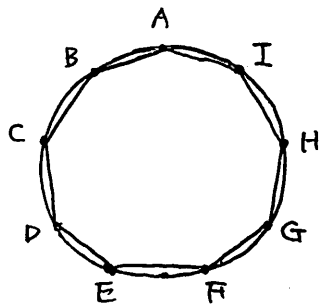


正九角形の3つの頂点を結んでできる三角形のうちで、正九角形と辺を共有しない三角形はいくつあるか。



三角形の総数は

$${}_9C_3 = 84 \text{ (個)}$$

1辺のみを共有するものは

$$\left(\begin{array}{l} AB - D, E, F, G, H \\ \text{他も同様} \end{array} \right)$$

$$5 \times 9 = 45 \text{ (個)}$$

2辺を共有するものは

頂点の個数に一致し

9個

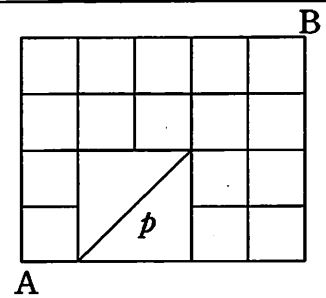
よって

$$84 - 45 - 9 = \underline{\underline{30 \text{ (個)}}}$$

図のような路を通してA地点からB地点まで行く。

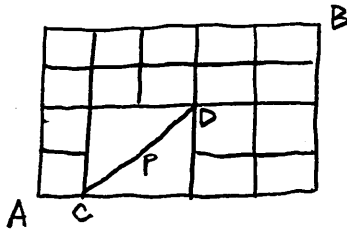
(1) 距離が最短となる経路は何通りあるか。

(2) 対角線の路 p が通れない場合、距離が最短となる経路は何通りあるか。



(1) **解法1**

路 p を通るとよい



$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$

と進むとよいので

($A \rightarrow C$) 1 (通り)

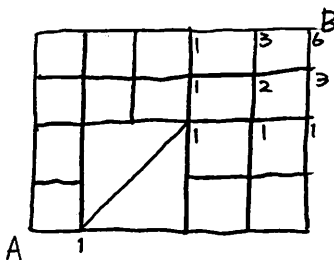
($C \rightarrow D$) 1 (通り)

($D \rightarrow B$) ${}_4C_2 = 6$ (通り)

よて

$$1 \times 1 \times 6 = \underline{\underline{6 \text{ (通り)}}}$$

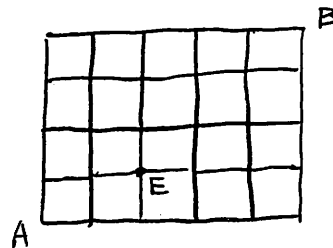
解法2



図より

6通り

(2) **解法1**



上図において

$$A \rightarrow B \text{ の総数は } 2 \\ {}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

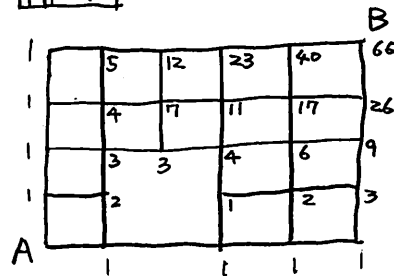
$A \rightarrow E \rightarrow B$

$${}_3C_2 \times {}_6C_3 = 3 \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 60 \text{ (通り)}$$

よて

$$126 - 60 = \underline{\underline{66 \text{ (通り)}}}$$

解法2

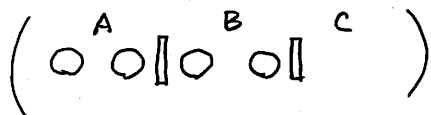


図より

66通り

区別できない10本の鉛筆をA, B, Cの3人に最低2本はもらえるように分けるとき、その分け方は何通りあるか。

あらかじめA, B, Cに2本ずつの鉛筆
を画記布すると残り4本の配布の
方法を考えるとよい。



○ 4こ $\parallel$ 2本の並びを考える

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{15 \text{ (通り)}}}$$

A君, B君を含む12名の高校生を, 6名, 3名, 3名の3つのグループに分ける方法は 通りある。また, A君とB君の2名を同じグループに入れて, 6名, 3名, 3名の3つのグループに分ける方法は 通りある。

(2006 福岡大)

<ア>

6名, 3名, 3名
区別できない。

$$\frac{{}_{12}C_6 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3}{2!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \underline{\underline{9240 \text{ (通り)}}}$$

<イ>

A, B
↓
(i) 6名, 3名, 3名
区別できない。

$$\frac{{}_{10}C_4 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3}{2!}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 2100 \text{ (通り)}$$

(ii) A, B
↓
6名, 3名, 3名
区別できる

$${}_{10}C_6 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3$$

$$= {}_{10}C_4 \times 4$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times 4$$

$$= 840 \text{ (通り)}$$

(i), (ii) より

$$2100 + 840 = \underline{\underline{2940 \text{ (通り)}}}$$

(1) 同じ種類の6冊のノートを3人に配る。

(ア) 1冊も配られない人がいてもよいとき、配り方は何通りあるか。

(イ) 3人とも少なくとも1冊は配るとき、配り方は何通りあるか。

(2) 異なる6台のミニチュアカーを3人に配る。

(ア) 1台も配られない人がいてもよいとき、配り方は何通りあるか。

(イ) 3人とも少なくとも1台は配るとき、配り方は何通りあるか。

(2006 中央大)

(1)

(ア)

(6冊 : 区別できない)
 (3人 : 区別できる)

○○○○○○ ||

の並びを考えるとよい。

$$\frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ (通り)}$$

(イ) 解法1

○[✓]○[✓]○[✓]○[✓]○[✓]○[✓]

5ヶ所のすき間のうち2ヶ所を選んで
 仕切りを入れるとよい。

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

解法2

あらかじめ3人に1冊ずつ配っておくと。

残り3冊の配り方を考えるとよい。

○○○ ||

の並びを考えるとよい。

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \text{ (通り)}$$

(2) (ア)

(6台 : 区別できる)
 (3人 : 区別できる)

$$3^6 = 729 \text{ (通り)}$$

(イ)

(i) 1人だけに配るとき

3通り

(ii) 2人だけに配るとき

どの2人に配るかに注意して

$${}_3C_2 \times (2^6 - 2)$$

$$= 3 \times 62$$

$$= 186 \text{ (通り)}$$

(i), (ii) より

$$729 - 3 - 186$$

$$= 540 \text{ (通り)}$$

E, X, C, E, L, L, E, N, T の9文字がある。

- (1) この9文字を左から横一列に並べるとき、並べ方の総数は $\boxed{\quad}$ 通り、Lが続けて並ばない並べ方の総数は $\boxed{\quad}$ 通り、Eが続けて並ばない並べ方の総数は $\boxed{\quad}$ 通りある。
- (2) この9文字から任意に4文字を取り出し左から横一列に並べるとき、並べ方の総数は $\boxed{\quad}$ 通りある。

(2012 松山大)

(1)

<ア>

$$\frac{9!}{3! \times 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = \underline{\underline{30240}} \text{ (通り)}$$

<イ>

Lを除いた7文字の並びは

$$\frac{7!}{3!} = 840 \text{ (通り)}$$



Lを、並べた7文字のすき間と両端に入れて

$${}^8C_2 = 28 \text{ (通り)}$$

よ、て

$$840 \times 28 = \underline{\underline{23520}} \text{ (通り)}$$

<ウ>

Eを除いた6文字の並びは

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$



Eを、並べた6文字のすき間と両端に入れて

$${}^7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

よ、て

$$360 \times 35 = \underline{\underline{12600}} \text{ (通り)}$$

(2)

(i) $\{a, a, a, b\}$ のとき

E E E $\swarrow$ X, C, L, N, T

文字の並び方は5通り なのて

$$\text{並べ方は } 5 \times \frac{4!}{3!} = 20 \text{ (通り)}$$

(ii) $\{a, a, b, b\}$ のとき

E E L L に限られ

$$\text{並べ方は } \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \text{ (通り)}$$

(iii) $\{a, a, b, c\}$ のとき

E E

$\swarrow$ X, C, L, N, T から2種類

文字の並び方は ${}_5C_2 = 10$ (通り) なのて

$$\text{並べ方は } 10 \times \frac{4!}{2!} = 120 \text{ (通り)}$$

L L の場合も同様 120通り

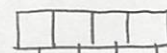
よ、て

$$120 + 120 = 240 \text{ (通り)}$$

(iv) $\{a, b, c, d\}$ のとき

E X C L N T の6文字のうち

4文字を並べると511aて



$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ (通り)}$$

(i) ~ (iv) より

$$20 + 6 + 240 + 360$$

$$= \underline{\underline{626}} \text{ (通り)}$$

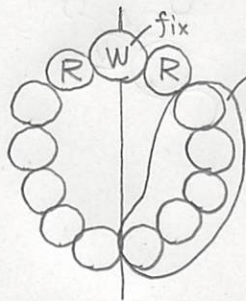
白玉1個、赤玉2個、青玉4個、黄玉6個がある。これらすべてを糸でつないで、すきまのないネックレスを作る。ネックレスの種類の総数を求めよ。ただし、回転または裏返すことにより一致するものは同種類とみなす。

(2006 信州大)

計13個の玉を円形に並べる総数は

$$\frac{12!}{2! \times 4! \times 6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13860 \text{ (通り)}$$

このうち、左右対称となるものは



B2コ, Y3コ
の並びも考えるとよく.

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \text{ (通り)}$$

Rの位置 6通りそれぞれに対して 10通り

ずつなので

$$6 \times 10 = 60 \text{ (通り)}$$

よって、左右非対称のものは

$$13860 - 60 = 13800 \text{ (通り)}$$

以上により、

ネックレスの総数は

$$60 + \frac{13800}{2} = 60 + 6900 = 6960 \text{ (種類)}$$

n を5以上の自然数とする。1以上 n 以下の自然数から互いに隣り合わない2つを選ぶ組合せは $\boxed{\quad}$ 通りあり、
 どの2つも隣り合わない3つを選ぶ組合せは $\boxed{\quad}$ 通りある。

(2012 上智大)

<ア>

1以上 n 以下の自然数 から異なる2つ
 を選ぶ方法は

$${}_nC_2 \text{ 通り}$$

隣り合う2数を選ぶ方法は
 $n-1$ (通り)

よって

隣り合わない2数を選ぶ方法は

$${}_nC_2 - (n-1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} - (n-1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ (通り)}$$

よって

どの2つも隣り合わない3数を選ぶ方法は

$${}_nC_3 - (n-2) - (n^2-5n+6)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} - (n^2-4n+4)$$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - (n-2)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n-2)\{n(n-1)-6(n-2)\}$$

$$= \frac{1}{6}(n-2)(n^2-7n+12)$$

$$= \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4) \text{ (通り)}$$

<イ>

1以上 n 以下の自然数 から異なる3つ
 を選ぶ方法は

$${}_nC_3 \text{ 通り}$$

連続する3数を選ぶ方法は

$$n-2 \text{ (通り)}$$

隣り合う2数を選ぶ方法は

$$n-1 \text{ (通り)}$$

であり、そのうち

1, 2 を選ぶときと、 $n-1, n$ を選ぶ

ときの もう1つの数を選ぶ方法は

それぞれ $n-3$ (通り) ずつ

それ以外の $n-3$ (通り) に対しては

もう1つの数を選ぶ方法は

それぞれ $n-4$ (通り) ずつ なので

2数だけが連続するような選ぶ方は

$$2(n-3) + (n-3)(n-4)$$

$$= 2n-6 + n^2-7n+12$$

$$= n^2-5n+6 \text{ (通り)}$$

P は正 n 角形 ($n \geq 6$) とする。

- (1) P の異なる2本の対角線の組で、 P の頂点を共有するものは何通りあるか。
 (2) P の異なる2本の対角線の組で、 P の頂点以外の点を共有するものは何通りあるか。
 (3) P の異なる2本の対角線の組で、共有点をもたないものは何通りあるか。

(2012 首都大学東京)

(1)

1つの頂点から $n-3$ (本) の対角線が得られ、

$${}_{n-3}C_2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} \text{ (組) が得られる}$$

頂点 は n 存在するので

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2} \times n = \underline{\underline{\frac{1}{2}n(n-3)(n-4) \text{ (通り)}}}$$

(2)

4頂点からなる四角形をとると、必ず1つの対角線の交点 が得られるので

$$\begin{aligned} {}_nC_4 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ (通り)}}} \end{aligned}$$

(3)

対角線の総数は

$$\begin{aligned} {}_nC_2 - n &= \frac{1}{2}n(n-1) - n \\ &= \frac{1}{2}n(n-3) \text{ (本)} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}n(n-3)C_2 - \frac{1}{2}n(n-3)(n-4) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \frac{\frac{n^2-3n}{2} \times \frac{n^2-3n-2}{2}}{2} - \frac{1}{24}n(n-3)(12(n-4) + (n-1)(n-2)) \\ &= \frac{1}{8}n(n-3)(n^2-3n-2) - \frac{1}{24}n(n-3)(n^2+9n-46) \\ &= \frac{1}{24}n(n-3)(3n^2-9n-6-n^2-9n+46) \\ &= \frac{1}{24}n(n-3)(2n^2-18n+40) \\ &= \frac{1}{12}n(n-3)(n^2-9n+20) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5) \text{ (通り)}}} \end{aligned}$$

x, y, z の1次方程式 $x+y+z=2k-1$ の整数解 (x, y, z) について、次の問いに答えよ。

ただし、定数 k は $k \geq 6$ を満たす整数である。

(1) $x > 0, y > 0, z > 0$ を満たすものは全部で何個あるか、 k を用いて表せ。

(2) (1)のうち、 $x \leq k$ を満たすものは全部で何個あるか、 k を用いて表せ。

(3) (1)のうち、 $x \leq k, y \leq k+1, z \leq k+2$ を満たすものは全部で何個あるか、 k を用いて表せ。 (2016 早稲田大)

(1)

$$x > 0, y > 0, z > 0 \quad \text{より}$$

$$x-1 \geq 0, y-1 \geq 0, z-1 \geq 0$$

$$X = x-1, Y = y-1, Z = z-1 \quad \text{とおく。}$$

$$x = X+1, y = Y+1, z = Z+1$$

$$x+y+z=2k-1 \quad \text{より}$$

$$X+1+Y+1+Z+1=2k-1$$

$$X+Y+Z=2k-4$$

これを満たす

$$X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0 \quad \text{の組は}$$

$$\bigcirc 2k-4 \quad \square 2 \text{ の順列に等しい。}$$

よて

$$\frac{(2k-2)!}{(2k-4)! \cdot 2!} = \frac{(2k-2)(2k-3)}{2}$$

$$= \underline{\underline{(k-1)(2k-3)}} \quad (a)$$

(2)

(i)のうち $x > k$ を満たすものを考える。

$$x' = x - k \quad \text{とおく。} \quad x' > 0$$

$$x+y+z=2k-1 \quad \text{より}$$

$$x'+k+y+z=2k-1$$

$$x'+y+z=k-1$$

$$X' = x'-1, Y = y-1, Z = z-1 \quad \text{とおく。}$$

$$X'+1+Y+1+Z+1=k-1$$

$$X'+Y+Z=k-4$$

これを満たす

$$X' \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0 \quad \text{の組は}$$

$$\bigcirc k-4 \quad \square 2 \text{ の順列に等しい。}$$

$$\frac{(k-2)!}{(k-4)! \cdot 2!} = \frac{(k-2)(k-3)}{2} \quad (b)$$

よて

$$(k-1)(2k-3) - \frac{1}{2}(k-2)(k-3)$$

$$= 2k^2 - 5k + 3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k - 3$$

$$= \frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}k(3k-5)}} \quad (c)$$

(3)

(i)のうち

$$x > k \quad \text{または} \quad x > k+1 \quad \text{または} \quad x > k+2$$

を満たすものを考える。

(i) $x > k$ を満たすものは

$$(2) \text{より} \quad \frac{1}{2}(k-2)(k-3) \quad (a)$$

(ii) $y > k+1$ を満たすものは

$$X = x-1, Y' = y-k-2, Z = z-1 \quad \text{とおく。}$$

$$X+1+Y'+k+2+Z+1=2k-1$$

$$X+Y'+Z=k-5$$

これを満たす

$$X \geq 0, Y' \geq 0, Z \geq 0 \quad \text{の組は}$$

$$\bigcirc k-5 \quad \square 2 \text{ の順列に等しい。}$$

$$\frac{(k-3)!}{(k-5)! \cdot 2!} = \frac{(k-3)(k-4)}{2} \quad (a)$$

(iii) $z > k+2$ を満たすものは

$$X = x-1, Y = y-1, Z' = z-k-3 \quad \text{とおく。}$$

$$X+1+Y+1+Z'+k+3=2k-1$$

$$X+Y+Z'=k-6$$

これを満たす

$$X \geq 0, Y \geq 0, Z' \geq 0 \quad \text{の組は}$$

$$\bigcirc k-6 \quad \square 2 \text{ の順列に等しい。}$$

$$\frac{(k-4)!}{(k-6)! \cdot 2!} = \frac{(k-4)(k-5)}{2} \quad (a)$$

$$\therefore \text{ } x+y+z=2k-1 \quad \text{より}$$

(i), (ii), (iii) のいずれか 2つ以上を

同時に満たすものは存在しない。

$$\frac{1}{2}(k-2)(k-3) + \frac{1}{2}(k-3)(k-4) + \frac{1}{2}(k-4)(k-5)$$

$$= \frac{1}{2}(k^2 - 5k + 6 + k^2 - 7k + 12 + k^2 - 9k + 20)$$

$$= \frac{1}{2}(3k^2 - 21k + 38)$$

よて

$$(k-1)(2k-3) - \frac{1}{2}(3k^2 - 21k + 38)$$

$$= \frac{1}{2}(4k^2 - 10k + 6 - 3k^2 + 21k - 38)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(k^2 + 11k - 32)}} \quad (c)$$

(1) 次の3条件を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。

(2006 東京医科歯科大)

(A) $a_1 \geq 1$ (B) $a_5 \leq 4$ (C) $a_i \leq a_{i+1}$ ($i=1, 2, 3, 4$)(2) 次の3条件を満たす整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数を求めよ。(A) $a_1 \geq 1$ (B) $a_i \geq 0$ ($i=2, 3, 4, 5$) (C) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$ (3) n 桁の自然数で各桁の数字の合計が r 以下となるものの個数を n, r を用いて表せ。ただし $n \geq 1, r \leq 9$ とする。

(1)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bigcirc \bigcirc & \square & \bigcirc \square & \square \bigcirc \bigcirc \end{array} \rightarrow (1, 1, 2, 1, 4)$$

○ 5コ, □ 3コ の順列に等しいので

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{56 (コ)}}$$

(2)

$$a_1 \geq 1 \text{ より } a_1 - 1 \geq 0.$$

$$A = a_1 - 1 \text{ とおくと } a_1 = A + 1.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4 \text{ より}$$

$$A + 1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 4$$

$$A + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 3$$

$$\begin{array}{ccccc} A & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \square & \bigcirc & \square & \square & \bigcirc \square \bigcirc \end{array} \rightarrow (0, 1, 0, 0, 1)$$

○ 3コ, □ 5コ の順列に等しいので

$$(1) \text{ と同様 } \underline{\underline{56 (コ)}}$$

(3)

$$a_1 \geq 1, a_i \geq 0 \ (i=2, 3, 4, \dots, n)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq r$$

を満たす組を調べる.

$$a_1 \geq 1 \text{ より } a_1 - 1 \geq 0$$

$$A = a_1 - 1 \text{ とおくと } a_1 = A + 1$$

より

$$A + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq r - 1$$

○ $r-1$ コ, □ n コ の順列に等しいので

$$\frac{(r-1+n)!}{(r-1)! \cdot n!} \quad (コ)$$