

$m, n (m < n)$ を自然数とし, $a = n^2 - m^2$, $b = 2mn$, $c = n^2 + m^2$ とおく。3 辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし, その三角形の面積を S とする。

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ。
- (2) r を m, n を用いて表せ。
- (3) r が素数のとき, S を r を用いて表せ。
- (4) r が素数のとき, S が 6 で割り切れることを示せ。

(2014 神戸大)

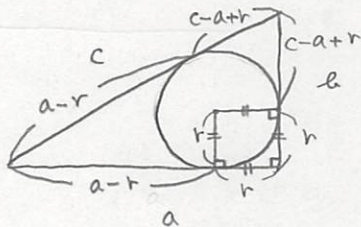
(1) (証明)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= n^4 - 2m^2n^2 + m^4 + 4m^2n^2 \\ &= n^4 + 2m^2n^2 + m^4 \\ &= (n^2 + m^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

よって, 与等式は成り立つ。■

(2)

(i) よし, 三平方の組 a, b, c の逆から与えられた三角形は c を斜辺の長さにもつ直角三角形である。



上図より

$$\begin{aligned} (c - a + r) + r &= b \\ 2r &= a + b - c \\ r &= \frac{1}{2} (n^2 - m^2 + 2mn - n^2 - m^2) \\ &= \frac{1}{2} (2mn - 2m^2) \\ &= \underline{\underline{m(n - m)}} \end{aligned}$$

(3)

$$r = m(n - m)$$

すなわち, r が素数のとき

$$(i) \begin{cases} m = 1 \\ n - m = r \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} m = r \\ n - m = 1 \end{cases}$$

のいずれかである。

(i) a のとき

$$m = 1 \quad \text{よし}$$

$$n - 1 = r$$

$$n = r + 1$$

このとき

$$a = (r + 1)^2 - 1$$

$$= r^2 + 2r$$

$$= r(r + 2)$$

$$b = 2(r + 1)$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} r(r + 2) \times 2(r + 1) \\ &= r(r + 1)(r + 2) \end{aligned}$$

(ii) a のとき

$$m = r \quad \text{よし}$$

$$n - r = 1$$

$$n = r + 1$$

このとき

$$a = (r + 1)^2 - r^2$$

$$= 2r + 1$$

$$b = 2r(r + 1)$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (2r + 1) \times 2r(r + 1) \\ &= r(r + 1)(2r + 1) \end{aligned}$$

(i), (ii) よし

$$S = \begin{cases} r(r + 1)(r + 2) \\ r(r + 1)(2r + 1) \end{cases}$$

(裏に続く)

(3) (証明)

(i) $S = r(r+1)(r+2)$ α とす

r が素数 α とす

$r(r+1)(r+2)$ は 連続3整数の積

なので $3! = 6$ の倍数 である。

(ii) $S = r(r+1)(r+2)$

$$= r(r+1)\{(r+2)+(r-1)\}$$

$$= r(r+1)(r+2) + (r-1)r(r+1) \quad \alpha \text{ とす}$$

r が素数 α とす

$r(r+1)(r+2)$ と $(r-1)r(r+1)$ はともに

連続3整数の積 である $3! = 6$ の倍数
である。

(i), (ii) ともに

S は 6 で割り切れる。 ■

整数 n がある整数の2乗で表されるとき、 n は平方数であるという。2つの平方数の和で表される整数全体の集合を A とする。例えば、 $0=0^2+0^2$ より $0 \in A$ であり、また、 $13=2^2+3^2$ より $13 \in A$ である。

(1) 整数 a, b, x, y に対して、等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

が成り立つことを示せ。

(2) 2つの整数 α, β が A の要素であるとき、積 $\alpha\beta$ は A の要素であることを示せ。

(3) 25, 50, 1250 のそれぞれが A の要素であることを示せ。

(2017 静岡大)

(1) (証明)

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \\ &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ &= (a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2)y^2 \\ &= (a^2+b^2)(x^2+y^2) = \text{(左辺)} \end{aligned}$$

よて、

与等式は成り立つ。 ■

(4) 250 について。

$25 \in A, 50 \in A$ であり。

$1250 = 25 \times 50$ を満たすので

$1250 \in A$ である。 ■

(2) (証明)

$\alpha, \beta \in A$ である。

$$\alpha = a^2 + b^2, \quad \beta = x^2 + y^2$$

を満たす $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する。

このとき、(1)より

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (a^2+b^2)(x^2+y^2) \\ &= (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \in A \end{aligned}$$

よて

$\alpha\beta \in A$ である。 ■

(3) (証明)

(ア) 25 について。

$$5 = 1^2 + 2^2 \in A \text{ であり。}$$

$$25 = 5 \times 5 \text{ を満たすので}$$

$$25 \in A \text{ である。}$$

(イ) 50 について。

$$5 \in A, 10 = 1^2 + 3^2 \in A \text{ であり。}$$

$$50 = 5 \times 10 \text{ を満たすので}$$

$$50 \in A \text{ である。}$$

n を 2 以上の整数としたとき、 n 進法で表された 4 桁の数 $abcd_{(n)}$ のうち、 $a=d \neq 0$ かつ $b=c$ であるものを、 n 進法の 4 桁回文と呼ぶ。

- (1) 2 進法の 4 桁回文をすべて 10 進法で表せ。
- (2) 3 進法の 4 桁回文をすべて 10 進法で表せ。
- (3) 9 進法の 4 桁回文の個数を求めよ。
- (4) 4 進法の 4 桁回文すべての最大公約数を求めよ。
- (5) n 進法の 4 桁回文はすべて $n+1$ で割り切れることを示せ。

(2017 滋賀大)

(1)

 $a b b a_{(2)}$ ($a \neq 0$) で考えよ。 $a=1$; $b=0, 1$ であるので $1001_{(2)}, 1111_{(2)}$ の 2 個 である。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1001_{(2)} = 8+1=9 \\ 1111_{(2)} = 8+4+2+1=15 \end{array} \right.$$

よ)

9, 15

(4)

$$a b b a_{(4)} = 64a + 16b + 4b + a$$

$$= 65a + 20b$$

$$= 5(13a + 4b)$$

で

$$1001_{(4)} = 64+1=65=5 \times 13$$

$$1111_{(4)} = 64+16+4+1=85=5 \times 17$$

よ) 最大公約数 = 5

(2)

 $a b b a_{(3)}$ ($a \neq 0$) で考えよ。 $a=1, 2$; $b=0, 1, 2$ で $1001_{(3)}, 1111_{(3)}, 1221_{(3)},$ $2002_{(3)}, 2112_{(3)}, 2222_{(3)}$

の 6 個 である。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1001_{(3)} = 27+1=28 \\ 1111_{(3)} = 27+9+3+1=40 \\ 1221_{(3)} = 27+18+6+1=52 \\ 2002_{(3)} = 54+2=56 \\ 2112_{(3)} = 54+9+3+2=68 \\ 2222_{(3)} = 54+18+6+2=80 \end{array} \right.$$

よ)

28, 40, 52, 56, 68, 80

(5) (証明)

$$a b b a_{(n)} = an^3 + bn^2 + bn + a$$

$$= a(n^3+1) + b(n^2+n)$$

$$= a(n+1)(n^2-n+1) + bn(n+1)$$

$$= (n+1)(an^2 - an + a + bn)$$

となり。

 $n+1$ で割り切れる。 ■

(3)

 $a=1, 2, \dots, 8$; $b=0, 1, 2, \dots, 8$

となる

$$8 \times 9 = \underline{72 \text{ (個)}}$$

次の2つの方程式を考える。

(2011 三重大)

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots\dots ①, \quad s^2 + t^2 = u^2 + 1 \quad \dots\dots ②$$

(1) 実数 a, b に対し実数 a^*, b^* を $a^* = a + b, b^* = 2a + b + 1$ で定める。 $(x, y, z) = (a, a+1, b)$ が ① の解ならば $(s, t, u) = (a^*, a^*+1, b^*)$ は ② の解であることを示せ。また、逆に $(s, t, u) = (a, a+1, b)$ が ② の解ならば $(x, y, z) = (a^*, a^*+1, b^*)$ は ① の解であることを示せ。(2) 方程式 ① の自然数解 (x, y, z) をピタゴラス数という。 $y = x + 1$ を満たすピタゴラス数を3組あげよ。

(1) (証明)

①

 $(x, y, z) = (a, a+1, b)$ が ① の解 a とし。

$$a^2 + (a+1)^2 = b^2$$

$$2a^2 + 2a + 1 = b^2$$

このとき

$$a^{*2} + (a^*+1)^2$$

$$= (a+b)^2 + (a+b+1)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2a + b^2 + 1 + 2ab + 2b + 2a$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 4ab + 2a + 2b + 1$$

$$= 2a^2 + 2(2a^2 + 2a + 1) + 4ab + 2a + 2b + 1$$

$$= 6a^2 + 4ab + 6a + 2b + 3$$

$$b^{*2} + 1$$

$$= (2a+b+1)^2 + 1$$

$$= 4a^2 + b^2 + 1 + 4ab + 2b + 4a + 1$$

$$= 4a^2 + (2a^2 + 2a + 1) + 4ab + 4a + 2b + 2$$

$$= 6a^2 + 4ab + 6a + 2b + 3$$

よって

$$a^{*2} + (a^*+1)^2 = b^{*2} + 1 \quad \text{が成り立つ。}$$

つまり

$$(s, t, u) = (a^*, a^*+1, b^*) \text{ は ② の解である。}$$

②

 $(s, t, u) = (a, a+1, b)$ が ② の解 a とし

$$a^2 + (a+1)^2 = b^2 + 1$$

$$a^2 + a^2 + 2a + 1 = b^2 + 1$$

$$2a^2 + 2a = b^2$$

このとき

$$a^{*2} + (a^*+1)^2$$

$$= (a+b)^2 + (a+b+1)^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 4ab + 2a + 2b + 1$$

$$= 2a^2 + 2(2a^2 + 2a) + 4ab + 2a + 2b + 1$$

$$= 6a^2 + 4ab + 6a + 2b + 1$$

$$b^{*2} = (2a+b+1)^2$$

$$= 4a^2 + b^2 + 1 + 4ab + 2b + 4a$$

$$= 4a^2 + (2a^2 + 2a) + 1 + 4ab + 2b + 4a$$

$$= 6a^2 + 4ab + 6a + 2b + 1$$

よって

$$a^{*2} + (a^*+1)^2 = b^{*2} \quad \text{が成り立つ。}$$

つまり

$$(x, y, z) = (a^*, a^*+1, b^*) \text{ は ① の解である。}$$

(2)

① の解 の 1 つ は

$$(x, y, z) = (3, 4, 5) \quad \text{である。}$$

(1) で $a = 3, b = 5$ とおく。

$$a^* = 3 + 5 = 8$$

$$b^* = 6 + 5 + 1 = 12 \quad \text{であり。}$$

$$(s, t, u) = (8, 9, 12) \quad \text{が ② の解である。}$$

改めて $a = 8, b = 12$ とおくと

$$a^* = 8 + 12 = 20$$

$$b^* = 16 + 12 + 1 = 29 \quad \text{であり。}$$

$$(x, y, z) = (20, 21, 29) \text{ は ① の解である。}$$

同じ操作を繰り返す。

$$a = 20, b = 29 \quad \text{とおくと}$$

$$a^* = 20 + 29 = 49$$

$$b^* = 40 + 29 + 1 = 70 \quad \text{であり。}$$

$$(s, t, u) = (49, 50, 70) \text{ は ② の解である。}$$

改めて $a = 49, b = 70$ とおくと

$$a^* = 49 + 70 = 119$$

$$b^* = 98 + 70 + 1 = 169 \quad \text{であり。}$$

$$(x, y, z) = (119, 120, 169) \text{ は ① の解である。}$$

よって

$$(x, y, z) = (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169)$$

- (1) a, b を $a < b$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ を満たす任意の自然数とすると、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の最大値が $\frac{5}{6}$ であることを証明せよ。
- (2) a, b, c を $a < b < c$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ を満たす任意の自然数とすると、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ の最大値が $\frac{41}{42}$ であることを証明せよ。

(2006 富山大)

(1)

 $1 \leq a < b$ であり、 $a=1$ とすると

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 + \frac{1}{b} > 1 \quad \text{となり}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \quad \text{に不合理的}$$

$$a=2 \quad \text{とすると} \quad b \geq 3 \quad \left(\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \text{Max} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{5}{6} \quad (a=2, b=3 \text{ とき})$$

$$[2] \quad a \geq 3 \text{ とき} \quad b \geq 4, c \geq 5$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} (< 1)$$

$$(\text{等号成立は } a=3, b=4, c=5 \text{ とき})$$

[1], [2] において、

$$\frac{41}{42} > \frac{19}{20} > \frac{47}{60} \quad \text{であるから}$$

$$\text{Max} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{41}{42} \quad (a=2, b=3, c=7 \text{ とき})$$

(2)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{だから}$$

$$(i) \text{ として} \quad a \geq 2 \quad \text{としよう。}$$

$$[1] \quad a=2 \text{ とき} \quad b \geq 3$$

$$(i) \quad b=3 \text{ とき} \quad c \geq 4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{c} < 1 \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{6}$$

$$6 < c$$

$$\text{よって} \quad c \geq 7 \quad \text{であり、}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{6} + \frac{1}{c} \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

$$(\text{等号成立は } c=7 \text{ とき})$$

$$(ii) \quad b \geq 4 \text{ とき} \quad c \geq 5$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} (< 1)$$

$$(\text{等号成立は } b=4, c=5 \text{ とき})$$

次の条件(A), (B)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(A) N の正の約数は12個。

(B) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき、7番目の数は12。

ただし、 N の約数には1と N も含める。

(2017 東京工業大)

$$12 = 2^2 \times 3 \quad \text{なので}$$

(B) より N は 2 と 3 を素因数としてもち。

素因数 2 の指数は 2 以上である。

い) N が 2 と 3 だけを素因数にもつとき

$$N = 2^a \times 3^b \quad (a \geq 2, b \geq 1)$$

$$(A) \text{ より } (a+1)(b+1) = 12.$$

$$a \geq 2, b \geq 1 \text{ より } a+1 \geq 3, b+1 \geq 2.$$

$a+1$	3	4	6
$b+1$	4	3	2

$$(a, b) = (2, 3), (3, 2), (5, 1).$$

$$(i) (a, b) = (2, 3) \text{ のとき}$$

$$N = 2^2 \times 3^3 = 108$$

約数を小さい順に並べると。

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, \dots$$

となり (B) を満たす。

$$(ii) (a, b) = (3, 2) \text{ のとき}$$

$$N = 2^3 \times 3^2 = 72$$

約数を小さい順に並べると

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \dots$$

となり (B) に不合理

$$(iii) (a, b) = (5, 1) \text{ のとき}$$

$$N = 2^5 \times 3 = 96$$

約数を小さい順に並べると

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, \dots$$

となり (B) を満たす。

(iv) N が 2 と 3 と もう一つ素因数をもつとき

$$N = 2^a \times 3^b \times p^c$$

($a \geq 2, b \geq 1, c \geq 1$, p は 5 以上の素数)

このとき

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 3 \times 2 \times 2 = 12$$

等号成立は $a=2, b=1, c=1$ のとき

(A) より

$$N = 2^2 \times 3 \times p$$

この約数は

$$1, 2, 3, 4, 6, 12, p, 2p, 3p, 4p, 6p, 12p$$

よって

$$p < 2p < 3p < 4p < 6p < 12p \quad \text{なので}$$

(B) より

$$p < 12 < 2p \quad \text{なので}$$

$$6 < p < 12.$$

p は素数なので $p = 7, 11$

$p = 7$ のとき

$$N = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

$p = 11$ のとき

$$N = 2^2 \times 3 \times 11 = 132$$

(v) N が素因数 2 と 3 と さらに 2 以上もつとすると。

(A) を満たすことはない。

(i) ~ (iii) より

$$\underline{N = 84, 96, 108, 132}$$

自然数 a の正の約数の中で a 以外のものの和が a に等しいとき、 a を完全数という。

- (1) 28 が完全数であることを示せ。
 (2) 自然数 n と素数 p に対して、 $2^{n-1}p$ のすべての正の約数の和を n と p で表せ。ただし、 $p \neq 2$ とする。
 (3) n は $2^n - 1$ が素数であるような自然数とする。このとき、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ が完全数であることを示せ。
 (4) a が偶数で完全数ならば、ある自然数 n に対して $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ と表されることを示せ。 (2015 明治大)

(1) (証明)

28 の正の約数の総和は

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

となるので

28 は完全数である。 ■

(2)

$2^{n-1}p$ の正の約数の総和は

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})(1 + p)$$

$$= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} \times (1 + p)$$

$$= \underline{\underline{(2^n - 1)(p + 1)}}$$

(3) (証明)

$2^n - 1$ は素数なので

(2) で $p = 2^n - 1$ としよ。

このとき、約数の総和は

$$(2^n - 1)(2^n - 1 + 1)$$

$$= (2^n - 1) \cdot 2^n$$

ゆえに

$$(2^n - 1) \cdot 2^n - 2^{n-1}(2^n - 1)$$

$$= (2^n - 2^{n-1})(2^n - 1)$$

$$= 2^{n-1}(2 - 1)(2^n - 1)$$

$$= 2^{n-1}(2^n - 1)$$

となり

$2^{n-1}(2^n - 1)$ は完全数である。 ■

(4) 証明 1

a が偶数のとき

$$a = 2^{n-1}p \quad (p \text{ は奇数}) \quad \text{とできる}$$

① $p = 1$ のとき

$a = 2^{n-1}$ の正の約数の中で a 以外のものの和は

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} = \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$$

となり完全数ではない。

② $p \geq 3$ のとき

(a の正の約数の中で a 以外のものの和)
 $- a - a$

$$\geq (2^n - 1)(p + 1) - 2 \times 2^{n-1}p$$

$$= (2^n - 1)(p + 1) - 2^n p$$

$$= 2^n - p - 1$$

a が完全数のとき

等号が成立し、かつ $2^n - p - 1 = 0$ である。

つまり

$$p \text{ が素数 かつ } 2^n - p - 1 = 0$$

よって

$p = 2^n - 1$ が素数 となる n とすると

$$a = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

(i), (ii) より

$2^n - 1$ が素数 となる n に対して

$$a = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

証明2

$a = 2^N k$ (N は自然数, k は奇数)

とできる.

また, a の正の約数の総和を $S(a)$ とおくと,
 a は完全数 なので,

$$S(a) = 2a = 2 \cdot 2^N k = 2^{N+1} k \quad \text{--- ①}$$

一方, 2^N と k は互いに素なので

$$\begin{aligned} S(a) &= S(2^N k) = S(2^N) S(k) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^N) S(k) \\ &= \frac{1(2^{N+1} - 1)}{2 - 1} S(k) \\ &= (2^{N+1} - 1) S(k) \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

①, ② より

$$2^{N+1} k = (2^{N+1} - 1) S(k) \quad \text{--- ③}$$

よて, $(2^{N+1} - 1) S(k)$ は素因数分解すると

素因数 2 は $N+1$ 個含むが, $2^{N+1} - 1$ は奇数
 であるから

$$S(k) = 2^{N+1} l \quad (l \text{ は奇数}) \quad \text{--- ④}$$

と表される.

このとき ③ より

$$\begin{aligned} 2^{N+1} k &= (2^{N+1} - 1) \cdot 2^{N+1} l \\ k &= (2^{N+1} - 1) l \quad \text{--- ⑤} \end{aligned}$$

ここで

$l \neq 1$ と仮定すると.

$1, l, (2^{N+1} - 1)l$ は k の異なる

正の約数 であるから

$$\begin{aligned} S(k) &\geq 1 + l + (2^{N+1} - 1)l = 2^{N+1} l + 1 \\ &= S(k) + 1 \end{aligned}$$

となり, 矛盾する.

ゆえに, $l = 1$ であり, ④, ⑤ より

$$\begin{cases} S(k) = 2^{N+1} \\ k = 2^{N+1} - 1 \end{cases}$$

したがって,

$$a = 2^N (2^{N+1} - 1) \quad (N \text{ は自然数})$$

以上から,

a が偶数で完全数 ならば,

2 以上の自然数 n を用いて

$$a = 2^{n-1} (2^n - 1)$$

と表される.