N) = 32$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ここで} \\ (m+N) - (m-N) = 2N \ (\geq 0) \\ \text{なので} \\ \left\{ \begin{array}{l} m+N \geq m-N \\ m+N \text{ と } m-N \text{ の偶奇は一致する。} \end{array} \right. \\ \text{また、} \\ m > 0, N \geq 0 \text{ なので} \\ m+N > 0 \end{array} \right.$$

$m+N$	16	8
$m-N$	2	4

$$(m, N) = (9, 7), (6, 2)$$

$$\text{よって } \underline{\underline{m = 9, 6}}$$

m を整数とする。3次方程式 $x^3 + mx^2 + (m+8)x + 1 = 0$ は有理数の解 α をもつ。

(1) α は整数であることを示せ。

(2) m を求めよ。

(2016 一橋大)

(1) (証明)

$\alpha \in \mathbb{Q}$ とおく

$$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な整数, } p > 0)$$

とできる。

このとき

$$\alpha^3 + m\alpha^2 + (m+8)\alpha + 1 = 0$$

$$\frac{q^3}{p^3} + \frac{mq^2}{p^2} + \frac{(m+8)q}{p} + 1 = 0$$

$$\frac{q^3}{p} + mq^2 + (m+8)pq + p^2 = 0$$

$$\frac{q^3}{p} = -mq^2 - (m+8)pq - p^2$$

ここで

右辺は整数なので、左辺も整数

よって、 $p = 1$

つまり、 α は整数である。

$$\alpha = \frac{-n-9 \pm \sqrt{(n+9)^2 - 4n}}{2n}$$

$$= \frac{-n-9 \pm \sqrt{n^2 + 14n + 81}}{2n}$$

これが整数 となるためには

$$\sqrt{n^2 + 14n + 81} = N \quad (N \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

となることが必要

両辺 2乗して

$$n^2 + 14n + 81 = N^2$$

$$(n+7)^2 + 32 = N^2$$

$$(n+7)^2 - N^2 = -32$$

$$(n+7+N)(n+7-N) = -32$$

ここで

$$(n+7+N) - (n+7-N) = 2N \geq 0$$

より

$$n+7+N \geq (n+7-N)$$

$$n+7+N \text{ と } n+7-N \text{ の偶奇は一致する}$$

$n+7+N$	/6	8
$n+7-N$	-2	-4

$$(n, N) = (0, 9), (-5, 6)$$

$n \neq 0$ とおく

$$(n, N) = (-5, 6)$$

このとき

$$\alpha = \frac{5-9 \pm 6}{-10}$$

$$= \frac{-4 \pm 6}{-10} = -\frac{1}{5}, 1$$

$$\alpha \in \mathbb{Z} \text{ とおく} \quad \alpha = 1$$

このとき

$$m = \frac{-1-8-1}{1+1} = \frac{-10}{2}$$

$$= -5$$

(裏に続く)

(2) 解法1

$$\alpha^3 + m\alpha^2 + (m+8)\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha^2 + \alpha)m = -\alpha^3 - 8\alpha - 1$$

$$m = \frac{-\alpha^3 - 8\alpha - 1}{\alpha^2 + \alpha}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -8 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 0 & \\ \hline & & & 1 & -8 & -1 & \\ & & & 1 & 1 & 0 & \\ \hline & & & & & -9 & -1 \end{array} \right)$$

$$m = -\alpha + 1 + \frac{-9\alpha - 1}{\alpha^2 + \alpha}$$

$m, \alpha \in \mathbb{Z}$ とおく

$\alpha^2 + \alpha$ は $-9\alpha - 1$ の約数 である。

$$-9\alpha - 1 = h(\alpha^2 + \alpha)$$

$$h\alpha^2 + (h+9)\alpha + 1 = 0$$

$h \neq 0$ とおく

(2) 解法2

$$x^3 + mx^2 + (m+8)x + 1 = 0$$

$$x(x^2 + mx + m+8) = -1$$

$$x, m \in \mathbb{Z} \quad \text{とある}$$

$$(i) \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + mx + m+8 = -1 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + mx + m+8 = 1 \end{cases}$$

の1つは成り立たない。

(i) $x=1$ のとき

$$x=1 \text{ より}$$

$$1 + m + m + 8 = -1$$

$$2m = -10$$

$$m = -5$$

(ii) $x=-1$ のとき

$$x=-1 \text{ より}$$

$$1 - m + m + 8 = 1$$

$$9 = 1$$

これは不合理

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{m = -5}}$$

(1) 不等式 $|3x+2| < x^2+x+1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。(2) $\frac{3n+2}{n^2+n+1}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2015 学習院大)

(i)

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であり、両辺とも0以上なので
2乗してよい。

$$|3x+2|^2 < (x^2+x+1)^2$$

$$(x^2+x+1)^2 - (3x+2)^2 > 0$$

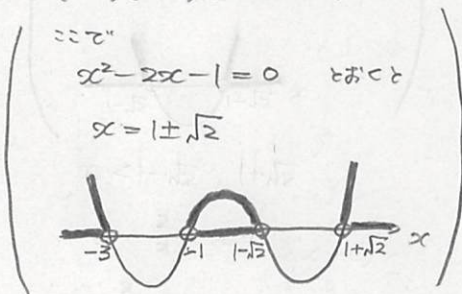
$$(x^2+4x+3)(x^2-2x-1) > 0$$

$$(x+1)(x+3)(x^2-2x-1) > 0$$

ここで

$$x^2-2x-1=0 \quad \text{とおく}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$



$$\underline{x < -3, -1 < x < 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} < x}$$

(iii) $n = -1$ のとき

$$(\text{与式}) = \frac{-3+2}{1-1+1} = -1$$

(iv) $n = 0$ のとき

$$(\text{与式}) = \frac{2}{1} = 2$$

(v) $n = 1$ のとき

$$(\text{与式}) = \frac{3+2}{1+1+1} = \frac{5}{3}$$

(vi) $n = 2$ のとき

$$(\text{与式}) = \frac{6+2}{4+2+1} = \frac{8}{7}$$

(i) ~ (vi) より

$$\underline{n = -3, -1, 0}$$

(2)

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \text{ が整数 となるためには}$$

$$n^2+n+1 > 0 \quad \text{なので}$$

$$|3n+2| \geq n^2+n+1$$

となることを必要

(i) より

$$-3 \leq n \leq -1, 1-\sqrt{2} \leq n \leq 1+\sqrt{2}$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{なので}$$

$$n = -3, -2, -1, 0, 1, 2 \quad (\text{必要})$$

(ii) $n = -3$ のとき

$$(\text{与式}) = \frac{-9+2}{9-3+1} = \frac{-7}{7} = -1$$

(iii) $n = -2$ のとき

$$(\text{与式}) = \frac{-6+2}{4-2+1} = \frac{-4}{3}$$

x, y を自然数とする。

- (1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。
- (2) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ。

(2016 北海道大)

(1)

$$\frac{3x}{x^2+2} \geq 1 \quad \text{より}$$

$$3x \geq x^2 + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$(x-1)(x-2) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 2$$

 x は自然数 なので $x=1, 2$ (i) $x=1$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{となり 通ずる。}$$

(ii) $x=2$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{となり 通ずる。}$$

(i), (ii) より

$$\underline{x=1, 2}$$

(2) **解法1**

$$[1] \quad \frac{3x}{x^2+2} \geq 1 \quad \text{のとき}$$

(つまり $x=1, 2$ のとき)

$$\frac{3x}{x^2+2} = 1 \quad \text{となり 自然数 なのだ}$$

 $\frac{1}{y}$ が自然数 となることが必要よって $(x, y) = (1, 1), (2, 1)$

$$[2] \quad \frac{3x}{x^2+2} < 1 \quad \text{のとき}$$

(つまり $x=3, 4, 5, \dots$ のとき) $\frac{3x}{x^2+2}$ は自然数 ではないのだ $\frac{1}{y}$ も自然数 ではないことが必要

よって

$$y \geq 2 \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \quad \text{なのだ}$$

$$\frac{3x}{x^2+2} \geq \frac{1}{2} \quad \text{であることが必要}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ \frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1 \quad \text{である} \end{array} \right)$$

$$6x \geq x^2 + 2$$

$$x^2 - 6x + 2 \leq 0$$

$$3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}$$

$$x=3, 4, 5, \dots \quad \text{なのだ}$$

$$x=3, 4, 5$$

(i) $x=3$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{9}{11} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{11}$$

$$y = \frac{11}{2}$$

 y は自然数 であることに不合理(ii) $x=4$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{12}{18} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$y=3$$

(iii) $x=5$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{15}{27} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{9}{4}$$

 y は自然数 であることに不合理

(i) ~ (iii) より

$$(x, y) = (4, 3)$$

[1], [2] より

$$\underline{(x, y) = (1, 1), (2, 1), (4, 3)}$$

解法2

[1] $x=1, 2$ のとき

(1) から $\frac{3x}{x^2+2} = 1$ となる。

よって $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数 となる時

$$y=1$$

∴ x のとき

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 2 \quad \text{となる}$$

(したがって)

$$(x, y) = (1, 1), (2, 1)$$

[2] $x \geq 3$ のとき

$$x^2 = x \cdot x \geq 3x \quad \text{より}$$

$$x^2 + 2 \geq 3x + 2 > 3x \quad \text{となるから}$$

$$0 < \frac{3x}{x^2+2} < 1$$

また, $y \geq 1$ より $0 < \frac{1}{y} \leq 1$ となるから

$$0 < \frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} < 2$$

(したがって)

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} \text{ が自然数 となる時}$$

$$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\text{よって } \frac{1}{y} = 1 - \frac{3x}{x^2+2}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2 + 2} > 0$$

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= 1 + \frac{3x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= 1 + \frac{3x}{(x-1)(x-2)}$$

∴ y が自然数 となるには

$$\frac{3x}{(x-1)(x-2)} \leq 1$$

$$3x \leq x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 6x + 2 \leq 0$$

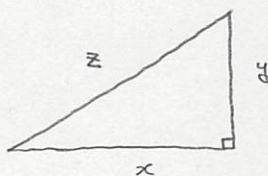
$$3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}$$

(これは 解法1 と同様)

直角三角形の3辺の長さがすべて整数のとき、面積は2の整数倍であることを示せ。

(一橋大)

証明

図のように3辺の長さ x, y, z とおくと、

三平方の法則より

$$x^2 + y^2 = z^2$$

が成り立っている。

一般に、整数 n に対して

$$\begin{cases} n = 2k & \text{のとき} & n^2 = 4k^2 \\ n = 2k+1 & \text{のとき} & n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ & & = 4(k^2 + k) + 1 \end{cases}$$

(ただし、 k は整数)

が成り立つので

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{4} \\ z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4} \end{cases}$$

ゆえに

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ を満たす } x \text{ は}$$

$$(i) \ x^2 + y^2 = z^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$(ii) \ x^2 + y^2 = z^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

のいずれかである。

(i) のとき

$$x \equiv 0, y \equiv 0, z \equiv 0 \pmod{2}$$

の場合を考えるとき

$$x = 2a, y = 2b \quad (a, b \text{ は整数})$$

とできる。

このとき面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}xy \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b \\ &= 2ab \end{aligned}$$

となり、2の整数倍である。

(ii) のとき

 x と y の対称性から

$$x \equiv 0, y \equiv 1, z \equiv 1 \pmod{2}$$

としてよく

$$x = 2a, y = 2b+1, z = 2c+1$$

 $(a, b, c \text{ は整数})$

とできる。

このとき

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ より}$$

$$4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 = 4c^2 + 4c + 1$$

$$a^2 + b^2 + b = c^2 + c$$

$$a^2 + b(b+1) = c(c+1)$$

 $b(b+1), c(c+1)$ はともに

連続する2整数の積なので

2の倍数である。

ゆえに

$$\begin{aligned} a^2 &= c(c+1) - b(b+1) \\ &= (2\alpha\text{の倍数}) - (2\alpha'\text{の倍数}) \\ &= (2\alpha''\text{の倍数}) \end{aligned}$$

なので a は2の倍数である。つまり x は4の倍数である。

このとき

$$x = 4a', y = 2b+1 \quad (a', b \text{ は整数})$$

とできる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}xy \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a' \cdot (2b+1) \\ &= 2a'(2b+1) \end{aligned}$$

となり、2の整数倍である。

(i), (ii) より

面積は2の整数倍である。 ■

xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。

(1) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2) a, b は実数で $a \neq 0$ とする。 $y = ax^2 + bx$ のグラフ上に、点 $(0, 0)$ 以外に格子点が2つ存在すれば、無限個存在することを示せ。

(2010 名古屋大)

(1) (証明)

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{において}$$

$$x = 6k \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{とすると}$$

$$y = \frac{1}{3} \times 36k^2 + \frac{1}{2} \times 6k$$

$$= 12k^2 + 3k \quad \text{は整数}$$

よって 点 $(6k, 12k^2 + 3k)$ は格子点 となり

無限個存在 する。

$$y = (x_2 y_1 - x_1 y_2) x_1 x_2 (x_1 - x_2) + (x_1^2 y_2 - x_2^2 y_1)$$

は 整数

よって 格子点 は 無限個存在 する。

(2) (証明)

$$y = ax^2 + bx \quad \text{上の } 2 \text{ つの 格子点}$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \quad (x_1 \neq x_2) \quad \text{とすると}$$

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 & \text{--- ①} \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} \times x_2 \quad x_2 y_1 = ax_1^2 x_2 + bx_1 x_2$$

$$\text{②} \times x_1 \quad \rightarrow x_1 y_2 = ax_1 x_2^2 + bx_1 x_2$$

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = ax_1 x_2 (x_1 - x_2)$$

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2 \quad \text{だから}$$

$$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}$$

$$\text{①} \times x_2^2 \quad x_2^2 y_1 = ax_1^2 x_2^2 + bx_1 x_2^2$$

$$\text{②} \times x_1^2 \quad \rightarrow x_1^2 y_2 = ax_1^2 x_2^2 + bx_1^2 x_2$$

$$x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2 = bx_1 x_2 (x_2 - x_1)$$

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2 \quad \text{だから}$$

$$b = \frac{x_1^2 y_2 - x_2^2 y_1}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx \\ &= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} x^2 + \frac{x_1^2 y_2 - x_2^2 y_1}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} x \end{aligned}$$

において

$$x = x_1 x_2 (x_1 - x_2) k \quad (k \text{ は整数})$$

とすると。