

3桁の自然数について、次の個数を求めよ。

- (1) 3かつ5の倍数
 (2) 3または5の倍数
 (3) 15と互いに素であるもの

(1)

$$(3 \text{かつ} 5 \text{の倍数}) = (15 \text{の倍数})$$

であり、3桁となる n は

$$\{ \underset{105}{15 \times 7}, 15 \times 8, \dots, \underset{990}{15 \times 66} \}$$

なので

$$66 - 6 = \underline{\underline{60 \text{ (個)}}}$$

(2)

3の倍数は

$$\{ \underset{102}{3 \times 34}, 3 \times 35, \dots, \underset{999}{3 \times 333} \}$$

なので

$$333 - 33 = 300 \text{ (個)}$$

5の倍数は

$$\{ \underset{100}{5 \times 20}, 5 \times 21, \dots, \underset{995}{5 \times 199} \}$$

なので

$$199 - 19 = 180 \text{ (個)}$$

	B: 5の倍数	$\bar{B}$	計
A: 3の倍数	60	240	300
$\bar{A}$	120	480	600
計	180	720	900

表より

$$900 - 480 = \underline{\underline{420 \text{ (個)}}}$$

(3)

15と互いに素の集合は

$$\bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{で表される}$$

表より

$$\underline{\underline{480 \text{ (個)}}}$$

[2018スタンダードⅡAB受 基本問題40]

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の7個の数字から異なる4個の数字を選んで並べ、4桁の整数を作るとき、3600 より大きい奇数は何個できるか。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & & & \begin{smallmatrix} 1,3 \\ 5 \end{smallmatrix} \\ \hline \end{array}$$

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (個)}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & & & \begin{smallmatrix} 1,3 \\ 5 \end{smallmatrix} \\ \hline \end{array}$$

$$5 \times 4 \times 2 = 40 \text{ (個)}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \begin{smallmatrix} 1,3 \\ 5 \end{smallmatrix} \\ \hline \end{array}$$

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (個)}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 6 & & \begin{smallmatrix} 1,5 \\ 5 \end{smallmatrix} \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 2 = 8 \text{ (個)}$$

∴

$$60 + 40 + 60 + 8 = \underline{\underline{168 \text{ (個)}}}$$

異なる7冊の本から、1冊以上何冊でも好きなだけ取り出す方法は何通りあるか。

解法1

$$\begin{aligned}
 & {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3 + {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 \\
 &= 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 \\
 &= \underline{\underline{127 \text{ (通り)}}}
 \end{aligned}$$

解法2

a, b, c, d, e, f, g の7冊 それぞれ
 に取り出すか 取り出さないかを考えるとよい。
 ただし、すべて取り出さないことを除くと

$$2^7 - 1 = \underline{\underline{127 \text{ (通り)}}}$$

女子6人、男子3人が次のように並ぶ方法はそれぞれ何通りあるか。

- (1) 男子3人が続いて並ぶように、この9人が1列に並ぶ。
- (2) 両端が男子になるように、この9人が1列に並ぶ。
- (3) 男子がどの2人も隣り合わないように、この9人が円形に並ぶ。

(2012 日本女子大)

(1)

男子3人をまとめて1人とみなすと

女子を含めた7人の並び方は $7!$ (通り)

男子3人の中の並び方は $3!$ (通り)

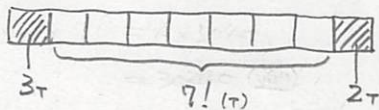
よって

$$\begin{aligned} 7! \times 3! &= 5040 \times 6 \\ &= \underline{\underline{30240}} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

(2)

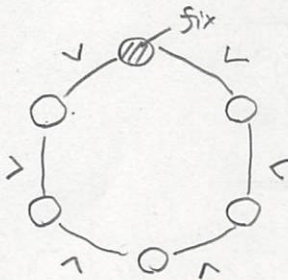
両端の男子の並び方は 3×2 (通り)

残り7人の並び方は $7!$ (通り)



$$\begin{aligned} 3 \times 2 \times 7! &= 6 \times 5040 \\ &= \underline{\underline{30240}} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

(3)



女子6人を円形に並べる方法は $5!$ (通り)

男子はできた女子の間に並べると

$$6 \times 5 \times 4 \text{ (通り)}$$

よって

$$\begin{aligned} 5! \times 6 \times 5 \times 4 &= 120 \times 120 \\ &= \underline{\underline{14400}} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

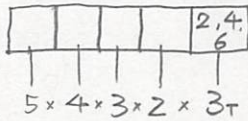
6個の数字1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる5個の数字を並べて5桁の整数を作るとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2の倍数の個数と3の倍数の個数をそれぞれ求めよ。
 (2) 6の倍数の個数を求めよ。
 (3) 30と互いに素である整数の個数を求めよ。

(2016 滋賀大)

(1)

<2の倍数>



1の位が 2, 4, 6 の3通り

それぞれに対して、他の位は任意なので

 $5 \times 4 \times 3 \times 2$ (通り)

よて

$$3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = \underline{\underline{360 \text{ (個)}}}$$

<3の倍数>

各位の数字の和が3の倍数となるとよい。

$$1+2+3+4+5+6=21$$

なので

3 or 6 のどちらかを用いなければよい。

1, 2, 4, 5, 6 を並べるとき $5!$ (通り)1, 2, 3, 4, 5 を並べるとき $5!$ (通り)

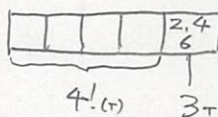
よて

$$5! + 5! = \underline{\underline{240 \text{ (個)}}}$$

(2)

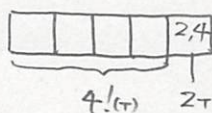
2の倍数かつ3の倍数となるとよく。

1, 2, 4, 5, 6 を並べるとき



$$3 \times 4! = 3 \times 24 = 72 \text{ (個)}$$

1, 2, 3, 4, 5 を並べるとき



$$2 \times 4! = 2 \times 24 = 48 \text{ (個)}$$

よて

$$72 + 48 = \underline{\underline{120 \text{ (個)}}}$$

(3)

2の倍数でないかつ3の倍数でない

かつ5の倍数でない といふ。

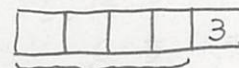
まず、3の倍数 とならないためには、

$$\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

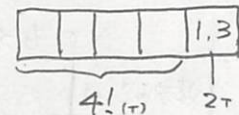
の並びを考えるとき。

2, 3, 4, 5, 6 を並べるとき



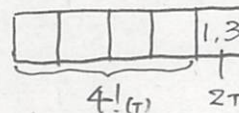
$$4! = 24 \text{ (個)}$$

1, 3, 4, 5, 6 を並べるとき



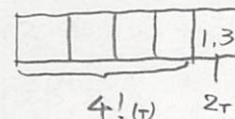
$$\text{よて } 2 \times 4! = 48 \text{ (個)}$$

1, 2, 3, 5, 6 を並べるとき



$$\text{よて } 2 \times 4! = 48 \text{ (個)}$$

1, 2, 3, 4, 6 を並べるとき



$$\text{よて } 2 \times 4! = 48 \text{ (個)}$$

以上により

$$24 + 48 + 48 + 48 = \underline{\underline{168 \text{ (個)}}}$$

- (1) 864の正の約数のうち、12の倍数または18の倍数であるものは全部で何個あるか。また、それらの総和を求めよ。
 (2) l, m, n を正の整数として、 $2^l 3^m 5^n$ の正の約数の個数を考える。 $l+m+n=9$ のとき、その最大個数はいくつか。

(1) 2011 東北学院大

(2) 類 2006 東京理科大

(1)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 864} \\ 2 \overline{) 432} \\ 2 \overline{) 216} \\ 2 \overline{) 108} \\ 2 \overline{) 54} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 864 &= 2^5 \times 3^3 \\ &= 12 \times 2^3 \times 3^2 \\ &= 18 \times 2^4 \times 3^1 \end{aligned}$$

であり、

864の正の約数で12の倍数は

$$12 \times 2^0 \times 3^0 \text{ の形}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \bigcirc \cdots 0, 1, 2, 3 \text{ の } 4 \text{ (通り)} \\ \Delta \cdots 0, 1, 2 \text{ の } 3 \text{ (通り)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって } 4 \times 3 = 12 \text{ (個)}$$

18の倍数は

$$18 \times 2^0 \times 3^0 \text{ の形}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \bigcirc \cdots 0, 1, 2, 3, 4 \text{ の } 5 \text{ (通り)} \\ \Delta \cdots 0, 1 \text{ の } 2 \text{ (通り)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって } 5 \times 2 = 10 \text{ (個)}$$

12の倍数かつ18の倍数は

$$36 \times 2^0 \times 3^0 \text{ の形}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \bigcirc \cdots 0, 1, 2, 3 \text{ の } 4 \text{ (通り)} \\ \Delta \cdots 0, 1 \text{ の } 2 \text{ (通り)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって } 4 \times 2 = 8 \text{ (個)}$$

よって、12の倍数 または 18の倍数は

$$12 + 10 - 8 = 14 \text{ (個)}$$

総和は、

$$\begin{aligned} & 12 \times (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) (3^0 + 3^1 + 3^2) \\ & + 18 \times (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) (3^0 + 3^1) \\ & - 36 \times (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) (3^0 + 3^1) \end{aligned}$$

$$= 12 \times (1 + 2 + 4 + 8) (1 + 3 + 9)$$

$$+ 18 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16) (1 + 3)$$

$$- 36 \times (1 + 2 + 4 + 8) (1 + 3)$$

$$= 12 \times 15 \times 13 + 18 \times 31 \times 4 - 36 \times 15 \times 4$$

$$= 2340 + 2232 - 2160$$

$$= 2412$$

(2) 解法1

$2^l 3^m 5^n$ の正の約数の個数は

$$(l+1)(m+1)(n+1) = S$$

とおく。

$l \leq m \leq n$ としても一般性を失わず

$l+m+n=9$ を満たす (l, m, n)

の組を考える。よって、

$$(l, m, n) = (1, 1, 7) \text{ のとき}$$

$$S = 2 \times 2 \times 8 = 32$$

$$(l, m, n) = (1, 2, 6) \text{ のとき}$$

$$S = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

$$(l, m, n) = (1, 3, 5) \text{ のとき}$$

$$S = 2 \times 4 \times 6 = 48$$

$$(l, m, n) = (1, 4, 4) \text{ のとき}$$

$$S = 2 \times 5 \times 5 = 50$$

$$(l, m, n) = (2, 2, 5) \text{ のとき}$$

$$S = 3 \times 3 \times 6 = 54$$

$$(l, m, n) = (2, 3, 4) \text{ のとき}$$

$$S = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

$$(l, m, n) = (3, 3, 3) \text{ のとき}$$

$$S = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

よって

$$\text{Max } S = 64 \quad (l=m=n=3 \text{ のとき})$$

解法2

$$l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1 \text{ より}$$

$$l+1 \geq 2, m+1 \geq 2, n+1 \geq 2$$

$$(\text{相加}) \geq (\text{相乗}) \text{ より}$$

$$(l+1) + (m+1) + (n+1) \geq 3 \sqrt[3]{(l+1)(m+1)(n+1)}$$

$$l+m+n+3 \geq 3 \sqrt[3]{S}$$

$$12 \geq 3 \sqrt[3]{S}$$

$$4 \geq \sqrt[3]{S}$$

$$64 \geq S$$

(等号成立は

$$l+1=m+1=n+1 \text{ かつ } l+m+n=9$$

つまり

$$l=m=n=3 \text{ のとき}$$

よって

$$\text{Max } S = 64$$

- (1) 1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち、1000 や 1212 のように、ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。
- (2) n 桁の自然数のうち、ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。 (2002 北海道大)

(1)

(i) 0 を含むとき

どの数を用いるかで 9 通り

その数を $\textcircled{\hspace{0.5em}}$ で表すと $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (通り)}$$

 $\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}$ の 1 通りを除いて

$$9 \times (8 - 1) = 63 \text{ (個)}$$

(ii) 0 を含まないとき

どの 2 数を用いるかで ${}^9C_2 = 36$ (通り) $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ (通り)}$$

1 種類の数字のみを用いるのを除いて

$$36 \times (16 - 2) = 504 \text{ (個)}$$

(i), (ii) より

$$63 + 504 = \underline{\underline{567 \text{ (個)}}}$$

(2)

(i) 0 を含むとき

(i) と同様に

$$9 \times (2^{n-1} - 1) \text{ (個)}$$

(ii) 0 を含まないとき

(i) と同様に

$$36 \times (2^n - 2) \text{ (個)}$$

(i), (ii) より

$$9(2^{n-1} - 1) + 36(2^n - 2)$$

$$= 9 \cdot 2^{n-1} - 9 + 72 \cdot 2^{n-1} - 72$$

$$= 81 \cdot 2^{n-1} - 81$$

$$= \underline{\underline{81(2^{n-1} - 1) \text{ (個)}}}$$

赤、青、黄色の風船をそれぞれ7本ずつ、合計21本持っている。これらの風船を7人の子どもたちに1本ずつ、全部で7本の風船を配る。このとき、風船の配り方は全部で $\square$ 通りあり、3色すべての色の風船を少なくとも1本は配るときの配り方は $\square$ 通りある。

(2008 南山大)

解法1

赤を r 本、青を b 本、黄色を y 本配るとすると、

$$r \geq 0, b \geq 0, y \geq 0, r + b + y = 7$$

<ア>

(i) $r < b < y$ とすると

$$(r, b, y) = (0, 1, 6), (0, 2, 5), (0, 3, 4), (1, 2, 4)$$

であり、7人への配り方は

$$\begin{aligned} & \frac{7!}{6!} + \frac{7!}{2! \times 5!} + \frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{7!}{2! \times 4!} \\ &= 7 + 21 + 35 + 105 \\ &= 168 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

r, b, y の大小を入れ替えて
 $168 \times 3! = 1008 \text{ (通り)}$

(ii) $r = b < y$ とすると

$$(r, b, y) = (0, 0, 7), (1, 1, 5), (2, 2, 3),$$

であり、7人への配り方は

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} \\ &= 1 + 42 + 210 \\ &= 253 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

r, b, y の大小を入れ替えて
 $253 \times 3 = 759 \text{ (通り)}$

(iii) $r < b = y$ とすると

$$(r, b, y) = (1, 3, 3)$$

であり、7人への配り方は

$$\frac{7!}{3! \times 3!} = 140 \text{ (通り)}$$

r, b, y の大小を入れ替えて
 $140 \times 3 = 420 \text{ (通り)}$

(i) ~ (iii) より

$$1008 + 759 + 420 = 2187 \text{ (通り)}$$

<イ>

$$\{r, b, y\} = \{1, 2, 4\}, \{1, 1, 5\}, \{2, 2, 3\}, \{1, 3, 3\}$$

のときであり、

$$\begin{aligned} & 105 \times 3! + 42 \times 3 + 210 \times 3 + 420 \\ &= 630 + 126 + 630 + 420 \\ &= 1806 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

解法2

<ア>

各子どもに、赤、青、黄色のいずれかを配る方法は

$$3^7 = 2187 \text{ (通り)}$$

<イ>

2色の風船を配るとき、

色の選び方は ${}_3C_2 = 3 \text{ (通り)}$

そのそれぞれに対し、7人に配る方法はすべて同じ色である場合を除いて、

$$3 \times (2^7 - 2) = 3 \times 126 = 378 \text{ (通り)}$$

すべて同じ色の風船を配るとき
 3通り

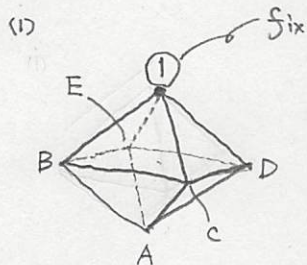
よって

$$2187 - 378 - 3 = 1806 \text{ (通り)}$$

正八面体について考える。ただし、回転させて一致するものは同じものとする。

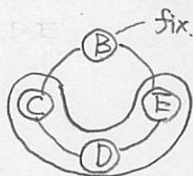
- (1) 頂点に1, 2, ……と順に番号を付けるとき、番号の付け方は何通りあるか。
- (2) 2つの面を赤に、残りの6つの面を白に塗るとき、塗り方は何通りあるか。
- (3) 3つの面を赤に、残りの5つの面を白に塗るとき、塗り方は何通りあるか。

(2016 久留米大)



(1) のとき

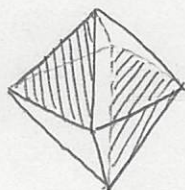
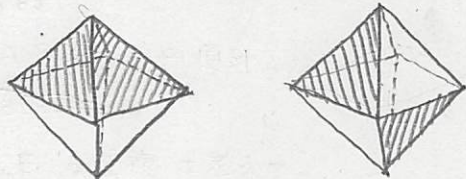
A の番号を決め方は 5 通り



このとき B, C, D, E は円順列
となるので、 $3! = 6$ 通り

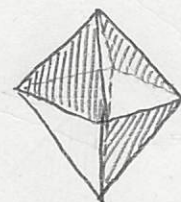
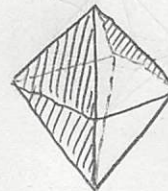
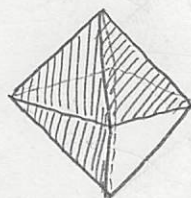
よって $5 \times 6 = \underline{\underline{30}}$ 通り

(2)



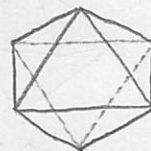
3 通り

(3)



3 通り

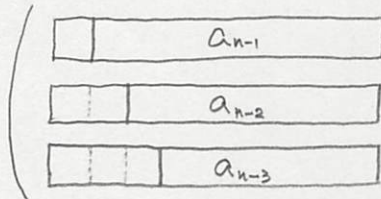
※ (1) ~ (3) は以下の図を利用すると
考えやすい。



n 段の階段を上るのに、1 歩で1 段、2 段、または3 段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。例えば、 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$ である。

- (1) a_4 , a_5 の値を求めよ。
 (2) $n \geq 1$ のとき、 a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , a_{n+3} の間に成り立つ関係式を求めよ。
 (3) a_{10} の値を求めよ。

(2011 千葉大)

(1) **解法1** (最初の一手)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geq 4)$$

∴

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 1)$$

 $n=1$ とし

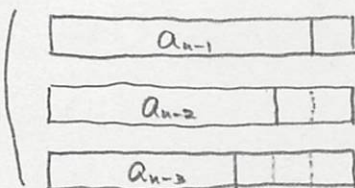
$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

 $n=2$ とし

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 \\ &= 7 + 4 + 2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

∴

$$\underline{a_4 = 7, a_5 = 13}$$

解法2 (最後の一手)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geq 4)$$

(2) (1) ∴

$$\underline{a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n}$$

(3)

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24 \\ a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44 \\ a_8 &= a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81 \\ a_9 &= a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149 \\ a_{10} &= a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = \underline{274} \end{aligned}$$

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各桁の数字は互いに異なり、どの2つの桁の数字の和も9にならない。」

ただし、1桁の正の整数は S に含まれるとする。

(1) S の要素でちょうど4桁のものは何個あるか。

(2) 小さい方から数えて2000番目の S の要素を求めよ。

(2000 東京大)

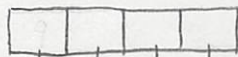
(1)

$$A = \{0, 9\}, B = \{1, 8\}, C = \{2, 7\},$$

$$D = \{3, 6\}, E = \{4, 5\}$$

とすると、 A, B, C, D, E の各集合から

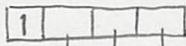
は高々1つの要素しか選べない。



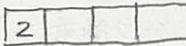
$$9 \times 8 \times 6 \times 4 = 1728 \text{ (通り)}$$

(2)

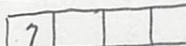
1桁のもの	9	累計
2桁のもの	$9 \times 8 = 72$ (桁)	81
3桁のもの	$9 \times 8 \times 6 = 432$ (桁)	513
4桁のもの		



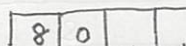
$$8 \times 6 \times 4 = 192 \text{ (桁)} \quad 705$$



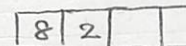
$$192 \text{ (桁)} \quad 897$$



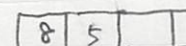
$$192 \text{ (桁)} \quad 1089$$



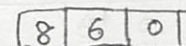
$$6 \times 4 = 24 \text{ (桁)} \quad 1113$$



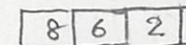
$$24 \text{ (桁)} \quad 1137$$



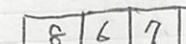
$$24 \text{ (桁)} \quad 1161$$



$$4 \text{ (桁)} \quad 1165$$



$$4 \text{ (桁)} \quad 1169$$



$$4 \text{ (桁)} \quad 1173$$

$$8692, 8694, 8695$$

(1998)

(1999)

(2000)

よって

8695